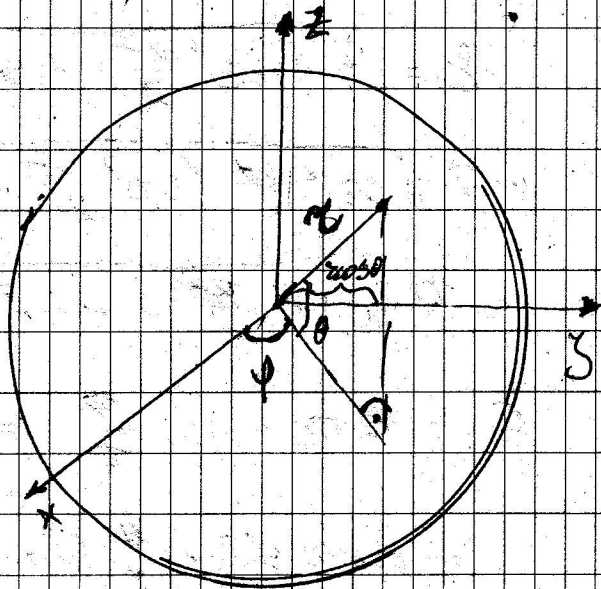


АМ 15.10.14

Сферични координати

Връзка между декартови и сферични координати



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

Връзка между сферични и декартови координати

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

За дадена точка е дадени декартови координати по кривата $x = R \cos^2 \frac{\omega t}{2}$, $y = \frac{R}{2} \sin \omega t$, $z = R \sin \frac{\omega t}{2}$. Намерете ъгъла за ориентация в сферични координати.

Реш. Трябва да намерим как сферичните координати зависят от времето

$$r = \sqrt{\left(R \cos^2 \frac{\omega t}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2} \sin \omega t\right)^2 + \left(R \sin \frac{\omega t}{2}\right)^2}$$

$$r = \sqrt{R^2 \cos^4 \frac{\omega t}{2} + \frac{R^2}{4} \sin^2 \omega t + R^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2}}$$

$$\sin^2 \omega t = 2 \sin^2 \frac{\omega t}{2} \cos^2 \frac{\omega t}{2}$$

$$\begin{aligned} \rho &= R \sqrt{\cos^4 \frac{\omega t}{2} + \sin^2 \frac{\omega t}{2} \cos^2 \frac{\omega t}{2} + \sin^2 \frac{\omega t}{2}} = \\ &= R \sqrt{\cos^2 \frac{\omega t}{2} (\cos^2 \frac{\omega t}{2} + \sin^2 \frac{\omega t}{2}) + \sin^2 \frac{\omega t}{2}} = \\ &= R \sqrt{\cos^2 \frac{\omega t}{2} + \sin^2 \frac{\omega t}{2}} = R \sqrt{1} = R // \end{aligned}$$

$$\theta = \arcsin \frac{\rho}{R} = \arcsin \frac{R \sin \frac{\omega t}{2}}{R} =$$

$$= \arcsin \sin \frac{\omega t}{2} = \frac{\omega t}{2} //$$

$$\varphi = \arctg \frac{\dot{\rho}}{\rho} = \arctg \frac{\frac{R}{2} \sin \omega t}{R \cos^2 \frac{\omega t}{2}} = \arctg \frac{\sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2}}{\cos^2 \frac{\omega t}{2}}$$

$$= \arctg \operatorname{tg} \frac{\omega t}{2} = \frac{\omega t}{2} //$$

Зор: Тогава се следва съгласно уравненията

$$\rho = R, \quad \varphi = \frac{\omega t}{2}, \quad \theta = \frac{\omega t}{2}$$

да се намери радиус (координатата) и
проециите на скоростта в осите на
сферичната координатна система ρ, φ, θ

Резултат

$$\text{Скоростта } \vec{v} = (v_\rho, v_\varphi, v_\theta)$$

$$v_\rho = \dot{\rho} = 0 \text{ - скоростта с която се променя } \rho$$

$$v_\varphi = (\rho \cos \theta) \dot{\varphi} = R \cos \theta \dot{\varphi} = R \frac{\omega}{2} \cos \theta = \frac{R\omega}{2} \cos \frac{\omega t}{2}$$

$$v_\theta = \rho \dot{\theta} = \frac{R\omega}{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2} = R \frac{\omega}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\omega t}{2} + 1}$$

сферична

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \text{ - в декартова}$$

Ускорение

Точка се движи в равнина по уравненията
 $x = 10 \cos 2\pi \frac{t}{5}$, $y = 10 \sin 2\pi \frac{t}{5}$. Намерете
 траекторията на точката, величината и
 посоката на скоростта и величината
 и посоката на ускорението

$$x^2 + y^2 = 10^2 \text{ - траекторията е}$$

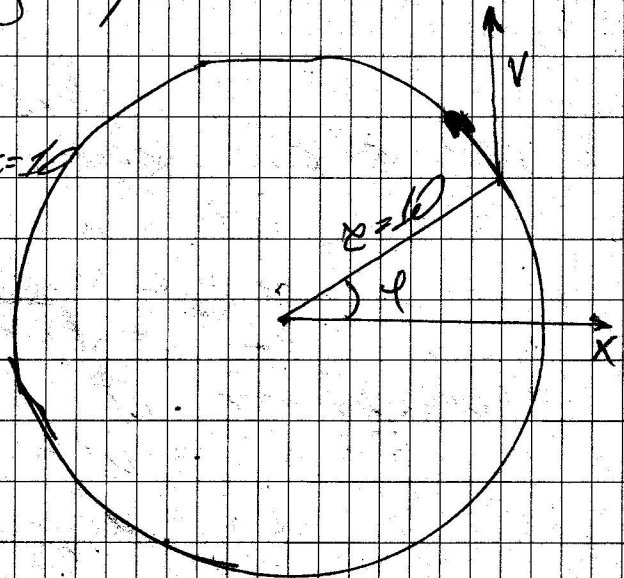
сфера с $r = 10$

$\vec{v} = (x, y)$ където

$$\dot{x} = -10 \frac{2\pi}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5}$$

$$\dot{y} = 10 \frac{2\pi}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5} \Rightarrow$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 4\pi$$



Скоростта в полярни координати (r, φ) , $v = r \dot{\varphi}$

$$= 10 \frac{d}{dt} \left(2\pi \frac{t}{5} \right) = 10 \frac{2\pi}{5} = 4\pi$$

Ъгловата скорост е по референциална скоростта
 с която се въртят радиусите \vec{e}_r . Ъгловото
 ускорение е $\dot{\vec{\omega}}$. В тази задача $\dot{r} = 0$, $\omega = \dot{\varphi}$
 Ускорението $\vec{\omega} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{e}_r = \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r$ на точка при
 движение по сфера

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r = \left(\frac{2\pi}{5} \right)^2 \vec{e}_r = -\frac{4\pi^2}{25} \vec{e}_r$$

$$|\vec{\omega}| = \frac{4\pi^2}{25} \cdot 10 \approx 1,6\pi^2 \text{ насочено по } \vec{e}_r$$

Задача Точка се движи по оста $x = a(e^{kt} + e^{-kt})$,
 $y = a(e^{kt} - e^{-kt})$, където a са k са дадени
 константи. Намерете траекторията,
 скоростта и ускорението на точката като
 функции на радиус-вектора $\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Реш

$$x^2 - y^2 = 4a^2 - \text{хипербола}$$

В декартови координати

$$\dot{x} = ak(e^{kt} - e^{-kt}) = ky$$

$$\dot{y} = ak(e^{kt} + e^{-kt}) = kx$$

$$|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = k\vec{r}$$

Ускорението $\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y})$

$$\ddot{x} = k\dot{y} = k^2x$$

$$\ddot{y} = k\dot{x} = k^2y$$

$$\vec{a} = k^2\vec{r} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = k^2\vec{r}$$

Задача Орбита на Високоплато h от космонавта на
 Марсето изстрелва снаряд с начална скорост
 $v_0 = 1000 \text{ м/с}$ под ъгъл $\alpha = 45^\circ$ спрямо
 хоризонта. Определете на какво разстояние
 a от орбитата ще падне снаряда в
 морето? Височината $h = 30 \text{ м}$

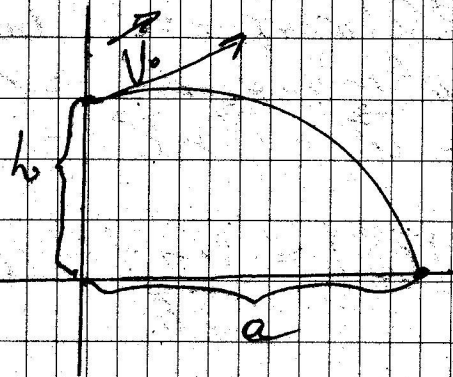
$x_0 = (v_0 \cos \alpha)t$ - хоризонтална
 компонента на скоростта

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = h$$

$$y = h + (v_0 \sin \alpha)t - g \frac{t^2}{2}$$

$$y = 0, \dot{y} = gt, \ddot{y} = g$$



Частица е на височината на морето
когато $y = 0$

$$g \frac{t^2}{2} - (v_0 \sin \alpha) t - h = 0 \quad | \cdot 2$$

$$gt^2 - 2(v_0 \sin \alpha)t - 2h = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{2v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{4v_0^2 \sin^2 \alpha - 8gh}}{2g} =$$

$$= \frac{1000}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{500000 - 60g} \quad \frac{2g}{2g} \approx \underline{\underline{144,3 \text{ sec}}}$$

$$a = \frac{1000}{\sqrt{2}} - 144 \approx \underline{\underline{102 \text{ km}}}$$