МЛ 3.12.14

(3сл) Ф-лата $A \simeq \neg B$ за някое затворено B. Тогава
$\mathcal{U}_T \models A \iff \mathcal{U}_T \not\models B \underset{и.п}{\iff} \not\vdash_T B \underset{T\ е\ пълно}{\iff} \vdash_T \neg B$

(4сл) $A \simeq \exists x B$. Нека първо $\mathcal{U}_T \models \exists x B$. Тогава $\mathcal{U}(B_x[\mathrm{i}_\alpha]) = \mathbb{T}$ за някое $\alpha \in |\mathcal{U}_T|$. Нека a е затворен терм т.с. $\alpha \equiv \bar{a}$. Тогава $\mathcal{U}(a) \equiv \alpha$ и значи $\mathcal{U}_T(B_x[a]) \equiv \mathbb{T}$. Но $B_x[a]$ е затворено $\Rightarrow \mathcal{U} \models B_x[a] \Rightarrow \vdash_T B_x[a]$. От друга страна $\vdash_T B_x[a] \to \exists x B$ (аксиома) и значи $\vdash_T \exists x B$.
Обратно. Нека $\vdash_T A$. Тъй като T е хенкинова $\vdash_T \exists x B \to B_x[c]$ за някоя const c и значи $\vdash_T B_x[c]$. Тогава $\mathcal{U}_T \models B_x[c]$ и сл. $\mathcal{U}(B_x[c]) \equiv \mathbb{T}$. Нека $\alpha \equiv \mathcal{U}_T(c)$. Тогава $\mathcal{U}_T(B_x[\mathrm{i}_\alpha]) \equiv \mathbb{T}$ откъдето $\mathcal{U}_T(\exists x B) \equiv \mathbb{T}$ и значи $\mathcal{U}_T \models \exists x B$ □

Деф Нека $\mathcal{L}$ е език от първи ред. Дефинираме специалната константа за затворената формула $\exists x B$ от $\mathcal{L}$ да бъде $H_{\exists x B}$. Рангът на $H_{\exists x B} = 0$. Нека сега $\exists x B$ е затворена формула, образувана от символите на $\mathcal{L}$ и специални константи от ранг най-много $k \geq 0$, като $\exists x B$ съдържа поне една специална константа от ранг k. Дефинираме специалната константа от $\exists x B$ да бъде $H_{\exists x B}$ и полагаме рангът на $H_{\exists x B}$ да бъде $k+1$.
Ако c е специална константа за $\exists x B$, то ф/лата $\exists x B \to B_x[c]$ наричаме специална аксиома за c

Лема 2 Нека T е теория и T_H се получава от T, прибавяйки всички специални константи за $\mathcal{L}(T)$ и всички специални аксиоми. Тогава T_H е консервативно разширение на T

Док. Нека T' се получава от T, добавяйки само специалните константи. Тогава T' е консервативно разш. на T (Th за константите). Нека Γ е множеството от всички специални аксиоми в частност T_H е $T'[\Gamma]$. Нека A е ф/ла от $\mathcal{L}(T)$ и $\vdash_{T} A$. Тогава $\vdash_{T'} A_1 \to A_2 \to \dots \to A_n \to A$ за някои специални аксиоми $A_1 \dots A_n$ (Th за редукц.) Ако $n=0$, $\vdash_{T'} A$. Нека сега $n>0$. Без ограничение A_1 е специална аксиома за специалната ~~...~~ константа c, която е със възможно най-голям ранг и сред специалните константи, участващи в $A_1, \dots, A_n$. Тогава $A_1 \equiv \exists x B \to B_x[c]$ и c не участва в B, не участва в $A_2, \dots$, не участва в A_n и в A. Нека y е нова променлива. Тогава $\vdash_{T'} (\exists x B \to B_x[y]) \to$ $\to A_2 \to \dots \to A_n \to A$. (Th за const) Тъй като y е нова то тя не участва в $A_2 \dots A_n$ и A и сл.
$\vdash_{T'} \exists y (\exists x B \to B_x[y]) \to A_2 \to \dots \to A_n \to A$. Но
$\vdash_{T'} \exists y (\exists x B \to B_x[y]) \leftrightarrow (\exists x B \to \exists y B_x[y])$ (изнасяне на кванторите) и значи $\vdash_{T'} (\exists x B \to \exists y B_x[y]) \to A_2 \to \dots \to A_n \to A$
Но $\vdash_{T'} \exists x B \to \exists y B_x[y]$ (Th за вариантите), откъдето $\vdash_{T'} A_2 \to \dots \to A_n \to A$. Повтаряйки това разсъждение още $n-1$ пъти, получаваме $\vdash_{T'} A$. Оттук $\vdash_T A$
$\triangleleft$ (T' е консервативно разширение)

Деф Нека $F (\neq \emptyset)$. Ще казваме че F е с краен характер, ако за всяко множество X, $X \in F \iff$ за всяко крайно $Y \subseteq X$, $Y \in F$

Th (Тайхмюлер-Тюки):
Нека F има краен характер. Тогава в F има максимален елемент по отношение $\subseteq$.

Лема 3. Нека T е непротиворечива теория. Тогава T има пълно разширение.

Док.

Нека $F_T = \{\Gamma \mid \Gamma$ е множество от затворени ф/ли на $\mathcal{L}(T)$ т.ч. $T[\Gamma]$ е непротиворечива$\}$

$F_T \neq \emptyset$ $(\emptyset \in F_T)$. $\underline{F_T \text{ има краен характер}}$

(1) Ясно е че ако $\Gamma \in F_T$ т.е. $T[\Gamma]$ е непротиворечива, то $T[\Gamma']$ е непротиворечива за $\forall \Gamma' \subseteq \Gamma$. Тогава $\Gamma' \in F_T$

(2) Нека сега Γ е множество от затворени ф/ли т.ч. всяко крайно $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Gamma' \in F_T$. Да допуснем че $\Gamma \notin F_T$. Тогава $\vdash_T \neg A_1 \vee \neg A_2 \dots \vee \neg A_n$ за някои $A_1, \dots, A_n \in \Gamma$ (Тh за редукциите). Нека $\Gamma' = \{A_1 \dots A_n\}$. Тогава $T[\Gamma']$ е противоречива и значи $\Gamma' \notin F_T$. Но $\Gamma' \subseteq \Gamma$ (Γ' е крайно) $\Rightarrow$ ↯

Нека Γ_M е максимален по отношение на $\subseteq$ елемент на F_T. Твърдим че $\underline{T[\Gamma_M] \text{ е пълно}}$

Нека A е затворена ф/ла от $\mathcal{L}(T)$ и нека $\nvdash A$. Тогава $T[\Gamma_M \cup \{A\}]$ е непротиворечива (Тh за редукциите). Оттук и максималността, и $\Gamma_M = \Gamma_M \cup \{A\}$, т.е. $A \in \Gamma_M \Rightarrow \vdash_{T[\Gamma_M]} A$

Тh. Нека T е непротиворечива. Тогава T има модел

Док. Нека T_H е както в лема 2. Тогава T_H е непротиворечива (Тh за консервативно разширение). Нека T' е пълно разширение на T_H (лема 3). Нека $\mathcal{U}'$ е стандартната структура за T', а $\mathcal{U}$ е обеднението на $\mathcal{U}'$ до $\mathcal{L}(T)$. $\underline{\mathcal{U} \models T}$. Нека A е аксиома на T със свободни променливи $x_1 \dots x_n$

и нека $A' \simeq \forall x_1 \dots \forall x_n A$. Тогава $\vdash_T A'$ (A' е универсално затваряне на A) и сл. $\vdash_{T} A'$. Оттук $\mathcal{U}' \models A'$ (лема 1) и значи $\mathcal{U} \models A'$. Тогава $\mathcal{U}(A_{x_1 \dots x_n}[k_{\alpha_1} \dots k_{\alpha_n}]) \equiv И$ за $\forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in |\mathcal{U}|$ и сл. $\mathcal{U} \models A$

Th (Теорема за пълнота): Нека T е теория и A е ф-ла от $\mathcal{L}(T)$. Тогава ако за $\forall \mathcal{U} \models T$ е в сила $\mathcal{U} \models A$ то $\vdash_T A$

Док.

Нека A и T са както в условието и нека свободните променливи на A са $x_1 \dots x_n$. Нека A' е затварянето на A за $\forall x_1 \dots x_n$. Да допуснем че $\nvdash_T A$. Тогава $T[\neg A']$ е непротиворечива теория и значи има модел $\mathcal{U}$. Тогава $\mathcal{U} \models T$ и $\mathcal{U} \models \neg\forall x_1 \dots \forall x_n A$. Оттук $\mathcal{U}(A_{x_1 \dots x_n}[k_{\alpha_1} \dots k_{\alpha_n}]) \equiv Л$ за някои $\alpha_1 \dots \alpha_n \in |\mathcal{U}|$ и значи $\mathcal{U} \not\models A \Rightarrow ↯$ следователно $\vdash_T A'$ откъдето $\vdash_T A$

Зад 1 Да се намери стандартната структура за PA, $\mathcal{U}_{PA}$

(1) $|\mathcal{U}_{PA}| = C_{PA}/\sim$

$C_{PA}: 0, S0, SS0, \dots, SS0+S0, ((SS0+SS0)\cdot(S0+S0))\cdot S0$

Нека за $n \in \mathbb{N}$ със H_n означим термът $\underbrace{SS\dots S}_{n}0$

Тогава $SH_n \simeq H_{n+1}$. При това

(1) $\vdash_{PA} H_m + H_n = H_{m+n}$, (2) $\vdash_{PA} H_m \cdot H_n = H_{m\cdot n}$

(1) Индукция по $n \in \mathbb{N}$

(i) $n=0 \Rightarrow \vdash_{PA} H_m + 0 = H_m$ (N3)(ПЕСл)

(ii) $n \geq 0 \Rightarrow \vdash_{PA} H_m + H_n = H_{m+n}$. Тъй като $H_{n+1} = SH_n \Rightarrow$ $\vdash_{PA} H_m + H_{n+1} = S(H_m + H_n)$ (N4)(ПЕСл) Оттук $\vdash_{PA} H_m + H_{n+1} = H_{m+n+1}$

② Аналогично

Тогава за $\forall$ затворен терм a, $\exists n \in \mathbb{N}$ т.ч. $\vdash_{PA} a = H_n$

Индукция по a

(i) $a \simeq 0 \Rightarrow \vdash_{PA} H_0 = 0$ (Тк за равенството)

(ii) $a \simeq Sb$ - Нека по индукционно предположение $\vdash_{PA} b = H_m$ - Тогава $\vdash_{PA} a = H_{m+1}$

(iii) $a \simeq b + c$. Нека $\vdash_{PA} b = H_m$, $\vdash_{PA} c = H_k$. Тогава $\vdash_{PA} a = H_{m+k}$

(iv) $a \simeq bc$. Нека $\vdash_{PA} b = H_m$, $\vdash_{PA} c = H_k$. Тогава $\vdash_{PA} a = H_{mk}$

Оттук $|\mathcal{U}_{PA}| = C_{PA}/\sim = \{\bar{a} \mid a \in C_{PA}\} = \{\overline{H_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$!

(2) $S^{\mathcal{U}_{PA}} : S^{\mathcal{U}_{PA}}(\overline{H_n}) \overset{def}{=} \overline{SH_n} = \overline{H_{n+1}}$

$+^{\mathcal{U}_{PA}} : \overline{H_n} +^{\mathcal{U}_{PA}} \overline{H_m} \overset{def}{=} \overline{H_n + H_m} = \overline{H_{n+m}}$

$\cdot^{\mathcal{U}_{PA}} : \overline{H_n} \cdot^{\mathcal{U}_{PA}} \overline{H_m} \overset{def}{=} \overline{H_n H_m} = \overline{H_{nm}}$

$m < n \Leftrightarrow \vdash_{PA} H_m < H_n$, $m = n \Leftrightarrow \vdash_{PA} H_m = H_n$

$m \neq n \Leftrightarrow \vdash_{PA} H_m \neq H_n$. $\mathcal{U}_{PA} \cong \mathbb{N}$ - изоморфна

⑤