ЛЕКЦИЯ 4

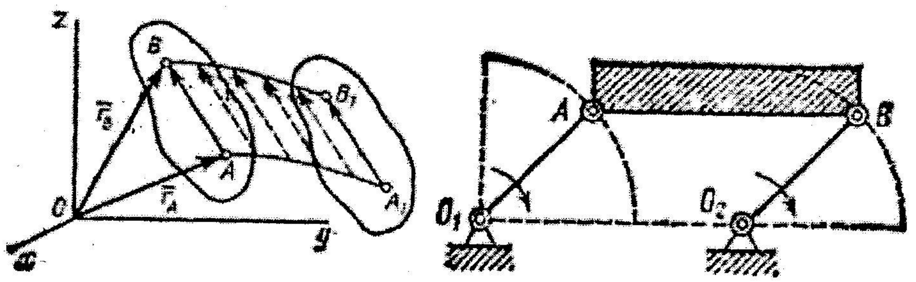
Аналитична механика

Съдържание

1. Постъпателно движение на твърдо тяло.

- всяка права, минаваща през две точки от тялото, остава успоредна на себе си по време на движението

- точките от постъпателно движещо се тяло: произволни криволинейни траектории, едни и същи за всички точки; във всеки момент от време точките имат еднакви скорости и ускорения



фиг.1

нека A и B са точки от тялото и имат някакво положение в момент t и положение A_1 и B_1 в положение $t + \Delta t$.

от определението на тялото като абсолютно твърдо: отсечките AB и A_1B_1 имат равни дължини

от определението за постъпателно движение: $AB \| A_1B_1$

$\Rightarrow ABA_1B_1$ е успоредник $\Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$

- конгруентни криви – траекториите на точките от постъпателно движещо се твърдо тяло

нека M и O' са точки от тялото, а O - произволна неподвижна точка

радиус-векторът на M относно O е

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{o'} + \mathbf{r}' \qquad (1)$$

траекторията на M се получава от траекторията на O' в резултат на преместване на вектор $\mathbf{r}'$, който е постоянен по големина и посока

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_{o'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{o'} \qquad (2)$$

скоростите на всички точки от постъпателно движещо се тяло във всеки момент от време са равни по големина и посока

аналогично

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}_{o'}}{dt} \Rightarrow \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_{o'} \qquad (3)$$

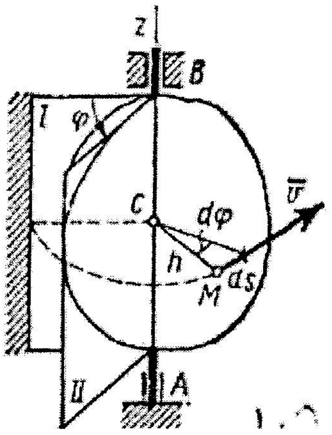
ускоренията на всички точки от постъпателно движещо се тяло във всеки момент от време са равни по големина и посока

- постъпателното движение на твърдо тяло напълно е определено, ако е известно движението на една произволна негова точка

2. Въртене на тяло около неподвижна ос.

- движение, при което две точки от тялото остават неподвижни

- ос на въртене – правата през неподвижните точки



фиг.2

- нека за определеност ос на въртене е оста Oz

- неподвижна равнина I и свързана с тялото (подвижна) равнина II минават през оста Oz

- двустенният ъгъл φ между равнините напълно определя положението на тялото

- уравнение на движението на тялото

$$\varphi = f(t) \qquad (4)$$

3. Ъглова скорост и ъглово ускорение.

- ъглова скорост на тялото ω

$$\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad , \qquad (5)$$

където φ_1 и φ_2 са стойности на ъгъла φ в моментите t_1 и t_2

- мерни единици: $[s^{-1}]$ или [rpm] – обороти в минута
- връзка $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$ n - брой обороти в минута

- ъглова скорост в даден момент

$$\omega = \lim_{\Delta j \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = f'(t) \qquad (6)$$

- средно и моментно ъглово ускорение

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad , \quad \varepsilon = \lim_{\Delta j \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (7)$$

- равнопроменливо въртене (постоянно ъглово ускорение)

$$d\omega = \varepsilon\, dt \quad \Rightarrow \quad \omega = \varepsilon t + \omega_0 ; \ \ \omega_0 \text{ - стойност при } t = 0 \qquad (8)$$

$$d\varphi = \omega\, dt \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0 ; \ \ \varphi_0 \text{ - стойност при } t = 0 \qquad (9)$$

- след изразяване на времето от (8) и заместване в (9):

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon} \qquad (10)$$

4. Скорост и ускорение на точки на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос.

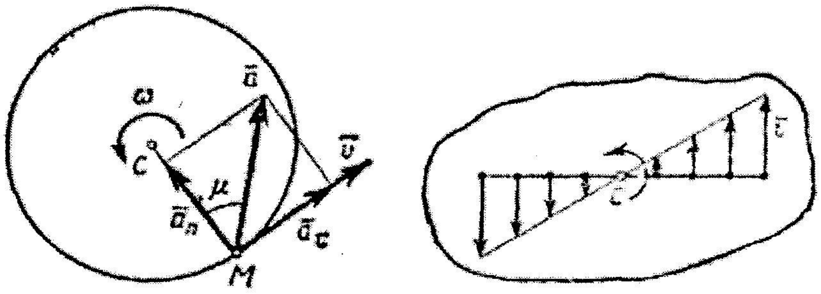
- траектория на точка от твърдо тяло, въртящо се около ос – окръжност с радиус разстоянието h от точката до оста; отчитане – чрез дъга

$$\sigma = h\varphi$$

$$v = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt}(h\omega) = h\frac{d\varphi}{dt} = h\omega \quad - \quad \textit{линейна скорост}$$

- *разпределение на скоростите в тялото*: пропорционални на разстоянието до оста и перпендикулярни на равнината, минаваща през оста на въртене и съответната точка

- сравнение с движението по окръжност и общите изрази за проекциите на ускорението по допирателната към траекторията и по главната нормала



фиг.3

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(h\omega) = \varepsilon h, \qquad w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h \qquad (12)$$

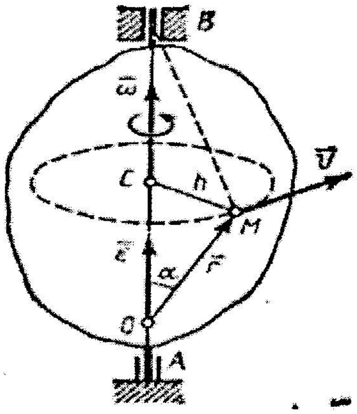
- термини: тангенциално и нормално (въртеливо и центростремително или въртеливо и осестремително)

- аналогични изрази за големината на ускорението и ъгъла между големините на центростремителното и пълното ускорение

$$w = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,, \quad tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \tag{13}$$

- частни случаи
- равномерно въртене: $\varepsilon = 0$
- минимална или максимална ъглова скорост: $w_\tau = 0$
- минимална или максимална стойност на ъгъла: $w_n = 0$

5. Векторни изрази за скоростите и ускоренията на точки на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос.



фиг.4

- вектор на ъгловата скорост : $\boldsymbol{\omega}$, където $\omega = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$; посока – по оста на въртене

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{14}$$

- псевдовектори: посоката им се изменя на противоположна в зависимост от записването им в лява или дясна координатна система

- проекции на скоростта в Декартова система (формули на Ойлер)
  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y\,, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z\,, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x$$

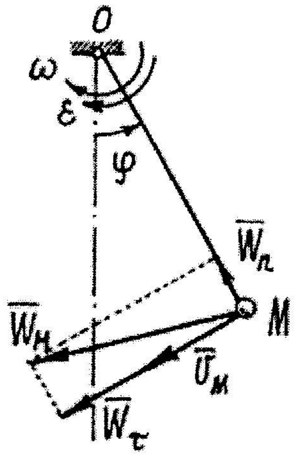
- вектор на ускорението:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \tag{15}$$

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \tag{16}$$

- въртеливо и центростремително ускорение $\mathbf{w}^{\tau} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$, $\mathbf{w}^{n} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$

Пример: Махало ОМ с дължина $l = 1\,\mathrm{m}$ се люлее във вертикална равнина, като ъгълът на колебание се изменя по закона $\varphi = 0.5\sin 2t$.



фиг.5

ъглова скорост: $\omega = \dot{\varphi} = \cos 2t$

ъглово ускорение: $\varepsilon = \ddot{\varphi} = -2\sin 2t$

при $t = 1\,\mathrm{s}$: $\varphi = 0.5\sin 2 = 0.45\ rad \approx 26^{o}$,

$\omega = \dot{\varphi} = \cos 2 = -0.42\ s^{-1}$

$\varepsilon = \ddot{\varphi} = -2\sin 2 = -1.82\ s^{-2}$

скорост на точка М: $v_M = l\,\omega = 1.0.42 = 0.42\ ms^{-1}$

нормално ускорение: $w_n = l\omega^2 = 1.0.42^2 = 0.176\ ms^{-2}$

тангенциално ускорение: $w_\tau = l\varepsilon = 1.1.82 = 1.82\ ms^{-2}$

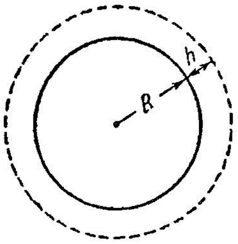
големина на пълното ускорение : $w_M = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = 1.828\ ms^{-2}$

Два типа задачи при движение **на** твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос.

I. Дадено е уравнението на движение. Да се определи ъгловата скорост, ъгловото ускорение, скоростта и ускорението на точка от твърдото тяло.
1. Избор на координатна система, в която една от осите съвпада с оста на въртене.
2. Съставяне на уравнението на движение – зависимост на ъгъла на завъртане от времето.
3. Диференциране по времето на ъгъла на завъртане – определяне на проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене.
4. Определяне на втората призводна на ъгъла на завъртане - определяне на проекцията на ъгловото ускорение на оста на въртене.
5. Чрез проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене – изчислява се линейната скорост и нормалното ускорение на точка от тялото.
6. Чрез проекцията на ъгловото ускорение на оста на въртене – изчислява се тангенциалното ускорение на точка от тялото.
7. Чрез тангенциалното и нормалното ускорение - изчислява се пълното ускорение по големина и посока на точка от тялото.

II. Дадено е ъгловото ускорение или ъгловата скорост на твърдото тяло. Да се определи уравнението на движение, скоростта и ускорението на точка от твърдото тяло.
1. Интегриране на израза за проекцията на ъгловото ускорение на оста на въртене – определяне на проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене; интеграционната константа се намира от дадените начални условия.
2. Интегриране на израза за проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене - определяне на уравнението на движение на тялото; интеграционната константа се намира от дадените начални условия.
3. Чрез проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене – изчислява се линейната скорост и нормалното ускорение на точка от тялото.
4. Чрез проекцията на ъгловото ускорение на оста на въртене – изчислява се тангенциалното ускорение на точка от тялото.
5. Чрез тангенциалното и нормалното ускорение - изчислява се пълното ускорение по големина и посока на точка от тялото.

Задача 1. Изкуствен спътник прави една обиколка на Земята за 1 ч 36 мин. Да се определи честотата му, скоростта и ускорението му, ако орбитата е кръгова, височината над земната повърхност е h=970 км, радиусът на Земята – R=6370 км.



честота: 1 ч 36 мин = 96 мин, т.е. $n = \frac{1}{96}$ об/мин.

ъглова скорост: $\omega = \frac{1}{96}\frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{2880} = 0.00109\ [1/s]$

ъглова скорост на Земята: (за 24 ч – един оборот около оста си)

$$n_1 = \frac{1}{24}\ [\text{об/час}] = \frac{1}{24.60} - \frac{1}{1440}\ [\text{об/мин}]$$

отношение на честотите: $\frac{n}{n_1} = \frac{24.60}{96} = 15$

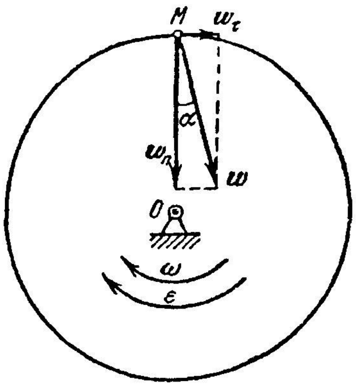
скорост на спътника: $v = (h+R)\omega$, т.е. $v = (970+6370)\frac{\pi}{2880} = 8\ [\text{км/s}]$

тангенциално ускорение: нула (ъгловата скорост на Земята е постоянна)

нормално ускорение: (насочено към центъра на Земята)

$$w = w_n = (h+R)\omega^2 = (970+6370)\frac{\pi^2}{2880^2} = 0.00874\ [\text{км/s}^2]$$

Задача 2. При пускане на електромотор ъгловото му ускорение расте пропорционално на времето и след 6 сек ъгловата му скорост стига 36π [1/сек]. Да се намери броят на оборотите за това време, скоростта и ускорението на точка М в третата секунда. Диаметър на ротора – 20 см.



по условие $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = kt$

интегриране и отчитане на началните условия, както и стойността в шестата секунда: $\omega = \frac{kt^2}{2}$, $36\pi = \frac{k6^2}{2}$

коефициентът на пропорционалност и ъгловата скорост са:

$k = 2\pi$; $\omega = \pi t^2 = \pi 3^2 = 9\pi$ [1/s]

големината на линейната скорост на точката: $v = \omega \frac{d}{2} = 0.9\pi$ [m/s]

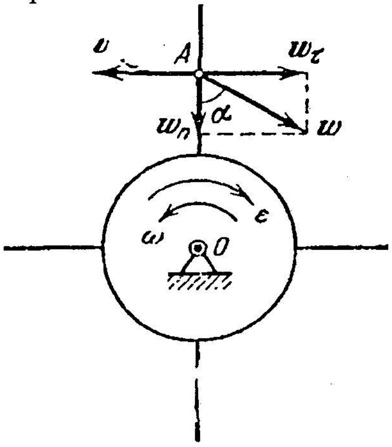
нормалното ускорение: $w_n = \omega^2 \frac{d}{2} = 81\pi^2.10 = 8.1\pi^2$ [m/s^2]

тангенциално ускорение: $w_\tau = \varepsilon \frac{d}{2} = 20\pi.3 = 0.6\pi$ [m/s^2]

пълно ускорение: $w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = 0.3\pi\sqrt{729\pi^2 + 4}$ [m/s^2]

ъгъл между пълното ускорение и радиуса: $tg\alpha = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{2\pi t}{(\pi t^2)^2} = 0.0236$

Задача 3. Вал с присъединени към него пластинки се върти по закона $\varphi = a\ln(1 + \frac{\omega_0 t}{a})$, свързващ ъгъла на въртене на вала с времето; останалите коефициенти са постоянни. Да се намери ъгловата скорост и ъгловото ускорение на вала, скоростта и ускорението на точка A от пластинката, намираща се на разстояние R от оста на въртене.



ъглова скорост: $\omega = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\omega_0}{1 + (\omega_0 / a)t}$: ъглово ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dz} = -\frac{\omega_0^2}{(1 + (\omega_0 / a)t)^2}\frac{1}{a}$

скорост на точката A: $v = R\omega = \frac{R\omega_0}{1 + (\omega_0 / a)t}$

нормално ускорение: $w_n = R\omega^2 = \dfrac{R\omega_0^2}{(1+(\omega_0/a)t)^2}$

тангенциално ускорение: $w_\tau = R\varepsilon = -\dfrac{R\omega_0^2}{a(1+(\omega_0/a)t)^2}$

пълно ускорение: $w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = \dfrac{R\omega_0^2}{a(1+(\omega_0/a)t)^2}\sqrt{1+a^2}$

ъгъл между пълното ускорение и радиуса, свързващ точката с оста на въртене: (ъгълът е в противоположна посока на посоката на въртене)

$$tg\alpha = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = -\frac{1}{a}$$