МЛ Ганчев 08.10.14

Аксиоми: $\neg A \vee A$

Правила:

$\dfrac{A}{B \vee A}$ правило за разширението (ПР)

$\dfrac{A \vee A}{A}$ правило за съкращението (ПС)

$\dfrac{A \vee (B \vee C)}{(A \vee B) \vee C}$ правило за асоциативността (ПА)

$\dfrac{A \vee B,\ \neg A \vee C}{B \vee C}$ правило за изрязване (ПИ) (отрицанието е винаги вдясно)

(ПР): Ако $\vdash A$ то $\vdash B \vee A$, $\vdash$ - теорема

(ПС): Ако $\vdash A \vee A$ то $\vdash A$

(ПА): Ако $\vdash A \vee (B \vee C)$ то $\vdash (A \vee B) \vee C$

(ПИ): Ако $\vdash A \vee B$ и $\vdash \neg A \vee C$ то $\vdash B \vee C$

Тв1 Ако $\vdash A \vee B$ то $\vdash B \vee A$ - правило за комутативност (ПК)

Док. Нека $\vdash A \vee B$. Да разгледаме аксиомата $\neg A \vee A$. Тогава $\vdash \neg A \vee A$, което заедно с $\vdash A \vee B$ и (ПИ) $\Rightarrow \vdash B \vee A$

Тв2 Ако $\vdash A$ и $\vdash A \to B$ то $\vdash B$ (MP)

Док. Нека $\vdash A$ и $\vdash A \to B$ т.е. $\vdash \neg A \vee B$

От $\vdash A$ и (ПР) $\Rightarrow \vdash B \vee A$ и от (ПК) $\Rightarrow \vdash A \vee B$

$\vdash \neg A \vee B$ и (ПИ) $\Rightarrow \vdash B \vee B$ но (ПС) $\Rightarrow \vdash B$

Тв3 Нека $A_1 \ldots A_n$ $(n \geq 1)$ са формули и нека $i_1 \ldots i_m$ $(m \geq 1)$ са естествени числа т.ч.

мн-вото $\{i_1, \dots i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ (възможно е $m > n$)
Тогава ако $\vdash A_{i_1} \vee A_{i_2} \vee \dots \vee A_{i_m}$ то $\vdash A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n$

Забележка
(ПР) и (ПС) са частни случаи на ТВЗ
Док Индукция по m

1) $m=1$ Имаме че $\vdash A_i$ за $1 \le i \le n$
от (ПР) $\Rightarrow \vdash A_n \vee A_i$
(ПР) и (ПА) $\Rightarrow \vdash (A_{n-1} \vee A_n) \vee A_i$
$\vdash (A_{n-2} \vee (A_{n-1} \vee A_n) \vee A_i$
$\vdots$
$\vdash (A_{i+1} \vee (A_{i+2} \vee (\dots \vee A_n) \dots) \vee A_i$
Оттук и (ПК) $\Rightarrow \vdash A_i \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n$
Прилагайки (ПР) $\Rightarrow \vdash A_{i-1} \vee A_i \vee \dots \vee A_n$
$\vdots$
$\vdash A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$

2) При $m=2$ Имаме $\vdash A_j \vee A_i$
1сл) $j=i \Rightarrow$ съгласно (ПС) $\Rightarrow \vdash A_j$ и от $m=1$
$\Rightarrow \vdash A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n$
2сл) $j \neq i$. Поради наличието на (ПК) можем да считаме че $j > i$
Прилагаме (ПР) и (ПА) получаваме последователно

$\vdash A_{j-1} \vee A_j \vee A_i$
$\vdash (A_{j-1} \vee A_j) \vee A_i$
$\vdots$
$\vdash (A_{i+1} \vee (A_{i+2} \vee \dots \vee A_j) \dots) \vee A_i$ (ПК)
$\vdash A_i \vee A_{i+1} \dots \vee A_j$, Прилагайки (ПР) и (ПА) $\Rightarrow$
$\vdots$

$\vdash A_n \vee A_i \vee A_{i+1} \dots \vee A_j$

$\vdash (A_{n-1} \vee A_n) \vee A_i \vee \dots \vee A_j$

$\vdots$

$\vdash (A_{j+1} \vee (A_{j+2} \vee \dots \vee A_n) \dots) A_i \vee \dots \vee A_j$. Оттук (ПК)

$\vdash A_i \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n$. Оттук (ПР)

$\vdash A_{i-1} \vee A_i \vee A_{i+1} \dots \vee A_n$

$\vdash A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n$

Сл 3) $m \geq 3$

Имаме $\vdash A_{i_1} \vee A_{i_2} \vee \dots \vee A_{i_m}$. От (ПА)

$\vdash (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee A_{i_3} \dots \vee A_{i_m}$

Съгласно индукционното правило (предпол.)

$\vdash (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee (\underbrace{A_1 \vee A_2 \dots A_n}_{A})$. Оттук и (ПК)

$\vdash A \vee A_{i_1} \vee A_{i_2}$

Прилагайки (ПА) $\Rightarrow \vdash (A \vee A_{i_1}) \vee A_{i_2}$

Оттук и Сл2 $\Rightarrow \vdash (A \vee A_{i_1}) \vee (\underbrace{A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n}_{A})$

т.е. $\vdash (A \vee A_{i_1}) \vee A$ от (ПК) $\vdash A \vee A \vee A_{i_1}$. От (ПА)

$\vdash (A \vee A) \vee A_{i_1}$. Оттук и сл2 $\Rightarrow$

$\vdash (A \vee A) \vee \underbrace{A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n}_{A} \Rightarrow$ от (ПР)

т.е. $\vdash (A \vee A) \vee A$ - от (ПК) $\vdash A \vee (A \vee A)$.

Оттук и (ПР) $\vdash A \vee (A \vee (A \vee A))$. От (ПА)

$\vdash (A \vee A) \vee (A \vee A) \Rightarrow$ (ПС) $\vdash A \vee A$. И отново

(ПС) $\Rightarrow \underline{\vdash A}$

Общо правило (ОП) - Ако $\vdash A_{i_1} \vee A_{i_2} \dots \vee A_{i_m}$

и $\{i_1 \dots i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ то $\vdash A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n$

ТВ4 Ако $\vdash \neg A \vee C$ и $\vdash \neg B \vee C$ то $\vdash \neg(A \vee B) \vee C$.

Правилото на случаите (ПСл)

Ако $\vdash A \to C$ и $\vdash B \to C$ то $\vdash (A \vee B) \to C$

Док. Да разгледаме аксиомата $\neg(A \vee B) \vee (A \vee B)$ т.е. $\neg(A \vee B) \vee A \vee B$. Оттук и (ОП) $\Rightarrow$ $\vdash A \vee (B \vee \neg(A \vee B)) \Rightarrow \vdash \neg A \vee C$ и (ПИ) $\vdash (B \vee \neg(A \vee B)) \vee C$. От (ПК) $\vdash C \vee B \vee \neg(A \vee B)$ и от (ОП) $\Rightarrow \vdash B \vee \neg(A \vee B) \vee C$

Оттук $\vdash \neg B \vee C$ и (ПИ) $\Rightarrow \vdash (\neg(A \vee B) \vee C) \vee C$

От (ПК) $\vdash C \vee \neg(A \vee B) \vee C$ и (ОП) $\Rightarrow$ $\vdash \neg(A \vee B) \vee C$

ТВ5 Ако $\vdash A \vee B$ то $\vdash \neg\neg A \vee B$

Правило на двойно отрицание (ПДО)

Док. Нека $\vdash A \vee B$. Да разгл аксиомата $\neg\neg A \vee \neg A$ от (ПК) $\Rightarrow \vdash \neg A \vee \neg\neg A$. Оттук $\vdash A \vee B$ и (ПИ) $\Rightarrow \vdash B \vee \neg\neg A$ и (ПК) $\Rightarrow \neg\neg A \vee B$

Зад $\vdash A \to (A \vee B)$: Разгл аксиомата $\vdash \neg A \vee A$. от (ОП) $\Rightarrow \vdash \neg A \vee A \vee B$ т.е. $\vdash A \to (A \vee B)$

Зад $\vdash A \to (B \vee A)$. Разгл акс. $\vdash \neg A \vee A$. от (ОП) $\Rightarrow \vdash \neg A \vee B \vee A$ т.е. $\vdash A \to (B \vee A)$

Зад $\vdash (A \vee A) \to A$: $\vdash \neg(A \vee A) \vee (A \vee A)$. (аксиома) от (ОП) $\Rightarrow \vdash \neg(A \vee A) \vee A$ т.е. $\vdash \neg(A \vee A) \Rightarrow A$

Зад $\vdash (A \& B) \Rightarrow A = \vdash \neg A \vee A$ (аксиома). От (ОП) $\vdash \neg A \vee \neg B \vee A$. От (ПА) $\vdash (\neg A \vee \neg B) \vee A$. от (ПДО) $\Rightarrow \vdash \neg\neg(\neg A \vee \neg B) \vee A \Rightarrow \vdash (A \& B) \to A$

Дом

$\vdash A \& B \Rightarrow B$

$\vdash A \Rightarrow B \to (A \& B)$

$\vdash A$, $\vdash B$ то $\vdash A \& B$

~~Задача~~ $\vdash A \Rightarrow A$

$\vdash \neg(A \& B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

③