МЛ 11.11.14

① $\vdash_{PA} \xi_0 \neq S\xi_0$

② $\vdash_{PA} \xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2$ /индукция по десния език с индукция по ξ_2

(i) $\xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < 0 \to \xi_0 < 0$, от акс $\xi_0 \neq 0 \Rightarrow$ абсурд т.е. тавтологично вярно

$\xi_0 < \xi_1 \to \xi_0 \neq 0 \to \xi_1 \neq 0$

(1) $\vdash_{PA} \xi_1 \neq 0$ N7 и ПСС

(2) $\vdash_{PA} \xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < 0 \to \xi_0 < 0$

(ii) искаме да докажем

$(\xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2) \to \xi_0 < \xi_1 \to \underbrace{\xi_1 < S\xi_2}_{\xi_1 = \xi_2 \vee \xi_1 < \xi_2} \to \xi_0 < S\xi_2$

$(\xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2) \to \xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 = \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2$

$(\xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2) \to \xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2$ (N9)

(3) $\vdash_{PA} \xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 = \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2$ (Т =)

(4) $\vdash_{PA} (\xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2) \to \xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 = \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2$ (3) (ТТ)

(5) $\vdash_{PA} (\xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2) \to \xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 = \xi_2 \vee \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2$ (ТТ)

(6) $\vdash_{PA} (\xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2) \to \xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 = \xi_2 \vee \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2$ (4)(5)(ТТ)

(7) $\vdash_{PA} \xi_1 < S\xi_2 \leftrightarrow (\xi_1 = \xi_2 \vee \xi_1 < \xi_2)$ N9 ПСС

(8) $\vdash_{PA} (\xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2) \to \xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < S\xi_2 \to \xi_0 < \xi_2$ (6)(7)(ТТ)

(9) $\vdash_{PA} \xi_0 < \xi_2 \to \xi_0 < S\xi_2$ (N9)(ПСС)(ТТ)

(10) $\vdash_{PA} \xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < S\xi_2 \to \xi_0 < S\xi_2$
от (8), (9) и (ТТ)

(11) $\vdash_{PA} \forall \xi_2 (\xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < S\xi_2 \to \xi_0 < S\xi_2)$
от (10) и (ГО)

② (2) (11) N10 $\vdash_{PA} \xi_0 < \xi_1 \to \xi_1 < \xi_2 \to \xi_0 < \xi_2$ неравенството е транзитивно

③ $\vdash_{PA} S\xi_0 < \xi_1 \to \xi_0 < \xi_1$
Индукция по ξ_1

(1) $\vdash_{PA} S\xi_0 \not< 0$ N7 ПСС

(2) $\vdash_{PA} S\xi_0 < 0 \to \xi_0 < 0$
$(S\xi_0 < \xi_1) \to \xi_0 < \xi_1 \to \underbrace{S\xi_0 < S\xi_1}_{S\xi_0 = \xi_1 \vee S\xi_0 < \xi_1} \to \xi_0 < S\xi_1$

(3) $\vdash_{PA} \xi_0 < S\xi_0 \leftrightarrow (\xi_0 = \xi_0 \vee \xi_0 < \xi_0)$
от N9 ПСС

(4) $\vdash_{PA} \xi_0 = \xi_1$, (5) $\vdash_{PA} \xi_0 < S\xi_0$ от (3) (4) и (ТТ)

(6) $\vdash_{PA} \xi_0 < S\xi_0 \to S\xi_0 = \xi_1 \to \xi_0 < \xi_1$ (Т=)

(7) $\vdash_{PA} S\xi_0 = \xi_1 \to \xi_0 < \xi_1$ (5) (6) (ТТ)

(8) $\vdash_{PA} (S\xi_0 < \xi_1 \to \xi_0 < \xi_1) \to S\xi_0 = \xi_1 \to \xi_0 < \xi_1$ (7) (ТТ)

(9) $\vdash_{PA} (S\xi_0 < \xi_1 \to \xi_0 < \xi_1) \to S\xi_0 < \xi_1 \to \xi_0 < \xi_1$ (ТТ)

(10) $\vdash_{PA} (S\xi_0 < \xi_1 \to \xi_0 < \xi_1) \to (S\xi_0 = \xi_1 \vee S\xi_0 < \xi_1) \to \xi_0 < \xi_1$
от (8) (9) (ТТ)

(11) $\vdash_{PA} (S\xi_0 < S\xi_1) \leftrightarrow (S\xi_0 = \xi_1 \vee S\xi_0 < \xi_1)$ N9 ПСС

(12) $\vdash_{PA} (S\xi_0 < \xi_1 \to \xi_0 < \xi_1) \to S\xi_0 < S\xi_1 \to \xi_0 < \xi_1$ (10) (11) (ТТ)

(13) $\vdash_{PA} \xi_1 < S\xi_1$ (5) ПСС

(14) $\vdash_{PA} S\xi_0 < \xi_1 \to \xi_0 < \xi_1 \to S\xi_0 < S\xi_1 \to \xi_0 < S\xi_1$ (12) (13) (2) (ТТ)

④ $\vdash_{PA} \xi_0 \not< \xi_0$ с индукция по ξ_0

(1) $\vdash_{PA} 0 \not< 0$ (N6)(ПСС)

$\xi_0 \not< \xi_0 \longrightarrow \underbrace{S\xi_0 < S\xi_0}$

$S\xi_0 < S\xi_0 \longleftrightarrow (S\xi_0 = \xi_0 \vee S\xi_0 < \xi_0)$

$S\xi_0 \not< S\xi_0 \longleftrightarrow (S\xi_0 \neq \xi_0 \vee S\xi_0 \not< \xi_0)$

(2) $\vdash_{PA} S\xi_0 \neq \xi_0$ ① (Т~~=~~)

(3) $\vdash_{PA} S\xi_0 < \xi_0 \longrightarrow \xi_0 < \xi_0$ ③ (ПСС)

(4) $\vdash_{PA} \xi_0 \not< \xi_0 \longrightarrow S\xi_0 \not< \xi_0$ (3)(ТТ)

(5) $\vdash_{PA} \xi_0 \not< \xi_0 \longrightarrow (S\xi_0 \neq \xi_0 \;\&\; S\xi_0 \not< \xi_0)$ (2)(4)(ТТ)

(6) $\vdash_{PA} S\xi_0 < S\xi_0 \longleftrightarrow (S\xi_0 = \xi_0 \vee S\xi_0 < \xi_0)$ (N8)(ПСС)

(7) $\vdash_{PA} S\xi_0 \not< S\xi_0 \longleftrightarrow (S\xi_0 \neq \xi_0 \;\&\; S\xi_0 \not< \xi_0)$ (6)(ТТ)

(8) $\vdash_{PA} \xi_0 \not< \xi_0 \longrightarrow S\xi_0 \not< S\xi_0$ (5)(7)(ТТ)

(9) $\vdash_{PA} \forall \xi_0 (\xi_0 \not< \xi_0 \longrightarrow S\xi_0 \not< S\xi_0)$ (8)(ПО)

(10) (9)(N10) $\vdash_{PA} \xi_0 \not< \xi_0$

Означение. Нека T е теория от първи ред, а Г е множество от ~~функции~~ формули от $\mathcal{L}(T)$. С ~~[illegible]~~ T[Г] ще означаваме теорията, която се получава от T добавяйки формулите от Г, всяко то е нелогическа аксиома. В случай че $\Gamma = \{A_1, A_2 .. A_n\}$ - крайно множество, ще пишем $T[A_1, A_2 .. A_n]$

Деф: Ще казваме че една формула е затворена ако тя не съдържа свободни променливи. Ще казваме че един терм е затворен, ако не съдържа променливи

Th (за дедукцията)
Нека T е теория от първи ред, A е затворена формула от $\mathcal{L}(T)$, а B е формула от $\mathcal{L}(T)$. Тогава $\vdash_T A \to B$, тогава и само тогава когато $\vdash_{T[A]} B$

Док. $\Rightarrow$

Нека $\vdash_T A \to B$. Тогава $\vdash_{T[A]} A \to B$. Но $\vdash_{T[A]} A$ е аксиома на $T[A] \Rightarrow \vdash_{T[A]} B$

$\Leftarrow$

Нека $\vdash_{T[A]} B$. Ще докажем се $\vdash_T A \to B$ с индукция по извода в $T[A]$

Следствие
Нека T е теория от I-ви ред, $A_1 \dots A_n$ са затворени формули от $\mathcal{L}(T)$, а B е формула от $\mathcal{L}(T)$. Тогава $\vdash_T A_1 \to A_2 \dots \to A_n \to B \leftrightarrow \vdash_{T[A_1, \dots A_n]} B$

Th (константите)
Нека T е теория от I-ви ред, и нека T' се получава от T добавяйки не-константи (0-местни функционални символи) към езика на T (T' съдържа нови логически аксиоми но не съдържа нови нелогически аксиоми). Нека A е формула от T и нека $c_1 - c_n$ са различни и нови константи. Тогава $\vdash_T A \leftrightarrow \vdash_{T'} A_{x_1 \dots x_n}[c_1 \dots c_n]$ за $\forall$ формула A от $\mathcal{L}(T)$ и всеки избор на различни променливи $x_1 \dots x_n$