СДУ Христов 30.10.14

Задача на Коши за вълново уравнение
Формула на Кирхоф. Метод на спускането
Метод на Дюамел. Принцип на Хюйгенс

(1) $\square u = u_{tt} - \Delta u = u_{tt} - \sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = 0$
$x \in D \subset \mathbb{R}^3, \ t \geq 0$

(2) $u|_{t=0} = \varphi_0(x) \in C^3(D), \ u_t|_{t_0} = \varphi_1(x) \in C^2(D)$
едностранна задача за $t \geq 0$

(3) $u_{tt} = a^2 \Delta u$ се свежда към (1) след $\tau = at$

(4) $u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = \varphi(x)$

Лема: Ако решението на задача (1), (4) е
$u(x,t) \in C^2(G), \ G = \Omega \cup \{t \geq 0\}. \ \Omega \cap \{t=0\} = D$
и нека от $\varphi \in C^3(D)$ следва че u има непрекъсната трета производна в G, то тогава задача (1), (2) е решима

Док
По предположение $\varphi \in C^3(D) \Rightarrow u(x,t)$ решението на (1), (4) $u \in C^3(G)$. Дефинираме функцията
$v_\varphi(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \in C^2(G)$

v_φ удовлетворява (1)

$v_{\varphi_{tt}} = v_{\varphi_{xx}} \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} v_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} u_{xx}$

$v_\varphi|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u(x)$

$$v_{\varphi t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = \Delta u\Big|_{t=0} = 0$$

$$v_\varphi(x,t):\ \left|\begin{array}{l} \overset{(1)}{v_\varphi\big|_{t=0}} = \varphi(x) \\ v_{\varphi t}\big|_{t=0} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \omega(x,t) = v_{\varphi_0} + u_{\varphi_1}$$

Сферично средно

(5) $$\gamma(u, r, x, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{|u| \le r} u(x+y)\, d\sigma_r$$

$d\sigma_r$ е лицев елемент в сфера с радиус r

$$\gamma(u, r, x, t) = \frac{r^2}{4\pi r^2} \iint\limits_{|\ell|=1} u(x + r\ell, t)\, d\sigma_1 \quad , \ y = \ell r$$

$$r \to 0 \quad \gamma(u, r, x, t) = \frac{u(x,t)}{4\pi} \iint\limits_{|\ell|=1} d\sigma_1 = u(x,t)$$

$$\iiint\limits_{O_r(x)} \Delta u(y)\, dy \quad , \quad dy = dy_1\, dy_2\, dy_3$$

$O_r(x)$ - кълбо с център x и радиус r

$|y - x| \le r$

$$\|$$

$$\iiint\limits_{O_r(x)} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_i} (u_{y_i})\, dy \overset{\text{Гаус}}{=} \iint\limits_{S_r(x)} \sum_{i=1}^{3} u_{y_i} \cos(n, y_i)\, d\sigma_r =$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\iint_{S_\tau(x)} u(x+y)\,d\sigma_\tau = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(4\pi\tau^2 g(u,\tau,x,t)\right)$$

$$\iiint_{O_\tau(x)} \Delta u\,dy = \iiint_{O_\tau(x)} u_{tt}\,dy = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint_{O_\tau(x)} u(x+y)\,dy \;\;!!!$$

Пишем сферични координати

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^\tau\left[\iint_{S_\tau(x)} u(x+y)\,d\sigma_\varrho\right]d\varrho$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\,\tau^2 g(u,\tau,x,t) = 4\pi\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^\tau \varrho^2 g(u,\varrho,x,t)\,d\varrho \Big/ \frac{\partial}{\partial\tau}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(\tau^2 g\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\tau^2 g(u,\tau,x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(2\tau g + \tau^2 g_\tau\right)$$

$$v(\tau,t) = \frac{1}{2}\int_{\tau-t}^{\tau+t}\psi(\lambda)\,d\lambda$$, $\psi(\lambda)$ е продължение на нечетно през 0 τ

$$\tau\, g(u,\tau,x,t) = \frac{1}{2}\int_{\tau-t}^{\tau+t}\psi(\lambda)\,d\lambda$$

$$\frac{\tau}{4\pi}\iint_{|\ell|=1} f(x+\ell\tau)\,d\sigma_1 = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x,t) = \dfrac{t}{4\pi t^2} \iint f(x+y)\, d\sigma_1 \\ \text{Формула на Кирхоф } |y| = t \end{array}}$$

$$u_t|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} f(x) \underbrace{\iint\limits_{|\ell|=1} d\sigma_1}_{4\pi} = f(x)$$

(*) Формулата на Кирхоф удовлетворява задача (1), (2) при условие $f \in C^3(D) \to (*)$
$u(x\,t) \in C^3(G)$

Прилагаме лемата

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi} \iint\limits_{|\ell|=1} f_0(x+\ell t)\, d\sigma_1 + \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{|\ell|=1} f_1(x+\ell t)\, d\sigma_1\right.$$

Решение на задачата (1), (2)

досега разгл. еднозначните задачи при $t \geq 0$. Нека
$v(x\,t)$ решава (1), (2) в $G \cup \{t=0\}$, $G \cap \{t=0\} = 0$
$v_{tt} = v_{xx}$, $v|_{t=0} = v|_D = f_0(x)$, $v_t|_{t=0} = v_t|_D = f_1(x)$
$u(x\,t)$, $v_{tt} = v_{xx}$, $v|_{t=0} = f_0(x)$, $v_t|_{t=0} = -f_1(x)$
разгл. $\omega(x\,t) = \begin{cases} u(x,t) & (x,t) \in G \\ u(x,-t) & (x,-t) \in G^* \end{cases}$

G^* е огледалния образ на G относно $t=0$
$u|_{t=0} = f_0(x) = u|_{t=0} = f_0(x)$. ω е непрекъсната в
$G \cup D \cup G^*$. $u_t|_{t=0} = f_1(x)$. $u_t|_{t=0} = f_1$ (*) $\Rightarrow$
ω_t непрекъсната в $G \cup D \cup G^*$, ω_{tt} непрекъсната
в $G \cup D \cup G^* \Rightarrow \omega(x,t)$ е решение на
двустранна задача