ЛЕКЦИЯ 8

Аналитична механика

Съдържание

1. Абсолютно, относително и преносно движение.
2. Събиране на скорости.
3. Събиране на ускорения.

1. Абсолютно, относително и преносно движение.

- обща постановка на задачата за относително движение:

  движението на дадена точка се определя спрямо две различни координатни системи, които се движат една спрямо друга по зададен закон;

  спрямо всяка координатна система се определят характеристиките на движението – траектория, скорост и ускорение

- задача:
  при известно движение на едната координатна система спрямо другата да се определи връзката между параметрите на движението на произволна точка относно всяка от координатните системи

- представяне на движението като *съставно движение*:
  - спрямо едната система (A) и движението на (A) спрямо друга система (B);
  - преминаване към описание на движението относно (B)

- <u>метод на относителното движение</u>:

  възможността за разлагане на сложно движение на точка на по-прости движения

- пример:

  Точка се движи равномерно и праволинейно по ос, която от своя страна се върти с постоянна ъглова скорост относно неподвижна равнина.

  Относно неподвижната равнина траекторията на точката е Архимедова спирала, докато съставното движение се представя като равномерно праволинейно движение по оста и равномерно въртене на оста около друга неподвижна ос.

- разглежда се движението на точка М спрямо две различни координатни системи:
  - *абсолютна* (неподвижна) координатна система Oxy и
  - *относителна* (подвижна, движеща се спрямо Oxy) система O'x'y'

  - *абсолютно движение*:
    - спрямо неподвижната координатна система Oxy;
    - индексиране на параметрите на абсолютно движение с долен индекс „a"

    пример: $\mathbf{v}_a$ - абсолютна скорост; $\mathbf{w}_a$ - абсолютно ускорение

  - *преносно движение:*
    - движението на системата O'x'y' спрямо системата Oxy;
    - индексиране на параметрите на преносното движение с долен индекс „e"

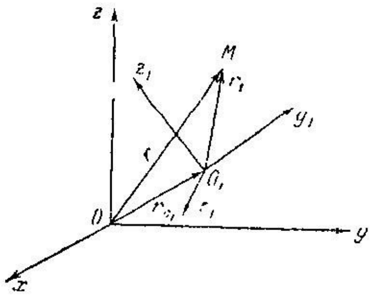
    пример: $\mathbf{v}_e$ - преносна скорост; $\mathbf{w}_e$ - преносно ускорение

  - *относително (релативно) движение*: спрямо координатната система O'x'y';
    - индексиране на параметрите на релативното движение с долен индекс „r"

    пример: $\mathbf{v}_r$ - релативна скорост; $\mathbf{w}_r$ - релативно ускорение

- определение:

  преносно движение на точка – движението на точката от относителната система, в която в даден момент се намира движещата се точка



фиг.1

- разглежда се движението на точка М (фиг.1)

  $$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}', \tag{1}$$

  където:

  $\mathbf{r}(x, y, z)$ - радиус-вектор на М в неподвижната координатна система Oxy

  $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ - радиус-вектор на началото O' в неподвижната система Oxy

  $\mathbf{r}'(x', y', z')$ - радиус-вектор на М в подвижната система O'x'y'

  връзка между координатите (x, y, z) и (x', y', z') на точка М в двете системи

  $$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' \\ y &= y_0 + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' \\ z &= z_0 + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' \end{aligned} \tag{2}$$

  (α_{ij}) - косинусите между единичните вектори на неподвижната и подвижната система, т.е. $(x, x') \rightarrow \cos(x, x') = \alpha_{11}$; $(x, y') \rightarrow \cos(x, y') = \alpha_{21}$

- уравнение на относителното движение на точката М

  $$x' = f_1(t), \quad y' = f_2(t), \quad z' = f_3(t) \tag{3}$$

  при зададени функции на времето $f_1(t), \quad f_2(t), \quad f_3(t)$

- уравнение на абсолютното движение на точката М – определя се от уравнението на относителното движение на точката и уравнението на движението на относителната система спрямо абсолютната, т.е. в десните части на (3) и (2) всички параметри са функции на времето

- разлика с уравнение на движението на твърдо тяло

  - координатите (x', y', z'), определящи точката като точка от твърдото тяло, сега не са постоянни величини, а са функции на времето, характеризиращи относителното движение на точката

  - уравнение на преносното движение: чрез фиксиране на (x', y', z') в (2), т.е. функции на времето са само косинусите (α_{ij}), изразени с Ойлеровите ъгли

  - траекторията на точката в абсолютната система се получава чрез изключване на времето от уравнението на абсолютното движение

  - траекторията на точката в относителната система се получава чрез изключване на времето от уравнението на относителното движение

  - заради движението на относителната система точката описва различни траектории спрямо всяка от двете системи

    пример: траекторията на моментния център на скоростите – неподвижна и подвижна центроида

- частни случаи:
  - равнинно движение (φ: ъгъл на завъртане между осите Ox и O'x')

$$x = x_0 + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \quad y = y_0 + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \qquad (4)$$

  - постъпателно движение (φ е нула при подходящ избор на осите Ox и O'x')

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y' \qquad (5)$$

  - въртене около неподвижна ос

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \quad y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \qquad (6)$$

2. Събиране на скорости.

- Векторна функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ на скаларен аргумент t.

- представяне в относителната система

$$\mathbf{r}(t) = r_{x'}\mathbf{i}' + r_{y'}\mathbf{j}' + r_{z'}\mathbf{k}',$$

$\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ - единични вектори по координатните оси

- *абсолютна производна*: производна по времето в абсолютната система

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr_{x'}}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dr_{y'}}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dr_{z'}}{dt}\mathbf{k}' + r_{x'}\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + r_{y'}\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + r_{z'}\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \qquad (7)$$

- *относителна производна*: производна по времето, когато $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ са неизменни в относителната система

$$\frac{d'\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr_{x'}}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dr_{y'}}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dr_{z'}}{dt}\mathbf{k}' \qquad (8)$$

- от представянето

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}'$$

за последните три събираеми на (7) се получава

$$r_{x'}\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + r_{y'}\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + r_{z'}\frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times(r_{x'}\mathbf{i}' + r_{y'}\mathbf{j}' + r_{z'}\mathbf{k}') = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

или $$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (9)$$

- *абсолютната производна на вектор по времето е равна на сумата от относителната производна на този вектор и векторното произведение на ъгловата скорост на относителната система със самия вестор*

- *проекциите на вектора на относителната производна по осите на относителната система са равни на производните от проекциите на вектора на тези оси*

$$\left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right)_{x'} = \frac{dr_{x'}}{dt}, \quad \left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right)_{y'} = \frac{dr_{y'}}{dt}, \quad \left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right)_{z'} = \frac{dr_{z'}}{dt} \qquad (10)$$

- *проекции на вектора на абсолютната производна по осите на относителната система*

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{x'} = \frac{dr_{x'}}{dt} + \omega_{y'}z' - \omega_{z'}y'$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{y'} = \frac{dr_{y'}}{dt} + \omega_{z'}x' - \omega_{x'}z' \tag{11}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{z'} = \frac{dr_{z'}}{dt} + \omega_{x'}y' - \omega_{y'}x'$$

- теорема за събиране на скоростите

от $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_a, \qquad \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{v}_0, \qquad \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}', \qquad \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}_r$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' + \mathbf{v}_r \tag{12}$$

- *преносна скорост* $\quad \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' \quad$ (13)

  смисъл: скоростта на фиксираната в относителната система точка, в която в дадения момент се намира движещата се (и спрямо относителната координатна система) разглеждана точка

  или:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \tag{14}$$

абсолютната скорост на точка е равна на сумата на преносната и относителната скорост

3. Събиране на ускорения.

- от израза за събиране на скоростите
  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' + \mathbf{v}_r$

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \tag{15}$$

$\dfrac{d\mathbf{r}'}{dt} = \dfrac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'$ - чрез локалното диференциране

- означения: $\dfrac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{w}_a$; $\dfrac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{w}_0$ - в абсолютната система

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{d'\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r = \mathbf{w}_r + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r,$$

$$\frac{d'\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{w}_r; \qquad \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}_r; \qquad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \left(\frac{d'\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r\right) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\right)$$

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r \tag{16}$$

означения:

- $\mathbf{w}_a$: *абсолютно ускорение*
- $\mathbf{w}_r$: *относително ускорение*
- $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')$: *преносно ускорение*
- $\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r$: *Кориолисово ускорение*

❖ смисъл на Кориолисовото ускорение:

- едното събираемо $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r$ следва от изчисление на абсолютната производна на относителната скорост $\mathbf{v}_r$; изразява изменението на вектора на относителната скорост $\mathbf{v}_r$, обусловено от завъртането му заедно с относителната координатна система

- второто събираемо $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r$ следва от изчисление на абсолютната производна на преносната скорост, обусловено от изменението на относителния радиус-вектор на точката

- теорема за събиране на ускоренията

$$\mathbf{w_a} = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c \tag{17}$$

абсолютното ускорение е сума на относителното, преносното и Кориолисовото ускорение

- частни случаи:
  - $\mathbf{w}_c = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$: постъпателно движение на относителната система

    $\Rightarrow \boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}_r$: движението на точката е успоредно на оста, около която се върти относителната система)
  - големината на Кориолисовото ускорение е $w_c = 2\omega v_r$ (точката се движи в равнина, перпендикулярна на оста, около която се върти относителната система)

Пример: Лента се движи с постоянна скорост „с“ между два барабана, като се размотава от десния и се намотава на левия. По лентата се записват сигнали от регистриращо устройство, снабдено с писец, който извършва вертикални колебания, дадени със закона $x = 0; y = a\sin(\omega t + \alpha)$. Да се намерят уравненията на движение на писеца относно движещата се лента и уравнението на изчертаната на лентата крива, т.е. относителната траектория.

Системата O'x'y' се движи спрямо системата Oxy постъпателно, така че

$0 = x_0 + x'$, $y = a\sin(\omega t + \alpha) = y_0 + y'$

В случая $x_0 = -ct$; $y_0 = 0$

тогава $x' = ct$, $y' = a\sin(\omega t + \alpha)$

Относителната траектория, изчертана на лентата, се явява синусоида с уравнение $y' = a\sin(\frac{\omega x'}{c} + \alpha)$

Амплитудата и фазата на записваните колебания се предават без изкривяване, докато честотата е свързана със скоростта „с“.