Мл Ганчев 10.12.14

(FT) $0, 1, +, \cdot$

(F1) $\xi_0 + (\xi_1 + \xi_2) = (\xi_0 + \xi_1) + \xi_2$

(F2) $\xi_0 + 0 = \xi_0$

(F3) $\exists \xi_1 (\xi_0 + \xi_1 = 0)$

(F4) $\xi_0 (\xi_1 \xi_2) = (\xi_0 \xi_1) \xi_2$

(F5) $\xi_0 + \xi_1 = \xi_1 + \xi_0$

(F6) $\xi_0 . 1 = \xi_0$

(F7) $\xi_0 \neq 0 \Rightarrow \exists \xi_1 (\xi_0 \xi_1 = 1)$

(F8) $\xi_0 \xi_1 = \xi_1 \xi_0$

(F9) $\xi_0 (\xi_1 + \xi_2) = \xi_0 \xi_1 + \xi_0 \xi_2$

(F10) $0 \neq 1$

Нека $C_{FT} = \{\alpha \mid \alpha$ е затворен терм на $FT\}$

Нека за $n \in \mathbb{N}$, $A_n \approx 0 + \underbrace{1 + 1 \ldots + 1}_{n}$

(1) $\vdash_{FT} A_n + A_m = A_{n+m}$ за $n, m \in \mathbb{N}$

док. Индукция по m

1сл $m = 0 \Rightarrow A_m \approx 0$ и $\vdash_{FT} A_n + 0 = A_n$ (F2)(ПССл)

2сл $m \geq 0$ т.е. $A_n + A_m = A_{n+m}$. Имаме че

$\vdash_{FT} A_n + A_{m+1} = A_n + (A_m + 1) \Rightarrow \vdash_{FT} A_n + A_{m+1} = (A_n + A_m) + 1$

$(T=)$ (F1) $\Rightarrow \vdash_{FT} A_n + A_{m+1} = A_{n+m} + 1$ $(T=)$(инд. хип)

$\Rightarrow \vdash_{FT} A_n + A_{m+1} = A_{n+m+1}$

(2) $\vdash_{FT} A_n A_m = A_{nm}$ за $n, m \in \mathbb{N}$

док. инд по m

1сл $m = 0 \Rightarrow \vdash_{FT} A_n 0 = A_n (0 + 0)$ $(T=)$(F2)(ПССл)

Трябва да докажем $\vdash_{FT} A_n . 0 = 0$

$\vdash_{FT} A_n . 0 = A_n . 0 + A_n . 0$ (F9)

$\vdash_{FT} A_n . 0 + x = (A_n . 0 + A_n . 0) + x$ $(T=)$

$\vdash_{FT} A_n . 0 + x = A_n . 0 + (A_n . 0 + x)$

$\vdash_{FT} A_n + x = 0 \rightarrow 0 = A_n + 0$

$\vdash_{FT} H_n + x = 0 \rightarrow H_n . 0 = 0$

$\vdash_{FT} \exists x \, (H_n + x = 0) \rightarrow H_n . 0 = 0$

$\vdash_{FT} \exists x \, (H_n + x = 0)$ (F3)

$\vdash_{FT} H_n . 0 = 0$

2сл $m \geq 0$ е т.ч. $\vdash_{FT} H_n H_m = H_{nm}$ за $n, m \in \mathbb{N}$

Имаме $\vdash_{FT} H_n . H_{m+1} = H_n (H_m + 1)$

$\vdash_{FT} H_n H_{m+1} = H_n H_m + H_n . 1$

$\vdash_{FT} H_n H_m + H_n . 1 = H_{nm} + H_n$

$\vdash_{FT} H_{nm} + H_n = H_{nm+n}$

(3) За всеки терм $a \in C_{FT}$ от $\vdash_{FT} a = H_n$ за $n \in \mathbb{N}$

Док инд по a

1сл $a \approx 0$. Тогава $a \approx H_0$ и $\vdash_{FT} a = H_0$

2сл $a \approx 1$. Тогава $\vdash_{FT} a = 1 + 0$, $\vdash_{FT} 1 + 0 = \underbrace{0 + 1}_{H_1}$

откъдето $\vdash_{FT} a = H_1$

3сл $a \approx b + c$, където $\vdash_{FT} b = H_m$, $\vdash_{FT} c = H_n$ за $m, n \in \mathbb{N}$. Тогава $\vdash_{FT} a = H_{n+m}$

4сл $a \approx b . c$, където $\vdash_{FT} b = H_m$, $\vdash_{FT} c = H_n$ за $n, m \in \mathbb{N}$

Тогава $\vdash_{FT} a = H_{nm}$. Оттук $|\mathcal{A}_{FT}| = \{H_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(4) $\nvdash_{FT} H_n = H_m$ за $n \neq m$

Док

Имаме $Q \models FT$. Освен това $Q(H_n) = n$ за $\forall n \in \mathbb{N}$. Оттук ако $n \neq m$, $Q(H_n) \neq Q(H_m)$ и значи $Q(H_n = H_m) \equiv F$. Сл $\nvdash_{FT} H_n = H_m$ за $n \neq m$

Деф. Нека $\mathcal{L}$ е език от първи ред и $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ са структури за $\mathcal{L}$. Нека $h : |\mathcal{A}_1| \rightarrow |\mathcal{A}_2|$. Ако:

1) h е биекция

2) $h(f^{\mathcal{U}_1}(d_1 \ldots d_n)) \equiv f^{\mathcal{U}_2}(h(d_1) \ldots h(d_n))$ за всеки n-местен функционален символ f от $\mathcal{L}$ и $d_1, \ldots, d_n \in |\mathcal{U}_1|$

3) $(d_1 \ldots d_n) \in P^{\mathcal{U}_1} \longleftrightarrow (h(d_1), \ldots, h(d_n)) \in P^{\mathcal{U}_2}$ за всеки n-местен предикатен символ P (разл. от $=$) и $d_1 \ldots d_n \in |\mathcal{U}_1|$

Ще казваме че h е изоморфизъм и че $\mathcal{U}_1 \cong \mathcal{U}_2$

В случай че h е само инекция, ще казваме че h е влагане на $\mathcal{U}_1$ в $\mathcal{U}_2$

Нека с N означим мн-вото на ест.-те числа. Нека $h : N \to |\mathcal{U}_{FT}|$ е дефинирана с $h(n) = \overline{H_n}$. Тогава

$h(0) = \overline{H_0} \equiv \mathcal{U}_{FT}(0)$, $h(1) = \overline{H_1} \equiv \mathcal{U}_{FT}(1)$

$h(n+m) = \overline{H_{n+m}} \equiv \overline{H_n} +_{\mathcal{U}_{FT}} \overline{H_m} = h(n) +_{\mathcal{U}_{FT}} h(m)$

$h(m.n) = \overline{H_{m.n}} \equiv \overline{H_m} *_{\mathcal{U}_{FT}} \overline{H_n} = h(m) \cdot_{\mathcal{U}_{FT}} h(n)$

Освен това h е биекция $\Rightarrow$ h е инекция и h е сюрекция. Сл. $\mathcal{U}_{FT} \cong (N; 0, 1, +, \cdot)$

Хенкиново разширение : $\vdash_T \exists x B \to B_x[c]$

$\vdash_{FT} \exists y_1 (H_1 + y_1 = 0) \Rightarrow \exists -H_1$

$\vdash_{FT} \exists y_1 (H_2 + y_1 = 0) \Rightarrow \exists -H_2$

$\vdash_{FT} \exists y_1 (H_3 + y_1 = 0) \Rightarrow \exists -H_3$

. . . .

$$\left.\begin{matrix} H_0, H_1, H_2 \ldots H_n \ldots \\ -H_1, -H_2 \ldots -H_n \ldots \end{matrix}\right\} \mathbb{Z}$$

$\vdash_{FT} \exists y_1 (H_2 \cdot y_1 = 1) \Rightarrow \exists \frac{1}{H_2}$

$\vdash_{FT} \exists y_1 (-H_2 \cdot y_1 = 1) \Rightarrow \exists \frac{1}{-H_2}$

$\vdash_{FT} \exists \xi_1 (H_3 \cdot \xi_1 = 1) \Rightarrow \exists \frac{1}{H_3}$

$$\left.\begin{array}{l} H_0 \; H_1 \; H_2 \; H_3 \; \ldots \; H_n \; \ldots \\ \quad -H_1 \; -H_2 \; -H_3 \; \ldots \; -H_n \; \ldots \\ \frac{1}{H_1}, -\frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_3} \; \ldots \; \frac{1}{H_n}, -\frac{1}{H_n} \; \ldots \end{array}\right\} Q$$

$(GT): \; 1, \, -$

(F1) $\xi_0 (\xi_1 \xi_2) = (\xi_0 \xi_1) \xi_2$

(F2) $\xi_0 \cdot 1 = \xi_0$

(F3) $\exists \xi_1 (\xi_0 \xi_1 = 1)$

$$|-U_{GT}| = \{I\}$$