МЛ Ганчев 08.01.15

① $\overline{\overline{2\mathbb{N}}} = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$, където $2\mathbb{N} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$

$f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ дефинирано с $f(x) = 2x$

f е инекция: $f(x) = f(y) = 2x = 2y \to x = y$

f е сюрекция: Нека $y \in 2\mathbb{N}$. Тогава $y = 2x$ за някое $x \in \mathbb{N}$ и сл. $f(x) = y$

② $\overline{\overline{2\mathbb{N}+1}} = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$ където $2\mathbb{N}+1 = \{2x+1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

$f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}+1$ дефинирано с $f(x) = 2x+1$

③ $\overline{\overline{\mathbb{Z}}} = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$, $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ дефинирано с $f(x) = 2x$ ако $x \geq 0$ и $f(x) = -2x-1$ при $x < 0$

f е инекция. Нека $f(x) = f(y)$

1сл) $f(x) = f(y)$ е четно. Тогава $2x = 2y$ и сл. $x = y$

2сл) $f(x) = f(y)$ е нечетно. Тогава $-2x-1 = f(x) = f(y) = -2y-1$ и сл. $x = y$

f е сюрекция. Нека $y \in \mathbb{N}$

1сл) $2 \mid y$. Тогава $y = 2x$ за някое $x \geq 0$ и сл. $y = f(x)$

2сл) $2 \nmid y$. Тогава $y = 2x'+1$ за някое $x' \geq 0$

Нека положим $x = -x'-1$. Тогава $x < 0$ и $x' = -x-1$ и сл. $y = -2x-1 = f(x)$

④ $\overline{\overline{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}} = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$. Лагранж $n \in \mathbb{N} = x^2+y^2+z^2+w^2$

$f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дефинирано с $f(x,y) = 2^x 3^y$

f е инекция. Разгл. $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ дефинирано с $g(x) = (1,x)$

g е инекция. Сл. $\overline{\overline{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}} \leq \overline{\overline{\mathbb{N}}}$ и $\overline{\overline{\mathbb{N}}} \leq \overline{\overline{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}}$. Оттук $\overline{\overline{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}} = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$ по Кантор-Шрьодер

Нека $h: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дефинирано с $h(x,y) = 2^x(2y+1)-1$

h е инекция

Нека $h(x,y) = h(x',y')$. Тогава
$2^x(2y+1) = 2^{x'}(2y'+1)$. Сл $2y+1 / 2^x(2y+1)$. Но
$(2^x, 2y'+1) = 1$ (взаимно прости) $\Rightarrow 2y'+1 / 2y+1$
Аналогично $2y+1 / 2y'+1$. Отчук $2y'+1 = 2y+1 \Rightarrow y=y'$
Отчук $2^x / 2^{x'}$ и сл $x = x'$
h е сюрекция
Нека $z \in N$
1сл) $z = 0$. Тогава $z = h(0,0)$
2сл) $z > 0$. Тогава $z+1 \geq 2$. Нека $z+1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$
е разлагането на z на прости множители
$p_1 < p_2 < \dots < p_k$ и $\alpha_1 \dots \alpha_k > 0$
1сл) $p_1 > 2$. Тогава $z+1$ е нечетно и сл $z+1 = 2y+1$
за някое $y \in N$. Тогава $h(0,y) = 2^0(2y+1) - 1 \Rightarrow 2y = z$
2сл) $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ е нечетно и сл $p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = 2y+1$
за някое $y \in N$ и $p_1 = 2$. Тогава $h(\alpha_1, y) = 2^{\alpha_1}(2y+1) - 1$
$= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} - 1 = z+1-1 = z$
следствие 1. $\overline{\overline{N^m}} = \overline{\overline{N}}$ за $m \geq 1$
Док с индукция по m
1) при $m = 1$ $\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{N}}$
2) При $m \geq 1$. Нека $\overline{\overline{N^m}} = \overline{\overline{N}}$. Тогава
$\overline{\overline{N^{m+1}}} = \overline{\overline{N^m \times N}} = \overline{\overline{N \times N}} = \overline{\overline{N}}$
Следствие 2
Нека $X_0, X_1 \dots X_n \dots$ са изброими множества
т.е. $\overline{\overline{X_i}} = \overline{\overline{N}}$, за $i \in N$ са т.ч. $X_i \cap X_j = \emptyset$ за $i \neq j$

Тогава $\overline{\overline{\bigcup_{i \in N} X_i}} = \overline{\overline{N}}$
Док
Имаме че за $\forall i \in N$, $\{i\} \times N = \{(i,n) \mid n \in N\}$ е
изброимо ($f_i : N \to \{i\} \times N$ дефинирано с $f(n) = (i,n)$ е
биекция)

Оттук $\overline{\overline{\bigcup_{i\in N} X_i}} = \overline{\overline{\bigcup_{i\in N} \{i\}\times N}} = \overline{\overline{N\times N}} = \overline{\overline{N}}$

Следствие 3.

$N^{<N} = \{$всички крайни редици от естествени числа$\}$ е изброимо

$\overline{\overline{N^{<N}}} = \overline{\overline{\bigcup_{n\geq 1} N^{n}}} = \overline{\overline{N}}$

Лема. Нека T е теория с краен или изброим език с поне една константа. Тогава стандартната структура $\mathcal{U}_T$ за T е крайна или изброима.

Доказ.

Нека $\mathcal{L}(T)$ има крайно много или изброимо много нелогически символи. Тогава, т.к. $\mathcal{L}(T)$ има изброимо много променливи и краен брой логически символи, термовете на езика на T са крайни редици от символи на $\mathcal{L}(T)$ и сл. термовете на $\mathcal{L}(T)$ са изброимо много. Сл. мн-вото C_T от затворени термове на $\mathcal{L}(T)$ е крайно или изброимо. От друга страна $|\mathcal{U}_T| = C_T/\sim$. Оттук $|\mathcal{U}_T| \leq C_T$ и сл. $|\mathcal{U}|$ е крайно или изброимо множество.

Лема 2

Нека T е непротиворечива и $\mathcal{U}$ е моделът на T от Th за пълнота. Ако $\mathcal{L}(T)$ е краен или изброим, то $|\mathcal{U}|$ е крайно или изброимо.

~~1(a) ... ~~

Th (Льовенхайм – Сколем). Нека T е теория с краен или изброим език и нека T има безкраен модел. Тогава T има изброим модел.

Док.

Нека T' се получава от T, добавяйки нови константи c_i за $\forall i \in \mathbb{N}$.

Нека $\Gamma = \{c_i \neq c_j \mid i \neq j\}$. Да разгл. едно крайно $\Gamma' \subseteq \Gamma$ множество и нека е т.ч. за $\forall i \geq n$ c_i не участва във ф-ла от Γ'. Нека $\mathcal{U} \models T$ е безкраен модел. Нека $a_0, a_1 \dots a_n$ са различни на $|\mathcal{U}|$. Обогатяваме $\mathcal{U}$ до структура за $\mathcal{L}(T')$, полагайки

$$\mathcal{U}'(c_i) = \begin{cases} a_i & i < n \\ a_n & i \geq n \end{cases}$$

. Ясно е че $\mathcal{U}' \models T$. Нека $c_i \neq c_j \in \Gamma'$. Тогава $i, j < n$, $i \neq j$ и са $\mathcal{U}'(c_i \neq c_j) \equiv T$. ($\mathcal{U}'(c_i) = a_i \neq a_j = \mathcal{U}'(c_j)$)

Оттук $\mathcal{U}' \models T'[\Gamma']$

модел на T' разширено с Γ'

От Th за компактност $T'[\Gamma^*]$ е непротиворечива. При това езикът на тази теория $\mathcal{L}(T'[\Gamma^*])$ е изброим. Оттук $T'[\Gamma^*]$ има модел $\mathcal{U}'_\infty$, който е краен или изброим. Но $\vdash_{T'[\Gamma]} c_i \neq c_j$ за $i \neq j$ и са $T'[\Gamma]$ няма краен модел. Оттук $\mathcal{U}'_\infty$ е изброим. Нека $\mathcal{U}_\infty$ е обедняването на $\mathcal{U}'_\infty$ до структура за $\mathcal{L}(T)$. Т.к. $\mathcal{U}' \models T'$, $\mathcal{U} \models T$ и $\mathcal{U}$ е изброим