МЛ Ганчев 12.11

Деф Ще казваме че теория от I-ви ред T' е разширение на T, ако всеки нелогически символ на T е нелогически символ на T' и за всяка нелогическа аксиома A на T е вярна $\vdash_{T'} A$

Тв Нека T' е разширение на T и нека A е формула на T. Тогава A е формула на T' и ако $\vdash_T A$ то $\vdash_{T'} A$

Док.

Нека A е формула на T, т.к. T' съдържа $\forall$ нелогически символи на T, A е формула на T'. За да докажем втората част на твърдението е достатъчно да го докажем за аксиомите на T т.е. ако A е аксиома на T то $\vdash_{T'} A$

1сл) A е логическа аксиома. Т.к A е формула на T', A е логическа аксиома на T' значи $\vdash_{T'} A$

2сл) A е нелогическа аксиома. Тогава по условие $\vdash_{T'} A$

Деф Ще казваме че разширението T' на T е консервативно ако за $\forall$ формула A на T от $\vdash_{T'} A$ то $\vdash_T A$

Th Нека T и T' са както във формулировката на Th за константите. Тогава T' е консервативно разширение на T

Док. Ясно е че T' е разширение на T. Нека A е формула от T и $\vdash_{T'} A$. Нека x е променлива която не участва в A, а c е нова константа от T'. Съгласно Th за константите $\vdash_{T'} A_x[c] \Longleftrightarrow \vdash_T A$

Т.к. x не участва в A, $A_x[c] \equiv A$. Оттук $\vdash_T A$

Разширения с помощта на дефиниции

Нека T е теория и нека A е формула на T. Нека свободните променливи на A са измежду $x_1, \dots x_n$ ($x_1 \dots x_n$ са различни) Нека T' се получава от T добавяйки нов n-местен предикатен символ π и (дефинираща) нелогическа аксиома

$$\pi x_1 \dots x_n \leftrightarrow A$$

Нека B е формула от T'. С B^* ще означаваме всяка формула която се получава от B заменствайки атомарните подформули от вида $\pi a_1 \dots a_n$ с $A'_{x_1 \dots x_n}[a_1 \dots a_n]$, където A' е вариант на A чиито свързани променливи не участват изобщо във формулата B. Ясно е че B^* е формула ~~от~~ T. B^* ще наричаме превод на B

Th За всяка формула B на T' е в сила:

а) $\vdash_{T'} B \leftrightarrow B^*$

б) $\vdash_{T'} B$ то $\vdash_{T} B^*$

Док Нека B е формула на T'

а) Нека A' е вариант на A, използван за получаването на B^*. От Th за вариантите $\vdash_{T'} A \leftrightarrow A'$. Оттук $\vdash_{T'} \pi x_1 \dots x_n \leftrightarrow A$ следва $\vdash_{T'} \pi x_1 \dots x_n \leftrightarrow A'$. Т.к свързаните променливи на A' не участват в B, всеки терм a, участва в B, е подходящ за замяна на коя да е от променливите $x_1 \dots x_n$ в A'. Оттук и (ПСС) $\vdash_{T'} \pi a_1 \dots a_n \leftrightarrow A'_{x_1 \dots x_n}[a_1 \dots a_n]$ за всеки избор на термове $a_1 \dots a_n$ участващи в B. Оттук деф за B^* и (ТТ) имаме че

$\vdash_{T'} B \leftrightarrow B^*$

б) Нека $\vdash_{T} B$. Ще докажем че $\vdash_{T} B^*$ с индукция по извода в T'

1) B е аксиома на T'

1сл) $B \approx \neg C \vee C$. Тогава B^* има вида $\neg C^* \vee C^*$ за някой превод C^* на C и следователно $\vdash_{T} B^*$

2сл) $B \approx C_x[a] \to \exists x C$. Тогава $B^* \approx C^*_x[a] \to \exists x C^*$ за някой превод C^* на C и следователно $\vdash_{T} B^*$

3сл) B е аксиома за равенство, различна от тази на Π. Тогава B не съдържа Π и $B^* \approx B$ и следователно $\vdash_{T} B^*$

4сл) $B \approx y_1 = y_{n+1} \to y_2 = y_{n+2} \dots \to y_n = y_{2n} \to \Pi y_1 \dots y_n \to \Pi y_{n+1} \dots y_{2n}$. Тогава

$B^* \approx y_1 = y_{n+1} \to \dots y_n = y_{2n} \to A'_{x_1 \dots x_n}[y_1 \dots y_n] \to A'_{x_1 \dots x_n}[y_{n+1} \dots y_{2n}]$. Тогава

$\vdash_{T} B$ от ($T=$)

5сл) B е нелогическа аксиома. Тогава $\vdash_{T} B$ и при това $B^* \approx B$

6сл) $B \approx \Pi x_1 \dots x_n \leftrightarrow A$. Тогава формулата
$B^* \approx A'_{x_1 \dots x_n}[x_1 \dots x_n] \leftrightarrow A \approx A' \leftrightarrow A' \Rightarrow \vdash_{T} B^*$ (Т за вар-те)

2) B е тавтологично следствие на $B_1 \dots B_n$ и $\vdash_{T'} B_1 \dots \vdash_{T'} B_n$. Тогава B^* е тавтологично следствие на $B_1^*, B_2^* \dots B_n^*$. От индукционното предположение $\vdash_{T} B_1^* \dots \vdash_{T} B_n^*$ и следователно $\vdash_{T} B^*$

3) $B \approx \exists x C \to D$ за някое $\vdash_{T'} C \to D$ такова че x не участва свободно в D. $B^* \approx \exists x (C \to D)^* \Rightarrow B^* \approx \exists x C^* \to D^*$ за някои преводи C^* и D^* на C и D. При това $C^* \to D^*$ е превод на $C \to D$. Оттук и индукционното предположение $\vdash_{T} C^* \to D^*$. От друга страна свободните

③

променливи на D^* са същите като на D и значи x не участва свободно в D^*. Оттук
$\vdash_T \exists x\, C^* \rightarrow D^*$ (П∃) т.е. $\vdash_T B^*$

Следствие: T' е консервативно разширение на T

Пример (PA)

1) $\xi_0 \leq \xi_1 \leftrightarrow (\xi_1 > \xi_0 \vee \xi_1 = \xi_0)$
2) $\xi_0 | \xi_1 \leftrightarrow \exists \xi_2 (\xi_1 = \xi_0 \cdot \xi_2)$ $\Big\}\, PA'$

3) $Pr\, \xi_0 \leftrightarrow (S0 < \xi_0 \,\&\, \forall \xi_1 (\xi_1 | \xi_0 \rightarrow (\xi_1 = S0 \vee \xi_1 = \xi_0)))$
4) $(\xi_0, \xi_1) = 1 \leftrightarrow \forall \xi_2 (\xi_2 | \xi_0 \rightarrow \xi_2 | \xi_1 \rightarrow \xi_2 = S0)$

---

① $\vdash_{PA'} \xi_0 \leq \xi_0$

а) $\vdash_{PA'} \xi_0 = \xi_0$, б) $\vdash_{PA'} \xi_0 < \xi_0 \vee \xi_0 = \xi_0$ (а)(ТТ)

в) $\vdash_{PA'} \xi_0 \leq \xi_0 \leftrightarrow (\xi_0 < \xi_0 \vee \xi_0 = \xi_0)$ (1)(П∀С)

г) $\vdash_{PA'} \xi_0 \leq \xi_0$

② $\vdash_{PA'} \xi_0 \leq \xi_1 \rightarrow \xi_1 \leq \xi_0 \rightarrow \xi_0 = \xi_1$

Нека PA'' се получава от PA' добавяйки константи a и b, и аксиоми $a \leq b$ и $b \leq a$

Тогава (i) $\vdash_{PA''} a \leq b$

(ii) $\vdash_{PA''} a < b \vee a = b$ (i)(1)(П∀С)(ТТ)

(iii) $\vdash_{PA''} a < b \rightarrow (a \neq b \,\&\, b \nless a)$ (П∀С)

(iv) $\vdash_{PA''} (a \neq b \,\&\, b \nless a) \vee a = b$

(v) $\vdash_{PA''} b \leq a$

(vi) $\vdash_{PA''} b < a \vee a = b$

(vii) $\vdash_{PA''} b < a \rightarrow a = b$ (iv)(ТТ)

(viii) $\vdash_{PA''} a = b$ (vi)(vii)(ТТ)

Следователно от Th за дедукцията и Th за конст

в $\vdash_{PA'} \xi_0 \leq \xi_1 \rightarrow \xi_1 \leq \xi_0 \rightarrow \xi_0 = \xi_1$

Зад. $\vdash_{PA'} \xi_0 | \xi_0$, $\vdash_{PA'} \xi_0 | \xi_1 \rightarrow \xi_1 | \xi_0 \rightarrow \xi_0 = \xi_1$, $\vdash_{PA'} \xi_0 | \xi_1 \rightarrow \xi_1 | \xi_2 \rightarrow \xi_0 | \xi_2$