ЧДУ Христов 18.12.14

Редици и хармонични функции. Теорема на Харнак

Th 1 (Харнак)

Нека $\{u_n(P)\}$ са функции, дефинирани в област D и е равномерно сходяща в/у всяко компактно подмножество на D. Тогава граничната функция е хармонична.

Док.

кълбо K с център O, радиус R, $P_0 \in K$, $P \in S = \partial K$, имаме

$$\Pi(P, P_0) = \frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3(P, P_0)} \text{ - ядро на Поасон}$$

$$R = r(O, P) \quad , \rho = r(O, P_0) \quad , K \subset D$$

$u_n(P_0) = \iint\limits_S \Pi(P, P_0)\, u_n(P)\, dS$. Правим граничен преход при $n \to \infty$ $\Rightarrow$

$$u_n(P_0) = \iint\limits_S \Pi(P, P_0)\, u(P)\, dS$$

Вариант

Th. Нека $\{u_n(P)\}$ е безкрайна редица от функции, дефинирана в ограничена област D. Нека $\Gamma = \partial D$ и тази редица е равномерно сх. в/у Γ. Тогава $\{u_n(P)\}$ е равномерно сходяща в $\overline{D}$, а следователно граничната функция е хармонична

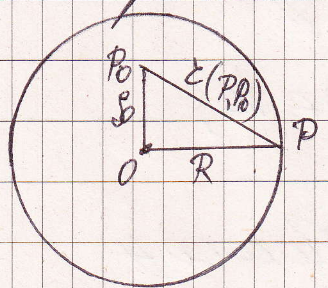
Ика

Нека $P \in \Gamma$, да имаме $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ и при $n > N(\varepsilon) \Rightarrow -\varepsilon < \underbrace{u_n(P) - u_m(P)}_{\text{хармонична}} < \varepsilon$

$K \subset D$, $\frac{O_n}{D}$ $|u_n(P_0) - u_m(P_0)| = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_\varepsilon(P_0)} |u_n(P) - u_m(P)|\, dS$

в условията на Th_1

(б) Неравенство на Харнак



$$R - \rho_0 \le r(P, P_0) \le R + \rho_0$$

$$\frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R+\rho_0)^3} \le \Pi(P, P_0) = \frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - \rho_0^2}{r^3(P, P_0)} \le \frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R-\rho_0)^3}$$

$$\frac{1}{4\pi R} \frac{R - \rho_0}{(R-\rho_0)^2} \le \Pi(P, P_0) \le \frac{1}{4\pi R} \frac{R + \rho_0}{(R-\rho_0)^2}$$

$u(P)$ е хармонична в K, неотрицателна

$$\frac{1}{4\pi R} \frac{R - \rho_0}{(R+\rho_0)^2} u(P) \le \Pi(P, P_0)\, u(P) \le \frac{1}{4\pi R} \frac{R + \rho_0}{(R-\rho_0)^2} u(P)$$

$$\frac{1}{4\pi R} \frac{R - \rho_0}{(R+\rho_0)^2} \iint_S u(P)\, dS \le \iint_S \Pi(P, P_0)\, u(P)\, dS \le \frac{1}{4\pi R} \frac{R + \rho_0}{(R-\rho_0)^2} \iint_S u(P)\, dS$$

$$\frac{R(R - \rho_0)}{(R+\rho_0)^2} u(O) \le u(P_0) \le \frac{R(R + \rho_0)}{(R-\rho_0)^2} u(O) \quad (*)$$

$\cancel{\frac{R(R+\rho_0)}{(R+\rho_0)^2} u(O)}$ Неравенство на Харнак наричаме (*)

Th2 (Харнак)

Нека е зададена монотонно растяща редица от хармонични функции (1) $u_1(P) \le u_2(P) \le \dots$ дефинирани в <u>ограничена област</u> D и нека тази редица да е сходяща за някаква $A \in D$. Тогава $\{u_n(P)\}$ е равномерно сходяща в/у всяко компактно подмножество на D.

Док

Нека да означим с G, всички точки на D в които (1) е сходяща. ? G е отворено

$K: r(A,P) \le \frac{R}{2}$, където $2R = dist(A, \partial D)$

$V_{m,n}(P) = u_{m+n}(P) - u_n(P)$, $m > 0$

$V_{m,n}(P) \ge 0$ – хармонично, т.е.

$|V_{m,n}(A)| < \varepsilon$ за n достатъчно голямо

$$P_0 \in K, \quad V_{m,n}(P_0) = \frac{R(R+\rho_0)}{(R-\rho_0)^2} V_{m,n}(A) \le$$

$$\le \frac{2\cdot\frac{3}{2}R}{R^2/4} V_{m,n}(A) = 6\, V_{m,n}(A) \sim 6\varepsilon \Rightarrow$$

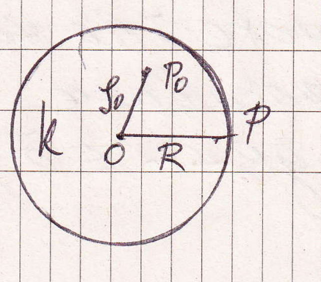
сходяща $\rightarrow$ G е отворено

Сл (Th Лиувил) Нека $u(P)$ е хармонична в R^3. Ако $u(P)$ е ограничена, то $u(P) = const$

Док

$u(P) \le M, \quad \forall P \in R^3$

$V(P) = M - u(P) \ge 0$ хармонична



$$\frac{R(R+\rho_0)}{(R+\rho_0)^2} V(O) \le V(P_0) \le \frac{R(R-\rho_0)}{(R-\rho_0)^2} V(O)$$

$R \to \infty$, $V(O) \leq V(P_0) \leq V(O) \to$
$V = const$

Припомняне

Деф 1

Нека $\{U_n(P)\}$ безкрайна редица от функции дефинирани в D. Казваме че $\{U_n(P)\}$ е равностепенно непрекъсната в т. $P_0 \in D$ ако $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon, P_0)$, $n > N$, $|U_n(P) - U_n(P_0)| < \varepsilon$ за $\forall n$ (за всяка функция от редицата). Ако това е изпълнено за всяко $P_0 \in D$, казваме че $\{U_n(P)\}$ е равностепенно непрекъсната в D.

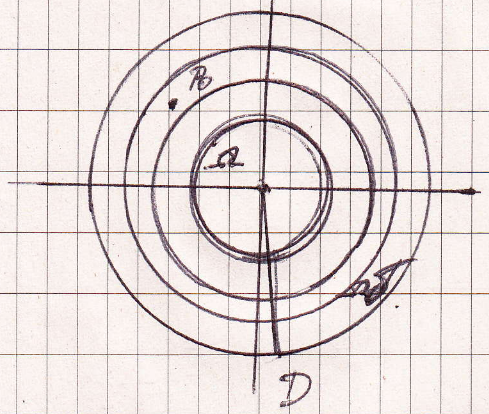
Деф 2

Нека $\{U_n(P)\}$ е безкрайна фамилия от функции, дефинирана в D. Казваме че $\{U_n(P)\}$ е локално равномерно ограничена, ако за всеки компакт $\Omega \subset D' : \exists M_\Omega$ - const, такава че $|U_n(P)| \leq M_\Omega$, $\forall P \in \Omega$, $\forall n$

Th3 Нека D е ограничена област, $\{U_n(P)\}$ е безкрайна редица от хармонични функции дефинирани в D и $\{U_n(P)\}$ е локално равномерно ограничена, тогава $\exists$ подредица на $\{U_n(P)\}$ която е равномерно сходяща в/у всяко компактно подмножество на D

Док

Нека Ω е компактно подмножество на D и $dist(\Omega, \partial D) = 4\delta$. С Ω_δ означаваме множеството от точки с разстояния до $\Omega \leq \delta$, $P_0 \in \Omega_\delta$



K с център P_0 и радиус $r \le \delta$, $\partial K = S$, $P \in S$

$$\frac{\partial u_n(P)}{\partial x}$$

от Гаус $\frac{\partial u_n}{\partial x}(P) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_r} \frac{\partial u_n}{\partial x}(P)\, dS$

$$4\pi r^2 \frac{\partial u_n}{\partial x}(P) = \iint\limits_{S_r} \frac{\partial u_n}{\partial x}(P)\, dS$$

$$\int_0^\delta 4\pi r^2 \frac{\partial u_n}{\partial x}(P)\, dr = \int_0^\delta \left(\iint\limits_{S_r} \frac{\partial u_n}{\partial x}(P)\, dS \right) dr$$

$$\frac{4\pi r^3}{3} \frac{\partial u_n}{\partial x}(P) = \iiint\limits_{K_\delta} \frac{\partial u_n}{\partial x}(P)\, d\tau =$$

$= \iint\limits_{S_r} u_n(P) \cos(n, x)\, dS_\delta$ за $d\tau = dx\,dy\,dz$

$$\left| \frac{\partial u_n(P_0)}{\partial x} \right| \le \frac{B}{4\pi\delta} \iint\limits_{S_\delta} |u_n(P)|\, dS_r$$

$$\left| \frac{\partial u_n(P_0)}{\partial x} \right| \le \frac{3}{\delta} M_\Omega$$