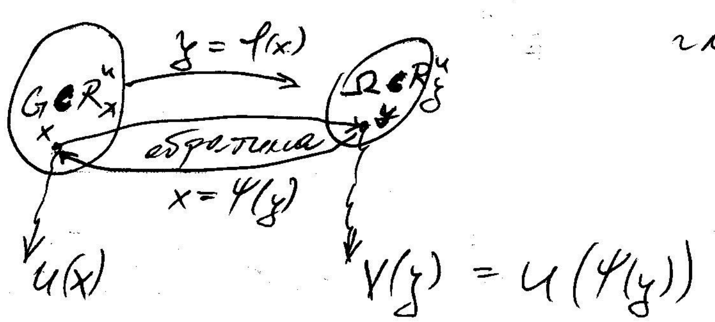
ЧДУ Йорданов 06.10.14

Класификация на линейни ЧДУ от II-ри ред с n променливи

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \Phi(x, u, \operatorname{grad} u) = 0 \;;\quad x = (x_1 \dots x_n)$$

$u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ по Th на Шварц



главно по искане

$$v(\varphi(x)) = u(x)\,!$$

Смяна на променливите

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} v_{y_k} \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_i}\,;$$

$$u_{x_i x_j} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} v_{y_k y_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}} + \sum_{k=1}^{n} v_{y_k}(\,)\frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x_i \partial x_j} \;\Big/ \cdot a_{ij}(x)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\overset{\psi(y)}{x}) \left(\sum_{k,l=1}^{n} v_{y_k y_l} \frac{\partial \varphi_k(\overset{\psi(y)}{x})\, \partial \varphi_l(\overset{\psi(y)}{x})}{\partial x_i\, \partial x_j} \right) + \Psi(y, v, \operatorname{grad} v) = 0$$

$$\sum_{k,l=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}}_{\text{полагаме на } A_{kl}(y)} \Big) v_{y_k y_l} + \dots = 0$$

$$\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}(y)\, v_{y_k y_l} + \dots = 0$$

Положили сме $y = \varphi(x)$

Нека имаме x_0. Тогава $y_0 = f(x_0)$

Ограничаваме се до 1 точка

Тогава $c_{kj} = \frac{\partial f_k(x_0)}{\partial x_i}$, $c_{ej} = \frac{\partial f_e(x_0)}{\partial x_i}$

Нека $y_1 = \sum_{i=1}^{n} c_{1i} x_i$

$y_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i$ $\Big\}$ $\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = c_{ki}$

$y_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} x_i$

$\Rightarrow \sum_{k,e=1}^{n} \bar{A}_{ke} \, y_k y_e + \ldots = 0$ където $\bar{A}_{ke} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) c_{ki} c_{ej}$

Гледаме $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) \xi_i \xi_j = f(\xi_i \xi_j$ от $x_i x_j)$

Получаваме квадратична форма

Смяна на променливите

$\overset{\text{нови}}{\xi_i} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \overset{\text{стари}}{\eta_k} \rightleftarrows \overset{\text{нови}}{y_k} = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} \overset{\text{стари}}{x_i} \Rightarrow$

$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \eta_k\right)\left(\sum_{e=1}^{n} c_{ej} \eta_e\right) =$

$f = \sum_{k,e=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) c_{ki} c_{ej}\right)}_{\bar{A}_{ke}} \eta_k \eta_e$

Можем да доведем до вида

$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k y_k^2$ където $\varepsilon_k = \begin{cases} +1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$

Закон за инерцията - броят на +1, -1, 0 е един и същ

$\left.\begin{matrix} 1, \dots 1 \\ (-1, \dots, -1) \end{matrix}\right\}$ елиптично у-е в т. x_0

$\left.\begin{matrix} -1, 1, \dots 1 \\ (1, -1, \dots -1) \end{matrix}\right\}$ хиперболично у-е в т. x_0

$\left.\begin{matrix} 0, 1 \dots 1 \\ (0, -1, \dots, -1) \end{matrix}\right\}$ параболично у-е в т. x_0

елиптично у-е – у-е на Лаплас – $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}}_{\Delta u} = 0$

хиперб. у-е – вълново у-е – $(t, x_1, \dots x_n)$ $u_{tt} = \Delta u$

парабол у-е – у-е на топлообменността – $u_t = \Delta u$

$\underbrace{1, \dots 1}_{p>1}, \underbrace{-1 \dots -1}_{q>1}$ – ултрахиперболично у-е