~~[illegible]~~ МЛ Ганчев 07.03.15

Лема. Нека T е теория, съдържаща константи c_i за $i \in \mathbb{N}$. Ако $\vdash_T c_i \neq c_j$ за $i \neq j$, то T няма крайни модели.

Док.

Нека $\mathcal{U} \models T$ и нека $\mathcal{U}(c_i) = a_i \in |\mathcal{U}|$. Тъй като $\vdash_T c_i \neq c_j$, $\mathcal{U}(c_i \neq c_j) = \Pi$ значи $a_i \neq a_j$ за $i \neq j$. Оттук $|\mathcal{U}|$ не е краен, тъй като $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ е безкрайно подмножество на $|\mathcal{U}|$.

Th

Нека T е теория, такава че за $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ $\mathcal{U} \models T$, съдържащ поне n елемента. Тогава T има безкраен модел.

Док.

Нека c_i за $i \in \mathbb{N}$ са нови константи и нека T' се получава от T, добавяйки константите c_i за $i \in \mathbb{N}$. Нека $\Gamma = \{c_i \neq c_j \mid$ за $i \neq j\}$. Да разгледаме $T'[\Gamma]$. Нека $\Gamma' \subseteq \Gamma$ е крайно подмножество. Нека n е т.ч. константа c_n не участва във формулите от Γ'. Нека $\mathcal{U} \models T$ с поне n елемента. Разширяваме $\mathcal{U}$ до структура за $\mathcal{L}(T')$. Нека $a_0, a_1, \dots a_n$ са различни елементи на $|\mathcal{U}|$. Разширяваме структурата $\mathcal{U}$ до структура $\mathcal{U}'$ за $\mathcal{L}(T')$ полагайки $\mathcal{U}'(c_i) = \begin{cases} a_i & i < n \\ a_n & i \geq n \end{cases}$. Тогава $\mathcal{U}' \models T'$ и освен това ако $c_i \neq c_j$ е елемент на Γ', то тогава и двете $i,j < n$ и са $a_i \neq a_j$, откъдето $\mathcal{U}'(c_i \neq c_j) = \Pi$. Са $\mathcal{U}' \models \Gamma'$. Така за всяко $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $T'[\Gamma']$ има модел, т.е. $T'[\Gamma']$ е непротиворечива и са

$T'[\Gamma']$ също е непротиворечива (Т. за компактност)
Нека $\mathcal{U}'_\infty \models T'[\Gamma']$. Съгласно лемата $\mathcal{U}'_\infty$ не е празен. Нека $\mathcal{U}_\infty$ е обединяването на $\mathcal{U}'_\infty$ до структурата за $\mathcal{L}(T)$. Тогава $\mathcal{U}_\infty \models T$ и $\mathcal{U}_\infty$ не е празен.

Следствие. Нека T е теория, която няма безкраен модел. Тогава $\exists n \in \mathbb{N}$ т.ч. ако $\mathcal{U} \models T$ то в $\mathcal{U}$ има по-малко от n-елемента

Задача

Да се напише ф/ла A_n т.ч. от $\mathcal{U} \models A$ да следва че в $\mathcal{U}$ има поне n-елемента

$n=2 \quad \exists x_0 \exists x_1 (x_0 \neq x_1)$

$n=3 \quad \exists x_0 \exists x_1 \exists x_2 (x_0 \neq x_1 \,\&\, x_1 \neq x_2 \,\&\, x_0 \neq x_2)$

$\vdots$

$n: \quad \exists x_0 \ldots \exists x_{n-1} \underset{0 \le i < j \le n-1}{\&} x_i \neq x_j$

Задача

Да се напише ф/ла B_n, т.ч. от $\mathcal{U} \models B_n$ да следва че в $\mathcal{U}$ има най-много n елемента

$n=1 \quad \forall x_0 \forall x_1 (x_0 = x_1)$

$n=2 \quad \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 (x_0 = x_1 \vee x_1 = x_2 \vee x_0 = x_2)$

$\vdots$

$n: \quad \forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_n \bigvee_{0 \le i < j \le n} x_i = x_j$

$\mathcal{U} \models A_n \,\&\, B_n$ – в $\mathcal{U}$ има точно n елемента

т.е. при $n=2$: $\exists x_0 \exists x_1 (x_0 \neq x_1) \,\&\, \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 (x_0 = x_1 \vee x_0 = x_2 \vee x_1 = x_2)$

Същото нещо можем да изкажем и чрез

$$\exists x_0 \exists x_1 (x_0 \neq x_1 \,\&\, \forall x_2 (x_0 = x_2 \vee x_1 = x_2))$$

Забележка. Ако T няма безкраен модел, то $\models B_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$

Деф Ще казваме че един език е краен т.е ако в него има краен брой нелогически символи. В противен случай казваме, че езикът е безкраен. Ако в езика има изброимо много нелогически символи, то казваме че езикът е изброим

Деф Нека X и Y са множества. Казваме че X е равномощно на Y ($\|X\|=\|Y\|$, $\bar{\bar{X}}=\bar{\bar{Y}}$), ако $\exists$ биекция м/у X и Y

Лема

(1) $\bar{\bar{X}}=\bar{\bar{X}}$, (2) $\bar{\bar{X}}=\bar{\bar{Y}} \Rightarrow \bar{\bar{Y}}=\bar{\bar{X}}$, (3) $\bar{\bar{X}}=\bar{\bar{Y}}$ и $\bar{\bar{Y}}=\bar{\bar{Z}} \Rightarrow \bar{\bar{X}}=\bar{\bar{Z}}$

Док

(1) $id_X : X \to X$, $id_X(x)=x$

(2) $g: X \to Y$ е биекция, то $g^{-1}: Y \to X$ е биекция

(3) $f: X \to Y$ биекция и $g: Y \to Z$ биекция, то $g \circ f : X \to Z$ е биекция

Деф

Казваме че мощността на X е по-малка или равна на мощността на Y ($\bar{\bar{X}} \le \bar{\bar{Y}}$), ако $\exists$ инекция от X в Y

Лема

Нека $Z \subseteq X$ и $\bar{\bar{X}} \le \bar{\bar{Z}}$. Тогава $\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{Z}}$

Док

Нека $f: X \to Z$ е инекция. Нека разгл. $X_0, X_1 \ldots X_n \ldots$ и $Z_0, Z_1 \ldots Z_n \ldots$, дефинирани с $X_0 = X$, $X_{n+1} = f(X_n)$ и $Z_0 = Z$ и $Z_{n+1} = f(Z_n)$

1) $X_0 \supseteq Z_0 \supseteq X_1 \supseteq Z_1 \ldots \supseteq X_n \supseteq Z_n \ldots$ С индукция по n

а) $X_0 \supseteq Z_0$ и $f(X_0) = f(X) \subseteq Z = Z_0$ т.е. $X_0 \supseteq Z_0 \supseteq X_1$

б) Нека $X_n \supseteq Z_n \supseteq X_{n+1}$. Тогава $f(X_n) \supseteq f(Z_n) \supseteq f(X_{n+1})$

т.е. $X_{n+1} \supseteq Z_{n+1} \supseteq X_{n+1}$

2) $X_{n+1}\setminus Z_{n+1} = f(X_n\setminus Z_n)$

а) $f(X_n\setminus Z_n) \subseteq X_{n+1}\setminus Z_{n+1}$. Нека $y\in f(X_n\setminus Z_n)$. Тогава $y=f(x)$ за някое $x\in X_n$ и $x\notin Z_n$. От $x\in X_n$ следва че $y=f(x)\in f(X_n)=X_{n+1}$. Да допуснем че $y\in Z_{n+1}$. Тогава $y=f(x')$ за някое $x'\in Z_n$. Оттук $f(x)=y=f(x')$ за $x\in Z_n$ и $x'\notin Z_n$, откъдето $x\neq x'$ и сл. f не е инекция ↯. Сл. $y\notin Z_{n+1}$.
Сл. $y\in X_{n+1}\setminus Z_{n+1}$

б) $X_{n+1}\setminus Z_{n+1} \subseteq f(X_n\setminus Z_n)$. Нека $y\in X_{n+1}\setminus Z_{n+1}$ т.е. $y=f(X_n)$ и $y\notin f(Z_n)$. Тогава $y=f(x)$ за някое $x\in X_n$ т.к. $f(x)\notin f(Z_n)$, $x\notin Z_n$ и сл. $x\in X_n\setminus Z_n$ оттук $y=f(x)\in f(X_n\setminus Z_n)$

Да разгл. $g: X\to Z$, дефинираме с

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{за } x\in X_n\setminus Z_n \\ x, & \text{иначе}\end{cases}$$

(3) g е инекция. Нека $x_1, x_2\in X$ са т.ч. $g(x_1)=g(x_2)$

1сл. $x_1\in X_n\setminus Z_n$. Тогава $g(x_1)\in X_{n+1}\setminus Z_{n+1}$. Тогава $g(x_2)\in X_{n+1}\setminus Z_{n+1}$, откъдето $x_2\in X_n\setminus Z_n$. Наистина ако $x_2\notin X_k\setminus Z_k$ за някое k, то $g(x_2)=x_2$ и сл. $g(x_2)\notin X_{n+1}\setminus Z_{n+1}$. Оттук $f(x_1)=g(x_1)=g(x_2)=f(x_2)$ и сл. $x_1=x_2$

2сл. $x_1\notin X_n\setminus Z_n$ за $\forall n$. Тогава $g(x_1)=x_1=g(x_2)$. Ако допуснем че $x_2\in X_k\setminus Z_k$ за някое k, то тогава $x_1=g(x_2)\in X_{k+1}\setminus Z_{k+1}$ за някое k, откъдето ↯ с избора на x_1. Сл. $x_2\notin X_n\setminus Z_n$ за $\forall n$ и сл. $g(x_2)=x_2$. Оттук $x_1=g(x_1)=g(x_2)=x_2$ т.е. g е инекция □

(4) g е сюрекция. Нека $y \in Z$ (ясно е, че $y \notin X_0 \setminus Z_0$)

1сл. $y \in X_{n+1} \setminus Z_{n+1}$ за някое n. Тогава съгласно (2) $y = f(x)$ за някое $x \in X_n \setminus Z_n$ и значи $g(x) = y$

2сл. $y \in X_{n+1} \setminus Z_{n+1}$ за всяко n. Тогава $g(y) = y$

Th (Кантор - Шрьодер - Бернщайн)

Нека $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$ и $\overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}}$. Тогава $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$

Док.

Нека $f: X \to Y$ и $g: Y \to X$ са инекции. Нека $Z = g(Y)$. Тогава $Z \subseteq X$ и $g \circ f: X \to Z$ е инекция. Оттук и лемата $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Z}}$. Но $g: Y \to Z$ е биекция и значи $\overline{\overline{Z}} = \overline{\overline{Y}}$. Оттук $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$

Следствие

(1) $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{X}}$

(2) $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$ и $\overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}} \Rightarrow \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$

(3) $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}}$ и $\overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{Z}} \Rightarrow \overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Z}}$

Пример

(1) $\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \overline{\overline{2\mathbb{N}}}$

(2) $\overline{\overline{2\mathbb{N}}} = \overline{\overline{2\mathbb{N}+1}}$

(3) $\overline{\overline{\mathbb{Z}}} = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$

(4) $\overline{\overline{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}} = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$

(5) $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$

(6) $\overline{\overline{\mathbb{N}}} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}}}$, $\overline{\overline{\mathbb{R}}} \not\leq \overline{\overline{\mathbb{N}}}$