ЛЕКЦИЯ 5

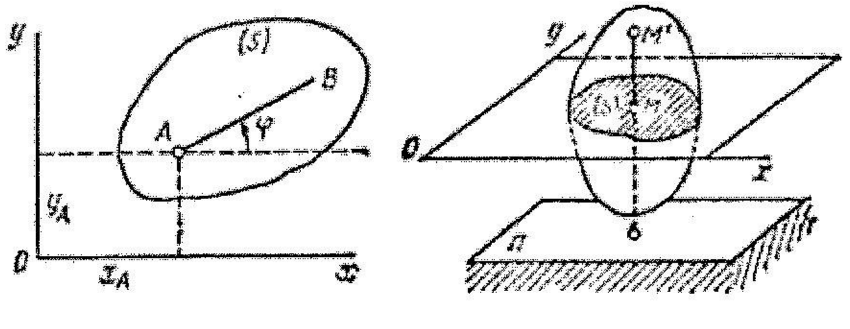
Аналитична механика

Съдържание

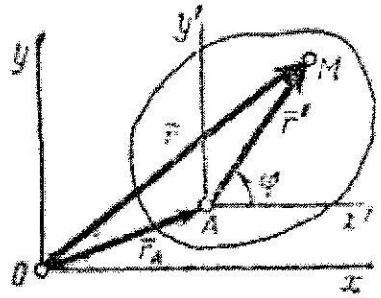
1. Равнинно движение на тяло.

- *Равнинно движение:* всички точки от тялото остават в равнина, успоредна на някаква неподвижна равнина по време на движението

- изучаването на равнинното движение на тяло се свежда до определяне на движението на една равнинна фигура в нейната равнина



фиг.1



фиг.2

- означения
  - Oxy : неподвижна координатна система
  - A x'y' : координатна система, фиксирана в тялото (А- полюс)
  - M : произволна точка от тялото
  - $\mathbf{r}$: радиус-вектор на M относно Oxy с координати (x,y)
  - $\mathbf{r}'$: радиус-вектор на M относно A x'y' с координати (x',y')
  - $\mathbf{r}_A$: радиус-вектор на A относно Oxy с координати (x_0,y_0)
  - φ : ъгъл на завъртане около полюса

- равнинното движение на тяло се определя от:
  - уравнението на движение на основната точка (полюс)

$$x_o = f_1(t), \qquad y_o = f_2(t) \tag{1}$$

  - уравнението на въртене около основната точка

$$\varphi = \varphi(t) \tag{2}$$

от

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}' \tag{3}$$

$$x = x_0 + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = y_0 + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \tag{4}$$

- уравненията (4) – параметрични уравнения на точката M; траекторията се получава чрез изключване на времето
- функциите x_0 , y_0 , φ - зададени функции на времето

2. Преместване на равнинна фигура.

- всяко преместване на равнинна фигура се представя от две движения:
  - *постъпателно*; (зависи от избора на полюса)

- *завъртане около полюса*; (не зависи от избора на полюса)

- вектор на малките завъртания $\boldsymbol{\theta}$:
  - *големина*, равна на големината на ъгъла на завъртане
  - *направление*, перпендикулярно на равнината на преместване
  - *посока* съгласно правилото за положително завъртане

- представяне на преместването на произволна точка чрез вектора на малките завъртания $\boldsymbol{\theta}$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}' \qquad (5)$$

- теорема на Ойлер:

Всяко непостъпателно преместване на равнинна фигура може да се представи като едно завъртане около някакъв център

Доказателство: преместването на равнинна фигура се определя от преместването на две произволни точки от нея, $A \to A_1$ и $B \to B_1$, т.е. $AB \to A_1B_1$. Пресечната точка C на симетралите на AA_1 и BB_1 е център на ротация с ъгъл $< ACA_1$. Разстоянията от C до точки A и B заедно с отсечката AB образуват еднозначно определен триъгълник ΔCAB, еднакъв с триъгълника ΔCA_1B_1 по три страни; ъгълът $< ACA_1$, довеждащ $A \to A_1$, довежда ΔCAB в ΔCA_1B_1

- частни случаи:
  - симетралите на AA_1 и BB_1 съвпадат – центърът на завъртане е пресечна точка на правите AA_1 и BB_1, ако не са успоредни
  - симетралите на AA_1 и BB_1 съвпадат и правите AA_1 и BB_1 са успоредни, център на завъртане не съществува; преместването е постъпателно
  - при успоредни симетрали център на завъртане не съществува; преместването е постъпателно

3. Поле на скоростите на точките на равнинна фигура.

- нека Δt е интервал, за който се извършва преместването ;
  от $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'$

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{p}_0}{\Delta t} + \lim_{t \to 0} \left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\Delta t} \times \mathbf{r}' \right) \qquad (6)$$

$\mathbf{v}_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{p}_0}{\Delta t}$ - скорост на полюса;

$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}$ - ъглова скорост на фигурата

- ***Поле на скоростите на точките на равнинна фигура***

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \qquad (7)$$

проектиране (7) на неподвижните оси ($v_{0x} = \dot{x}_0$; $v_{0y} = \dot{y}_0$; $\omega = \dot{\varphi}$)

$$v_x = v_{0x} - \omega(y - y_0), \quad v_y = v_{0y} + \omega(x - x_0),$$

където $(0,0,\omega)$ са координатите на ъгловата скорост

- въртене около неподвижна ос: $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ и $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$
- постъпателно движение: $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$

- абсолютно, относително и преносно движение
  - *абсолютно*: спрямо неподвижна координатна система Oxy
  - *относително*: спрямо подвижна система A x'y'
  - *преносно*: движението на системата A x'y' спрямо системата Oxy

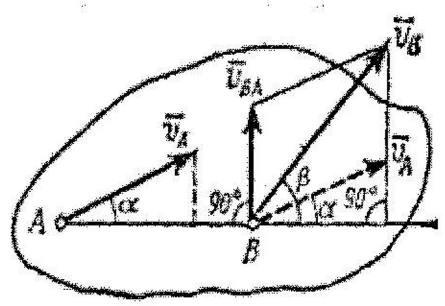
- абсолютното движение на равнинна фигура може да се разглежда като съставено от две движения: преносно (определено от полюса, постъпателно) и относително (въртене около полюса)

- *следствие*: скоростта на въртене около полюса е равна на производната по времето на локалния (относно полюса) радиус-вектор на точката

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \tag{8}$$

- теорема:

  Проекциите на скоростите на крайните точки на отсечка AB върху правата AB са равни



фиг.3

означения: $\mathbf{v}_{AB}$ - скорост на точка B, разглеждана като въртяща се около полюса A

$\mathbf{r}'_{AB}$ - радиус-вектор на B относно A

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB}, \qquad \mathbf{v}_{AB} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{AB} \tag{9}$$

4. Моментен център на скоростите.

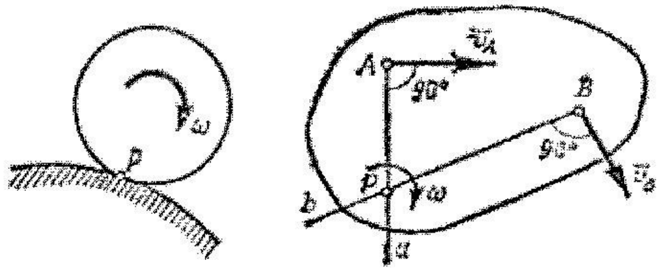
- при всяко непостъпателно движение на равнинна фигура съществува точка, чиято скорост в даден момент е нула - *моментен център на скоростите*

  - за всяка точка M: $\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AM}$, където $\mathbf{v}_{\mathrm{AM}} = \boldsymbol{\omega} \times \vec{AM}$
  - $v_M = v_A + \omega\, AM$
  - отсечка $AP = \dfrac{v_A}{\omega}$ по издигнат от полюса A перпендикуляр:

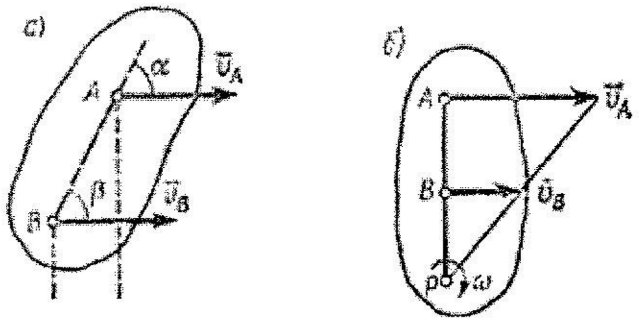
  $$v_P = v_A - \omega\, AP = v_A - \omega \frac{v_A}{\omega} = 0$$

- за всеки полюс P, съвпадащ с моментния център ($v_p = 0$)

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{PA} = \omega \times \vec{PA}; \qquad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{PB} = \omega \times \vec{PB}$$



фиг.4



фиг.5

- *разпределение на скоростите в тялото*: скоростите на точки от равнинна фигура могат да се разглеждат като скорости на въртене около ос през моментния център, а самият моментен център - като център на въртене на фигурата

- моментният център заема различни положения във всеки момент от време както в движещата се равнинна фигура, така и в неподвижната равнина

- връзка между координатите на неподвижната координатна система Oxy и фиксираната в тялото координатна система O'x'y' (O'- полюс)

$$x = x_0 + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$

$$y = y_0 + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

- радиус-вектор на моментния център P

от $\mathbf{0} = \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_P$, (умножение отляво векторно с $\boldsymbol{\omega}$):

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_P=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'_P)=\mathbf{0}\ ;$$

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_0+(\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{r}'_P)\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}'_P=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_0-(\boldsymbol{\omega}^2)\mathbf{r}'_P$$

$$\mathbf{r}'_P=\frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_0) \tag{10}$$

- координати на моментния център

  - в неподвижната координатна система Oxy

$$x=x_0-\frac{v_{0y}}{\omega}\ ,\ y=y_0+\frac{v_{0x}}{\omega} \tag{11}$$

  - в подвижната координатна система O’x’y’

$$x'=\frac{1}{\omega}(v_{0x}\sin\varphi-v_{0y}\cos\varphi)\,,\qquad y'=\frac{1}{\omega}(v_{0x}\cos\varphi+v_{0y}\sin\varphi) \tag{12}$$

5. Центроиди.

- подвижна центроида – траекторията на моментния център в подвижната координатна система

- неподвижна центроида – траекторията на моментния център в неподвижната координатна система

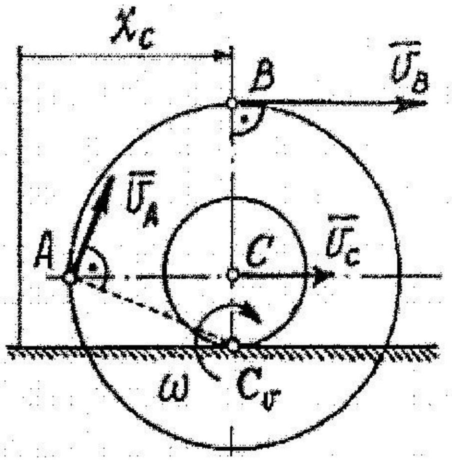
- *моментният център е обща точка на двете траектории – подвижната и неподвижната центроида, във всеки момент*

- скоростта на моментния център е по допирателната към всяка от траекториите; *двете центроиди се допират в моментния център*

- при движение на равнинна фигура подвижната центроида се търкаля без хлъзгане по неподвижната центроида

6. Пример.

Тяло е съставено от два свързани концентрични диска с различни радиуси R=4 и r=2, като малкият диск се търкаля по неподвижна равнина. Траекторията на центъра му C се дава с x_c=3t. Да се определят скоростите на точки A, B и C (фиг.6).

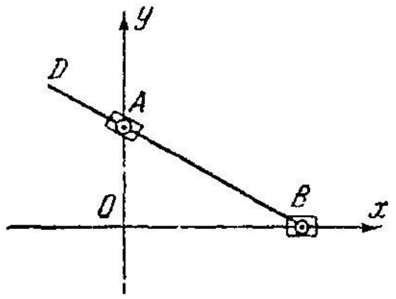


фиг.6

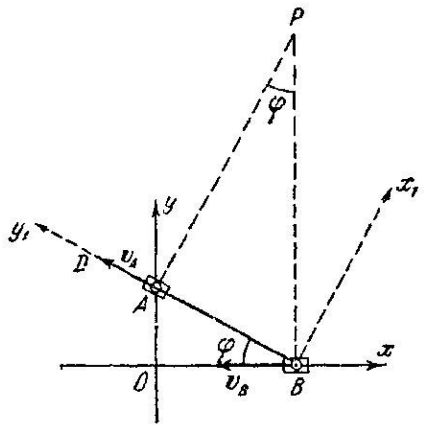
Моментен център - C_v. Скорост на C - $v_C = \dot{x}_C = 3$. Ъглова скорост: $\omega = \dfrac{v_C}{r} = \dfrac{3}{2}$.

$v_A = \omega\, AC_v = \omega\sqrt{r^2 + R^2} = 6.71$; $v_B = \omega\, BC_v = \omega(r + R) = 9$

Задача. Краят B на прът шарнирно е закрепен към направляваща, движеща се хоризонтално. Прътът минава през шарнир A, който може да се върти около ос, перпендикулярна на равнината на движението (фиг.7); разстоянието OA= a. Да се намерят уравненията на неподвижната и подвижната центроиди.



фиг.7



фиг.8

Неподвижна координатна система: Oxy (фиг.7); подвижната координатна система Bx_1y_1 (фиг.8). Моментен център на скоростите – P.

Неподвижната центроида – геометрично място на моментните центрове в неподвижната равнина. Координати на P в неподвижната равнина :

$$x_P = \frac{a}{tg\varphi}; \qquad y_P = \frac{AB}{\sin\varphi} = \frac{AO}{\sin^2\varphi} = \frac{a}{\sin^2\varphi}$$

Изключване на ъгъла:

$$x_P^2 = a^2\frac{1-\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}; \qquad \sin^2\varphi = \frac{a}{y_P} \qquad \Rightarrow \quad x_P^2 = a(y_P - a)$$ - уравнение на

неподвижната центроида (парабола)

Координати на P в подвижната равнина :

$$x_1 = BP\cos\varphi = \frac{a}{\sin^2\varphi}\cos\varphi \ , \ y_1 = AB = \frac{a}{\sin\varphi}$$

Изключване на ъгъла:

$$\sin\varphi = \frac{a}{y_1}, \qquad x_1 = \frac{ay_1^2}{a^2}\sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{y_1^2}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{y_1^2}}$$

$\Rightarrow \quad a^2x_1^2 = ay_1^2(y_1^2 - a^2)$ - уравнение на подвижната центроида