

## ЛЕКЦИЯ 9

### Аналитична механика

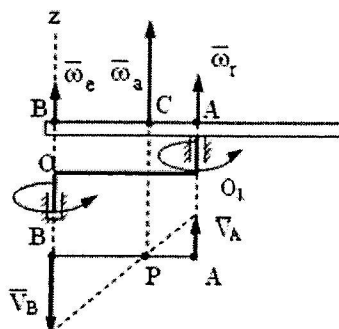
#### Съдържание

1. Събиране на завъртания около успоредни оси.
2. Събиране на завъртания около пресичащи се оси.
3. Обща задача за относително движение на твърдо тяло.

#### 1. Събиране на завъртания около успоредни оси.

- постановка на задачата:

Тяло се върти около ос, която от своя страна се върти около друга неподвижна ос, успоредна на нея. При известни ъглови скорости на въртене около осите да се определи абсолютното движение на тялото (фиг.1).



фиг.1

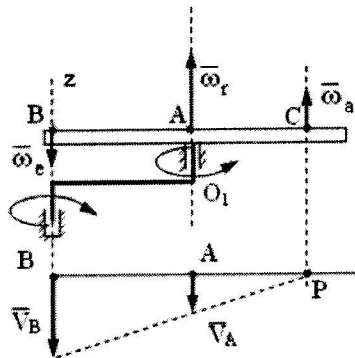
- *относително движение*: въртене с ъглова скорост  $\omega_r$  около оста  $O_1$
- *преносно движение*: въртене с ъглова скорост  $\omega_e$  около оста  $Oz$
- случай, когато посоките на относителното и преносното движение съвпадат (за определеност  $\omega_r > \omega_e$ ) - (фиг.1).
  - абсолютна скорост на точка A:  $v_a^{(A)} = v_e + v_r = v_e$ ;  $v_a^{(A)} = \omega_e AB$

- абсолютна скорост на точка В:  $\mathbf{v}_a^{(B)} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_r$ ;  $v_a^{(B)} = \omega_r AB$
- векторите на скоростите на точките са успоредни (перпендикулярни на отсечката АВ)
- моментна ос на въртене с абсолютна ъглова скорост  $\omega_a$ , минаваща през моментния център на скоростите Р

$$\omega_a = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A + v_B}{AP + BP} = \frac{\omega_e AB + \omega_r AB}{AB} = \omega_e + \omega_r$$

$$\text{от } \frac{v_B}{v_A} = \frac{\omega_r AB}{\omega_e AB} = \frac{\omega_r}{\omega_e}; \quad (\text{от друга страна } \frac{v_B}{v_A} = \frac{\omega_a BP}{\omega_a AP}) \Rightarrow \frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{BP}{AP}$$

- случай, когато преносното движение има противоположна посока на относителното (за определеност  $\omega_r > \omega_e$ ) - (фиг.2).



фиг.2

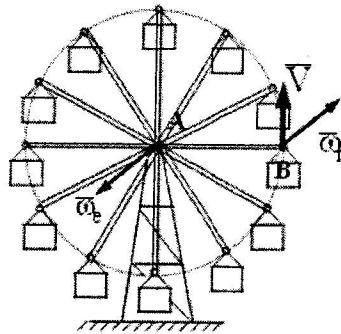
- абсолютна скорост на точка А:  $\mathbf{v}_a^{(A)} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_e$ ;  $v_a^{(A)} = \omega_e AB$
- абсолютна скорост на точка В:  $\mathbf{v}_a^{(B)} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_r$ ;  $v_a^{(B)} = \omega_r AB$
- векторите на скоростите на точките са успоредни (перпендикулярни на отсечката АВ)
- моментна ос на въртене с абсолютна ъглова скорост  $\omega_a$ , минаваща през моментния център на скоростите Р

$$\omega_a = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_B - v_A}{BP - AP} = \frac{\omega_r AB - \omega_e AB}{AB} = \omega_r - \omega_e$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{\omega_r AB}{\omega_e AB} = \frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{BP}{AP}$$

- резултат:  $\omega_a = \omega_e + \omega_r$ ;  $\frac{BP}{AP} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$  (1)

- при въртене около успоредни оси абсолютното движение на тялото е въртене около моментната ос (при  $\omega_e \neq -\omega_r$ ), която е в равнината, определена от осите на относителното и преносното въртене и е на разстояние от тези оси, обратно пропорционално на ъгловите скорости за всяка от осите
- моментната ъглова скорост е равна на векторната сума на успоредните вектори на ъгловите скорости на всяко от въртеливите движения
- абсолютното движение е равнинно движение
- при  $\omega_e = -\omega_r$  (въртелива двойца) : частен случай на постъпателно движение



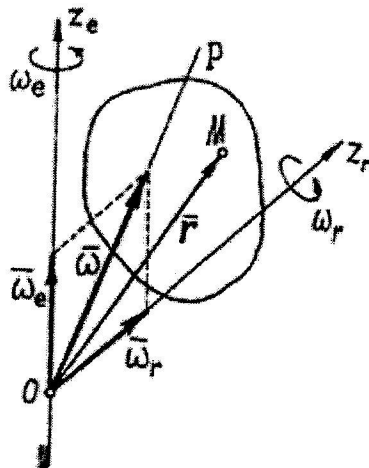
фиг.3

- векторът на скоростта на постъпателното движение се определя чрез векторното произведение на преносната ъглова скорост и радиус-вектора, съединяващ осите на преносното и относителното въртене на тялото:  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega_e \mathbf{AB}$
- обратно: векторът на скоростта на постъпателно движение може да се разглежда като резултат от движение, реализирано чрез въртелива двойца

## 2. Събиране на завъртания около пресичащи се оси.

- постановка на задачата:

Тяло се върти около ос, която от своя страна се върти около друга неподвижна ос, като осите се пресичат в точка  $O$ . При известни ъглови скорости на въртене около осите да се определи абсолютното движение на тялото (фиг.4). Точка  $M$  – произволна точка от тялото с радиус-вектор  $\mathbf{r}$ .



фиг.4

- *относително движение*: въртене с ъглова скорост  $\omega_r$  около оста  $z_r$ ,
- *преносно движение*: въртене с ъглова скорост  $\omega_e$  около оста  $z_e$ ,
- *абсолютно движение*: въртене с ъглова скорост  $\omega$  около моментната ос  $OP$
- по теоремата за събиране на скоростите

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

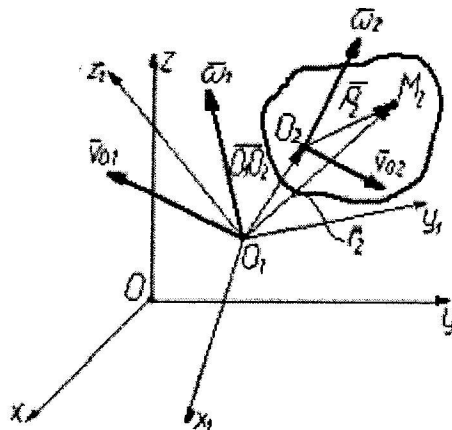
$$\mathbf{v}_a = \omega_a \times \mathbf{r} = \omega_e \times \mathbf{r} + \omega_r \times \mathbf{r} = (\omega_e + \omega_r) \times \mathbf{r};$$

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r \quad (2)$$

- *абсолютната ъглова скорост е векторна сума от относителната и преносната ъглова скорост*

### 3. Обща задача за относително движение на твърдо тяло.

- постановка на задачата:  
Тяло извършва произволно движение относно координатна система  $O_1x_1y_1z_1$ , която по произволен начин се движи относно неподвижна координатна система  $Oxyz$  (фиг.5). Да се определи абсолютното движение на тялото .
- движението на тялото относно  $O_1x_1y_1z_1$  (относително движение) се определя чрез скоростта (относителна скорост) на негов полюс  $O_2$  и относителната ъглова скорост  $\omega_r$ , минаваща през полюса  $O_2$  (която се явява и моментна ъглова скорост при движението относно  $O_1x_1y_1z_1$ )
- преносното движение (на  $O_1x_1y_1z_1$  спрямо  $Oxyz$ ) се определя чрез абсолютната скорост  $v_{01}$  на полюса  $O_1$  и вектора на ъгловата скорост  $\omega_a$  на въртене около моментната ос, минаваща през полюса  $O_1$ .
- Да се определи абсолютната скорост  $(v_{02})_a$  на полюса  $O_2$  и абсолютната ъглова скорост  $\omega_a$  на тялото



фиг.5

- $M$  – произволна точка от тялото с радиус-вектор  $r = OM$  спрямо  $Oxyz$  ;  
 $r_1 = O_1M$  спрямо  $O_1x_1y_1z_1$  ;  $r_2 = O_2M$  спрямо полюса  $O_2$  ;  $r_0 = OO_1$  - радиус-вектор на началото на  $O_1x_1y_1z_1$  спрямо  $Oxyz$  ;  $r' = O_1O_2$  - радиус-вектор на полюса  $O_2$  спрямо  $O_1x_1y_1z_1$

- за произволната точка М от израза за събиране на скоростите

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

$$\mathbf{v}_a = (\mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_1) + (\mathbf{v}_{O_2} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{r}_2) \quad (3)$$

от  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_2$  и след заместване в (3)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a &= (\mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_2) + (\mathbf{v}_{O_2} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{r}_2) = \\ &= \mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_{O_2} + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (4)$$

- преносна скорост на полюса  $O_2$ :  $\mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}' = (\mathbf{v}_{O_2})_e$
- абсолютна скорост на полюса  $O_2$ :  
 $(\mathbf{v}_{O_2})_a = \mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_{O_2} = (\mathbf{v}_{O_2})_e + \mathbf{v}_{O_2}$
- абсолютна скорост на точката М:  $\mathbf{v}_a = (\mathbf{v}_{O_2})_a + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{r}_2$
- от друга страна за абсолютната скорост на точката М:

$$\mathbf{v}_a = (\mathbf{v}_{O_2})_a + \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{r}_2 \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r \quad (6)$$

- теорема за събиране на движенията на твърдо тяло

*абсолютната скорост на произволна точка от твърдо тяло при най-общото му движение е равна на векторната сума на абсолютната скорост на произволна точка от тялото, избрана за полюс, и завъртането около моментната ос, минаваща през полюса, изразено чрез векторното произведение на моментната ъглова скорост и радиус-вектора на точката относно полюса*

- *разпределението на скоростите при абсолютното движение на твърдо тяло се определя чрез задаване на абсолютната скорост на полюса в тялото, равна на геометричната сума на преносната и относителната скорост на полюса, и абсолютната ъглова скорост на тялото, равна на геометричната сума на преносната и относителната ъглови скорости на тялото*