МЛ 02.12.14 Ганчев

Лема: $\mathcal{A} \models y_1 = y_{n+1} \to \dots \to y_n = y_{2n} \to$
$f y_1 \dots y_n = f y_{n+1} \dots y_{2n}$

За всеки n-местен функционален символ f
(интерпретиран в $\mathcal{A}$)

Док:
Нека $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \dots \alpha_{2n} \in |\mathcal{A}|$ и нека
$\mathcal{A}(\theta_{\alpha_1} = \theta_{\alpha_{n+1}}) \equiv \dots \equiv \mathcal{A}(\theta_{\alpha_n} = \theta_{\alpha_{2n}}) = T$
Тогава $\alpha_1 = \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_n = \alpha_{2n}$, откъдето
$f_{\mathcal{A}}(\alpha_1 \dots \alpha_n) \equiv f_{\mathcal{A}}(\alpha_{n+1} \dots \alpha_{2n})$ и следователно
$\mathcal{A}(f\theta_{\alpha_1} \dots \theta_{\alpha_n}) = \mathcal{A}(f\theta_{\alpha_{n+1}} \dots \theta_{\alpha_{2n}})$. Оттук и
$\mathcal{A} \models y_1 = y_{n+1} \to \dots \to y_n = y_{2n} \to f y_1 \dots y_n = f y_{n+1} \dots y_{2n}$

Лема $\mathcal{A} \models y_1 = y_{n+1} \to \dots \to y_n = y_{2n} \to p y_1 \dots y_n \to p y_{n+1} \dots y_{2n}$
за всеки n-местен предикатен символ p
(различен от =)

Док:
Нека $\alpha_1 \dots \alpha_{2n} \in |\mathcal{A}|$ са такива че
$\mathcal{A}(\theta_{\alpha_1} = \theta_{\alpha_{n+1}}) \equiv \dots \equiv \mathcal{A}(\theta_{\alpha_n} = \theta_{\alpha_{2n}}) = \mathcal{A}(p\theta_{\alpha_1} \dots \theta_{\alpha_n}) = T$
Тогава $\alpha_1 = \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_n = \alpha_{2n}$ и $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \in p_{\mathcal{A}}$. Оттук
$(\alpha_{n+1} \dots \alpha_{2n}) \in p_{\mathcal{A}}$, откъдето $\mathcal{A}(p\theta_{\alpha_{n+1}} \dots \theta_{\alpha_{2n}}) = T$
Сл. $\mathcal{A} \models y_1 = y_{n+1} \to \dots \to y_n = y_{2n} \to p y_1 \dots y_n \to p y_{n+1} \dots y_{2n}$

Деф Нека T е теория, а $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}(T)$. Ще казваме че $\mathcal{A}$ е модел на T, $\mathcal{A} \models T$, ако за всяка нелогическа аксиома A на T, е изпълнено $\mathcal{A} \models A$

Th (за валидност). Нека $\mathcal{A} \models T$. Тогава за всяка формула A от $\mathcal{L}(T)$, ако $\vdash_T A$ то $\mathcal{A} \models A$

~~Док~~ Нека $\vdash_T A$. Ще докажем че $\mathcal{U} \models A$ чрез индукция по извода в T

(1) A е аксиома на T. Ако A е логическа — доказано е в предните лекции. Ако A е нелогическа — следва от $\mathcal{U} \models T$

(2) $A \simeq B \vee C$ и е получена от теоремата C чрез (ПР). Нека A има свободни променливи измежду $x_1 \ldots x_n$ (две по две различни). Тогава B и C също са със свободни променливи измежду $x_1 \ldots x_n$. Нека $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in |\mathcal{U}|$. Тъй като $\vdash_T C$, в сила е $\mathcal{U} \models C$ (по индукционно предположение) и значи $\mathcal{U}(C_{x_1 \ldots x_n}[\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n]) \equiv \Pi$. Оттук
$\mathcal{U}(A_{x_1 \ldots x_n}[\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n]) \equiv \mathcal{U}(B_{x_1 \ldots x_n}[\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n] \vee C_{x_1 \ldots x_n}[\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n])$
$\equiv H_\vee(\mathcal{U}(B_{x_1 \ldots x_n}[\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n]), \Pi) \equiv \Pi$. Следователно $\mathcal{U} \models A$

Ако A е ~~пр~~ получено чрез (ПС), (ПА) или (ПИ) се разсъждава аналогично (случаи (3), (4), (5))

(6) $A \simeq \exists x B \to C$ за някоя теорема $B \to C$ на T за която x не се съдържа свободно в C. Нека A има свободни променливи измежду $x_1 \ldots x_n$ (2 по 2 различни) (x не е сред тях). Тогава свободните променливи на B са измежду $x_1 \ldots x_n, x$, а тези на C са измежду $x_1 \ldots x_n$. Нека $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in |\mathcal{U}|$, са т.ч. $\mathcal{U}(\exists x B_{x_1 \ldots x_n}[\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n]) \equiv \Pi$
Тогава $\mathcal{U}(B_{x_1 \ldots x_n, x}[\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}]) \equiv \Pi$ за някое $\alpha \in |\mathcal{U}|$
т.к. $\vdash_T B \to C$, в сила е $\mathcal{U} \models B \to C$ (инд. предп.)
Сл. $\mathcal{U}(C_{x_1 \ldots x_n}[\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n]) \equiv \Pi$. Оттук
$\mathcal{U}(A_{x_1 \ldots x_n}[\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n]) \equiv \Pi$ и следователно $\mathcal{U} \models A$

A е формула от $\mathcal{L}(T)$. Тогава
$\vdash_{T[\Gamma]} A \iff \vdash_T A_1 \to A_2 \to \dots \to A_n \to A$ за някои
затваряния $A_1 \dots A_n$ на формули от Γ

Деф Ще казваме че теорията T е непротиворечива ако $\exists$ формула A от $\mathcal{L}(T)$ за която $\nvdash_T A$, в противен случай, казваме че T е противоречива

Тв. Нека T е теория. Тогава следните са еквивалентни
(1) T е противоречива
(2) $\vdash_T A$ за всяка формула от $\mathcal{L}(T)$
(3) $\vdash_T A$ и $\vdash_T \neg A$ за някоя формула A от $\mathcal{L}(T)$
(4) $\vdash_T A$ и $\vdash_T \neg A$ за всяка формула A от $\mathcal{L}(T)$
(5) $\vdash_T A \& \neg A$ за някоя формула A от $\mathcal{L}(T)$

Th (за редукцията на противоречивостта)
Нека T е теория и Γ е множество от формули от $\mathcal{L}(T)$ $(\Gamma \neq \emptyset)$. Тогава $T[\Gamma]$ е противоречива $\iff$ $\vdash_T \neg A_1 \vee \neg A_2 \dots \vee \neg A_n$ за някои затваряния $A_1 \dots A_n$ на формули от Γ

Теорема на Гьодел за пълнота

Деф Нека T е теория (от първи ред) и нека $\mathcal{L}(T)$ съдържа поне една константа. Дефинираме стандартна структура $\mathfrak{U}_T$ за T чрез:

(1) $|\mathfrak{U}_T|$. Нека C е множество от всички затворени термове на $\mathcal{L}(T)$. (C е непразно

$\vdash_T A \Rightarrow \forall \mathcal{U} (\mathcal{U} \models T \Rightarrow \mathcal{U} \models A)$
$\rightarrow$ Th за вярност, а $\leftarrow$ Th за пълнота

Тв. Нека $\mathcal{L}$ е език от първи ред и $\mathcal{L}'$ разширява $\mathcal{L}$. Нека $\mathcal{U}'$ е структура за $\mathcal{L}'$. Дефинираме структура $\mathcal{U}$ за $\mathcal{L}$ чрез:
(1) $|\mathcal{U}| = |\mathcal{U}'|$
(2) за всеки n-местен функционален символ f на $\mathcal{L}$
$f_{\mathcal{U}} = f_{\mathcal{U}'}$
(3) за всеки n-местен предикатен символ p на $\mathcal{L}$ (различен от $=$) $p_{\mathcal{U}} = p_{\mathcal{U}'}$
Тогава за всяка формула A от $\mathcal{L}$
$\mathcal{U} \models A \Leftrightarrow \mathcal{U}' \models A$. Казваме че $\mathcal{U}$ е стесняване на $\mathcal{U}'$ до $\mathcal{L}$

Деф Нека A е формула със свободни променливи $x_1 \dots x_n$. Под (универсално) затваряне на A ще разбираме формулите от вида $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A$
В сила е следното твърдение
Тв. Нека T е теория, A е формула от $\mathcal{L}(T)$ и A' е затваряне на A. Тогава $\vdash_T A \Leftrightarrow \vdash_T A'$
Док
Нека $A' \equiv \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A$
$\rightarrow$ Нека $\vdash_T A$. Тогава $\vdash_T \forall x_n A$ (ПО). Са $\vdash_T \forall x_{n-1} \forall x_n A$ (ПО). ... $\vdash_T \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A$ (ПО)
$\leftarrow$ Нека $\vdash_T A'$ т.е. $\vdash_T \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A$. Имаме $\vdash_T \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A \rightarrow A$ (т ССп). Оттук $\vdash_T A$ (МР)

Th (за редукцията). Нека T е теория, а Γ е множество от формули от $\mathcal{L}(T)$ и нека

A е формула от $\mathcal{L}(T)$. Тогава
$\vdash_{T[\Gamma]} A \Longleftrightarrow \vdash_T A_1 \to A_2 \to \dots \to A_n \to A$ за някои
затваряния $A_1 \dots A_n$ на формули от Γ

Деф Ще казваме че теорията T е непротиворечива ако $\exists$ формула A от $\mathcal{L}(T)$ за която $\not\vdash_T A$, в противен случай, казваме че T е противоречива

Тв. Нека T е теория. Тогава следните са еквивалентни
(1) T е противоречива
(2) $\vdash_T A$ за ~~∀~~ всяка формула от $\mathcal{L}(T)$
(3) $\vdash_T A$ и $\vdash_T \neg A$ за някоя формула A от $\mathcal{L}(T)$
(4) $\vdash_T A$ и $\vdash_T \neg A$ за всяка формула A от $\mathcal{L}(T)$
(5) $\vdash_T A \& \neg A$ за някоя формула A от $\mathcal{L}(T)$

Th (за редукцията на противоречивостта)
Нека T е теория и Γ е множество от формули от $\mathcal{L}(T)$ $(\Gamma \neq \emptyset)$. Тогава $T[\Gamma]$ е противоречива $\Longleftrightarrow$
$\vdash_T \neg A_1 \vee \neg A_2 \dots \vee \neg A_n$ за някои затваряния $A_1 \dots A_n$ на формули от Γ

Теорема на Гьодел за пълнота

Деф Нека T е теория (от първи ред) и нека $\mathcal{L}(T)$ съдържа поне една константа. Дефинираме стандартна структура $\mathcal{U}_T$ за T чрез:

(1) $|\mathcal{U}_T|$. Нека C е множество от всички затворени термове на $\mathcal{L}(T)$. (C е непразно

т.к. в $\mathcal{L}(T)$ има поне една константа)

В C въвеждаме релация $\sim$ чрез $a \sim b \Leftrightarrow$ $\vdash_T a = b$. Съгласно $(T=)$ $\vdash_T a = a$, $\vdash_T a = b \to b = a$, $\vdash_T a = b \to b = c \to a = c$ и сл. $\sim$ е релация на еквивалентност. Полагаме $|U_T| = C/\sim$. Ако $a \in C$ с $\bar{a}$ ще означаваме класът на еквивалентност породен от a, т.е. $\bar{a} = \{b \in C \mid a \sim b\}$. В частност $|U_T| = \{\bar{a} \mid a \in C\}$

(2) Нека f е n-местен функционален символ. Дефинираме f_U чрез $f_U(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n) \overset{def}{=} \overline{f a_1 \dots a_n}$ за $\forall a_1 \dots a_n \in C$. Коректност. Нека $\bar{a}_1 = \bar{b}_1 \dots \bar{a}_n = \bar{b}_n$. Оттук $a_1 \sim b_1 \dots a_n \sim b_n$ и значи $\vdash_T a_1 = b_1 \dots \vdash_T a_n = b_n$. Съгласно $(T=)$ $\vdash_T a_1 = b_1 \to \dots \to a_n = b_n \to f a_1 \dots a_n = f b_1 \dots b_n$ и сл. $\vdash_T f a_1 \dots a_n \sim f b_1 \dots b_n$ и сл. $\overline{f a_1 \dots a_n} = \overline{f b_1 \dots b_n}$

(3) Нека p е n-местен предикатен символ от $\mathcal{L}(T)$ различен от $=$. Дефинираме $p_U = \{(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n) \mid \vdash_T p a_1 \dots a_n\}$

Тв Нека T е теория т.ч. $\mathcal{L}(T)$ съдържа поне една константа. Тогава:

(1) За всеки затворен терм a на $\mathcal{L}(T)$, $U_T(a) = \bar{a}$

(2) за всяка затворена атомарна формула A от $\mathcal{L}(T)$

$\vdash_T A \Leftrightarrow U_T \models A$

Док (1) индукция по построението на затвореният терм a

1) a е константа, да речем k. Тогава $U_T(a) = U_T(k) = k_{U_T} = \bar{k} = \bar{a}$

(5)

2) a е терм от вида $a \cong f a_1 \dots a_n$ за някой n-местен функционален символ f и затворени термове $a_1 \dots a_n$. Тогава $\mathcal{U}_T(a) \equiv f^{\mathcal{U}_T}(\mathcal{U}_T(a_1) \dots \mathcal{U}_T(a_n))$. Съгласно инд. предп.
$\equiv f^{\mathcal{U}_T}(\bar{a}_1, \dots \bar{a}_n) \equiv \overline{f a_1 \dots a_n} \equiv \bar{a}$

Док (2)

Нека A е затворена атомарна формула

1сл) A е формулата $A \cong a_1 = a_2$ за някои затворени термове a_1, a_2. Тогава $\mathcal{U}_T \models A \iff \mathcal{U}_T(A) \equiv И \iff \mathcal{U}_T(a_1) \equiv \mathcal{U}_T(a_2) \iff \bar{a}_1 \equiv \bar{a}_2 \iff a_1 \sim a_2 \iff \vdash_T a_1 = a_2$

2сл) $A \cong p a_1 \dots a_n$ за някой n-местен предикатен символ p, разл от $=$ и затворени термове $a_1 \dots a_n$. Тогава $\mathcal{U}_T \models A \iff \mathcal{U}_T(A) \equiv И \iff (\mathcal{U}_T(a_1) \dots \mathcal{U}_T(a_n)) \in p^{\mathcal{U}_T} \iff (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n) \in p^{\mathcal{U}_T} \iff \vdash_T p a_1 \dots a_n$

Деф Ще казваме че теорията T е хенкинова, ако за всяка затворена формула $\exists x B$ от $\mathcal{L}(T)$, има константа k от $\mathcal{L}(T)$ т.ч. $\vdash_T \exists x B \to B_x[k]$

Деф Нека T е непротиворечива теория. Ще казваме че T е пълна, ако за всяка затворена формула A от $\mathcal{L}(T)$, $\vdash_T A$ или $\vdash_T \neg A$

Лема Нека T е пълна хенкинова теория. Тогава за всяка затворена формула A от $\mathcal{L}(T)$
$\vdash_T A \iff \mathcal{U}_T \models A$

Док. С индукция по A

КА Хаджийски 16.12.24

Th за резидуумите

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)$, $0 < |z-z_0| < R$

$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0| = \rho} f(z)\, dz$, $0 < \rho < R$

Пресмятане на резидууми в полюс

1) z_0 е прост полюс

$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$, $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$,

φ, ψ - холоморфни в z_0

$\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, $\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

2) z_0 е n-кратен полюс, $n > 1$

$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, φ е холоморфна в z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$

$\varphi(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_m (z-z_0)^m + \dots$

$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z-z_0} + a_m + \dots$

$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{m-1} = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$