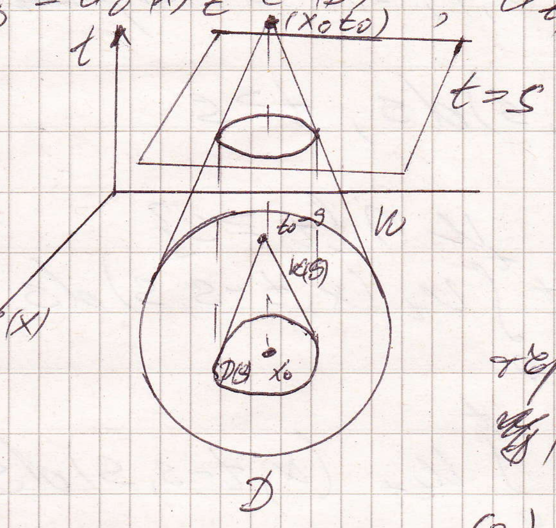
ЧДУ лекция 06.11.14

В/ Метод на Дюамел

1) $u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + f(x,t)$

$u|_0 = u_0(x) \in C^3(D)$, $u_t|_0 = u_1(x) \in C^2(D)$



$f \in C^2(K)$, $K: |x-x_0| \le t_0 - t$

фиксираме $s \in (0, t_0)$

Линейно уравнение

търсим $u = u_1 + v$ където u_1 е решение на хомогенното уравн-ние

$$\left.\begin{array}{l}(3)\ u_{tt} = \sum_i u_{x_ix_i} \\ (4)\ u|_0 = u_0,\ u_t|_0 = u_1\end{array}\right\} \text{Ф-ла на Кирхоф}$$

докато за нехомогенното уравнение е

(5) $u_{tt} = \sum_i u_{x_ix_i} + f(x,t)$

(6) $u|_0 = 0$, $u_t|_0 = 0$

Разгл. (3) със следните начални условия

(7) $u|_{D(s)} = 0$, $u_t|_{D(s)} = f(x,s)$

$u(x,t,s)$. Дали е непрекъсната по s

вземаме (s_1, s_2) и правим оценки и на двете, като s_1 и s_2 са достатъчно близки за някое $\varepsilon > 0$ от което не зависят

за $\forall s_1, s_2$ $|s_1 - s_2| < \delta(\varepsilon)$

$|f(x,s_1) - f(x,s_2)| < \varepsilon$

Общата дефиниционна област на двете функции

дефинираме едната и другата в област

$|x-x_0| \le t_0 - s_1$, $|x-x_0| \le t_0 - s_2$

Общата дефиниционна област е $|x-x_0| \le t - \tau$

където $\tau = \max(s_1, s_2)$

Избираме s_0 т.ч. $(x,t) \in K_s$

Вземаме $|s - s_0|$ достатъчно малко т.ч. $(x,t) \in K_{s_0}$
Тh за непрекъснатата зависимост от начални данни - $|u(x,t,s_1) - u(x,t,s_2)| < \varepsilon$, непрекъсната по s

Пр. $$v(x,t) = \int_0^t u(x, t-s, s)\,ds, \quad t \geq s$$

дефиниционната област $u \cap \{t \geq s\}$

$$v_t(x,t) = \underbrace{u(x,0,t)}_{0} + \int_0^t u_t(x, t-s, s)\,ds$$

$$v_{tt}(x,t) = \underbrace{u_t(x,0,t)}_{f(x,t)} + \int_0^t u_{tt}(x, t-s, s)\,ds \Big\} \Rightarrow$$

$$f(x,t) + \int_0^t u_{tt}\,ds = f(x,t) + \underbrace{\int_0^t \sum_i u_{x_i x_i}\,ds}_{v_{x_i x_i}} \; !$$

$$\boxed{v_{tt} = \sum_i v_{x_i x_i} + f(x,t)}$$

Решение на нехомогенно уравнение чрез хомогенно уравнение

Нека $\rho = t - s$
$$v(x,t) = -\int_0^t \left(\frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{S_\rho(x)} f(y+x, \rho)\,d\sigma_\rho \right) d\rho$$

Всяка транслация по x или по t също е решение на уравнението

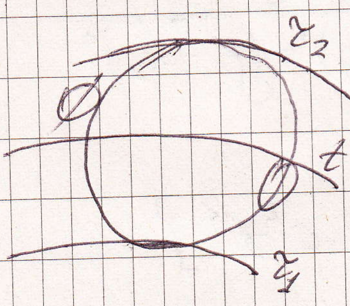
б) Принцип на Хюйгенс

1) $u_{tt} = c^2 (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^3$
$u|_D = f(x) \in C^3(D)$, $\quad u_t|_D = 0$, $\quad f(x) \neq 0$ само в обл. Ω

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{S_t(x)} f(y+x)\, d\sigma_t\right)$$

$$S_t(x) = \begin{cases} c^2t^2 = (x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3-x_3^0)^2 \\ ct = |x-x_0| \end{cases}$$ Ф-ла на Кирхоф

Пример



$x \notin \Phi \rightarrow u(x_0,\Phi)=0$

? $u(x_0,t)$ как се държи като функция на t

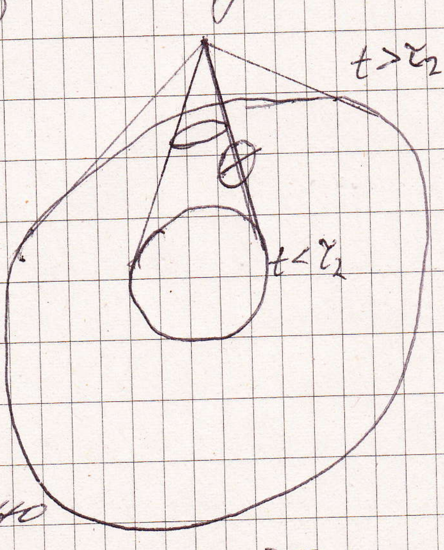
τ_1 – най-близкото разстояние до x_0 (не е допирателна)

• x_0 ~~Стр~~ Строим $S_{\tau_1}(x_0)$

При $t[0,\tau_1] \rightarrow u(x_0,t)=0$

Нека τ_2 е най-далечното разстояние до x_0

При $t[\tau_1,\tau_2] \rightarrow u(x_0,t)\neq 0$



Нека $t=\tau_2 \rightarrow u(x_0,t)=0$

Скоростта на разпространение на вълната е точно <u>c</u>.

Геометричното място от точки които започват да трептят в момент t наричаме преден фронт на вълната. Аналогично геометричното място от точки които спират да трептят точно в момент t_1 се нарича заден фронт на вълната

③

Точна скорост + преден фронт + заден фронт = Принцип на Хюйгенс

При $n = 2$ (2-ро измерение)

$$u_{tt} = c^2 (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2})$$

$u|_0 = 0$, $u_t|_0 = f(x)$, $f(x) \neq 0$ в някаква област $O \subset R^2$

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi c}\int_{K_t(x)} \frac{f(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2}{\sqrt{c^2t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}\right)$$

$$K_t(x) = \{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2 \le c^2t^2\}$$

за $u(x_0, 0) = 0$

за $u(x_0, t) = 0$, $t \in [0, \tau_1]$

$u \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ / дифузия