# ЛЕКЦИЯ 24

# Аналитична механика

*Съдържание*



## 1. Уравнения Лагранж от първи род.

- разглежда се на система от точки $M_i$ с маси $m_i$ $(i = 1,...,n)$, чието положение се определя от координатите им $(x_i, y_i, z_i)$, като на системата са наложени $s$ холономни връзки

$$\Phi_\alpha(t, x_1, y_1, z_1, ....., x_n, y_n, z_n) = 0\,, \quad (\alpha = 1,..., s)\,, \tag{1}$$

- вариациите на (1) имат вида

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0\,, \qquad (\alpha = 1,..., s) \tag{2}$$

- за системата независимите виртуални премествания са $3n - s = k$ на брой, където $k$ са степените на свобода
- всяко уравнение на (2) се умножава с неопределен множител $\lambda_\alpha$ и след сумиране с общото уравнение на динамиката, взето във формата $\sum_{i=1}^{n}[(F_{ix} - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (F_{iy} - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (F_{iz} - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i] = 0$, се стига до вида (3), където събираемите са групирани така, че да се обособят коефициентите пред виртуалните премествания:

$$\sum_{i=1}^{n}[(F_{ix} - m_i\ddot{x}_i + \sum_{\alpha=1}^{s}\lambda_\alpha\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i})\delta x_i + \left(F_{iy} - m_i\ddot{y}_i + \sum_{\alpha=1}^{s}\lambda_\alpha\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i}\right)\delta y_i + \left(F_{iz} - m_i\ddot{z}_i + \sum_{\alpha=1}^{s}\lambda_\alpha\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i}\right)\delta z_i] = 0$$

- част от множителите $\lambda_\alpha$ ($s$ на брой) се определят от условието да приравнят на нули $s$ на брой изрази в кръглите скоби на последния израз

- останалите събираеми от този вид са $3n-s$ на брой, умножени с $3n-s$ на брой независими вариации на координатите, т.е. те трябва да са равни на нула заради произволността на независими вариации на координатите
- последният израз се разпада на система от $3n$ уравнения, наречени *уравнения Лагранж от първи род:*

$$m_i\ddot{x}_i = F_{ix} + \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i}, \quad (i=1,...,n)$$

$$m_i\ddot{y}_i = F_{iy} + \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i}, \quad (i=1,...,n) \tag{4}$$

$$m_i\ddot{z}_i = F_{iz} + \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i}, \quad (i=1,...,n)$$

- системата (4) има $3n$ уравнения с $3n+s$ неизвестни: $3n$ координати $(x_i, y_i, z_i)$ и $s$ множители $\lambda_\alpha$
- сравнение с уравненията на движение на несвободна система, където (съгласно принципа на освобождаването) въздействието на връзките е заменено със силите на реакциите на връзките:

$$m_i\ddot{x}_i = F_{ix} + N_{ix}, \; m_i\ddot{y}_i = F_{iy} + N_{iy}, \; m_i\ddot{z}_i = F_{iz} + N_{iz} \tag{5}$$

от (4) и от (5) следва:

$$N_{ix} = \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i}, \quad N_{iy} = \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i}, \quad N_{iz} = \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i} \tag{6}$$

Или *решението на системата, съставена от (4) и (1), определя не само движението на точките на механичната система, а и <u>реакциите на връзките</u>.*
- От (4) се избират произволно $s$ уравнения, от които се изразяват $s$ множителя $\lambda_\alpha$, които се заместват в останалите $3n-s$ уравнения; те заедно с уравненията на връзките (които са $s$ на брой) образуват нова система от $3n$ уравнения – от нея се определят $3n$ координати $(x_i, y_i, z_i)$ като функции на времето. След това се определят и множителите $\lambda_\alpha$, а чрез тях от (6) – и реакциите на връзките.

**2. Уравнения Лагранж от втори род.**

- Разглежда се система с $k$ степени на свобода, подчинена на идеални холономни връзки. Положението ѝ се определя чрез $k$ независими обобщени координати. Радиус-векторът $\mathbf{r_i}$ на произволна точка се изразява чрез обобщените координати

$$\mathbf{r_i} = \mathbf{r}_i(t, q_1, q_2, .., q_k), \quad (i=1,...,n) \tag{7}$$

- Виртуалните премествания $\delta\mathbf{r}_i$ имат вида $\delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i}\delta q_i$ (8)
- скоростите на точките се изразяват като $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j,$ (9)

т.е. зависят *линейно* от обобщените скорости $\dot{q}$

- за произволен индекс $\alpha$ от (9) следва $$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \qquad (10)$$

- след диференциране на (9) по $q_\alpha$ се получава $$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha \partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_j}\dot{q}_j \qquad (11)$$

- от друга страна непосредственото диференциране на $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}$ води до

  $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_\alpha}\dot{q}_j$, което е точно дясната част на (11);

  Или $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}$, т.е. $$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \qquad (12)$$

- от общото уравнение на динамиката, където ускорението $\mathbf{w}_i$ е записано като $\dot{\mathbf{v}}_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \delta \mathbf{r}_i = 0 \qquad (13)$$

- но $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j$, а второто събираемо на (13) се преобразува до

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j \qquad (14)$$

- изразът в скобите на дясната част на (14) се преобразува до

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)$$

  но

  $\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = T$ е кинетичната енергия на системата; тогава за (14) се получава

  $\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j$ и (13) окончателно се записва като

$$\sum_{j=1}^{k}\left(Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j = 0 \qquad (15)$$

- заради произволния избор на $\delta q_j$ (15) се изпълнява само когато коефициентите пред $\delta q_j$ са нули , т.е.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1,\ldots,k) \qquad (16)$$

Изразите (16) се наричат <u>*уравнения Лагранж от втори род*</u>; те са в независими обобщени координати за система с холономни връзки. Представляват система от $k$ на брой ($k$-степени на свобода) обикновени диференциални уравнения от втори ред относно $k$ независими обобщени координати, които са търсените функции на времето.

- ако всички сили са консервативни, т.е. $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$, $(j = 1,...,k)$, (16) приема вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \qquad (j = 1,...,k) \qquad (17)$$

и като се отчете, че потенциалната енергия не зависи от обобщените скорости:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1,...,k) \qquad (18)$$

- определение: *функция на Лагранж* (кинетичен потенциал)

$$L(t, q_1, q_2, .., q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ...\dot{q}_k) = T - \Pi \qquad (19)$$

- уравненията на Лагранж от втори род се записват като

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad (j = 1,...,k) \qquad (20)$$

3. **Интеграл на енергията.**

- при стационарни връзки пълната производна на функцията на Лагранж има вида $\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_i\right)$; от (20) следва $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ и след заместване се получава

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{k}\left( \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_i\right) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_i\right) \qquad (21)$$

или $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_i\right)$, което се записва като $\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_i\right) - L\right) = 0$, (22)

от което следва, че изразът в скобите е константа, т.е. се стига до първи интеграл на уравненията на Лагранж от втори род, наречен *интеграл на енергията*

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_i - L = h \qquad (23)$$

- при стационарни връзки (23) изразява закона за запазване на механичната енергия Времето не участва явно и в уравненията фигурират само обобщените координати $q_i$ и обобщените скорости $\dot{q}_i$. Кинетичната енергия се представя като квадратична форма (хомогенна функция от втора степен) на обобщените скорости:

$$v_i^2 = \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) = \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_j\dot{q}_\alpha,$$

$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} A_{j\alpha}\dot{q}_j\dot{q}_\alpha$, където $A_{j\alpha} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}$, като $A_{j\alpha} = A_{\alpha j}$; От друга страна $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k} 2A_{j\alpha}\dot{q}_\alpha$ и след умножаване с $\dot{q}_j$ на двете страни на последното равенство и последващо сумиране по $j$ се стига до $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = \frac{1}{2}(\sum_{\alpha=1}^{k} 2A_{j\alpha}\dot{q}_\alpha)\dot{q}_j = 2T$

Тогава от (23) $\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_i - L = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_i - L = 2T - (T - \Pi) = T + \Pi$, $h = T + \Pi$

*Константата $h$ представлява пълната механична енергия на системата, която е равна на сумата от началните стойности на кинетичната и потенциалната енергия.*

- *циклични координати*: обобщени координати, които <u>не влизат явно</u> във функцията на Лагранж

  Примери:

  -при движение на точки при отсъствие на съпротивление $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$, $\Pi = \sum_{i=1}^{n} m_i g z_i$, т.е. координатите $x$ и $y$ са циклични

  - при движение на точка под действие на централна сила $\Pi = f(r)$, $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$, ъгловата координата $\varphi$ е циклична

- от дефиницията на циклични координати следва ($\nu$ - брой на цикличните координати) $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, $(j = 1,...,\nu)$ и уравненията на Лагранж се свеждат до

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \text{ т.е. } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = const, \qquad (j = 1,...,\nu) \qquad (24)$$

  Последните изрази са първи интеграли на уравненията на Лагранж - *циклични интеграли.*

- определение: *обобщени импулси* - производните на функцията на Лагранж по обобщените скорости

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = p_j \qquad (25)$$

4. **Уравнения на Ойлер в динамиката на твърдо тяло.**

- Разглежда се тяло с неподвижна точка. От теоремата за изменение на момента на количеството движение на материална точка: $\dfrac{d\mathbf{K}}{dt}=\mathbf{m}^{(O)}$, където $\mathbf{K}$ - главен момент на количеството движение; $\mathbf{m}^{(O)}$- главен момент на външните сили относно неподвижната точка O.
- Ако $Oxyz$ е фиксирана в тялото координатна система, тя ще има същата ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}$ както и тялото; в тази координатна система производната $\dfrac{d'\mathbf{K}}{dt}$ се изразява чрез абсолютната производна $\dfrac{d\mathbf{K}}{dt}$ с израза $\dfrac{d\mathbf{K}}{dt}=\dfrac{d'\mathbf{K}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}$, т.е.

$$\left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_x=\frac{dK_x}{dt}+\omega_y K_z-\omega_z K_y$$

$$\left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_y=\frac{dK_y}{dt}+\omega_z K_x-\omega_x K_z \qquad (26)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_z=\frac{dK_z}{dt}+\omega_x K_y-\omega_y K_x$$

- ако за координатни оси на $Oxyz$ се изберат главните оси на инерция на тялото в точка $O$, то $K_x=J_1\omega_x$, $K_y=J_2\omega_y$, $K_z=J_3\omega_z$, където $J_1,J_2,J_3$ са моментите относно осите, то след заместване в (26) се стига до

$$\begin{aligned} &J_1\dot{\omega}_x+(J_3-J_2)\omega_y\omega_z=m_x\\ &J_2\dot{\omega}_y+(J_1-J_3)\omega_z\omega_x=m_y \quad ,\\ &J_3\dot{\omega}_z+(J_2-J_1)\omega_x\omega_y=m_z \end{aligned} \qquad (27)$$

където $m_x,m_y,m_z$ са главните момени на външните сили относно осите $Ox$, $Oy$ и $Oz$

Изразите (27) - *уравнения на Ойлер в динамиката на твърдо тяло с неподвижна точка.*

- В общия случай движението на твърдо тяло се определя от движението на една негова точка (в частност – масовия център) и въртенето около тази точка. Ако полюс е масовият център, то движението му се определя от теоремата за масовия център $M\mathbf{w}_C=\mathbf{V}$, където $\mathbf{V}=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{F}_\mathrm{i}$ - главен вектор на външните сили. Въртенето около масовия център се описва от теоремата за изменение на главния момент на количеството движение относно масовия център: $\dfrac{d\mathbf{K}'}{dt}=\mathbf{m}^{(C)}$

- Методът, описващ движението на твърдо тяло с помощта $M\mathbf{w}_C = \mathbf{V}$ и $\frac{d\mathbf{K}'}{dt} = \mathbf{m}^{(C)}$, се нарича *метод на Нютон-Ойлер.*

5. **Уравнения на динамиката при относително движение на точка.**
   - в абсолютна координатна система съгласно втория закон на Нютон движението на материална точка се записва във вида $m\mathbf{w}_a = \mathbf{F}$, където $\mathbf{F}$ е равнодействащата на силите, приложени към нея
   - нека $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{w}_0$ съответно са векторите на ъгловата скорост, ъгловото ускорение и ускорението на началото за относителна координатна система спрямо абсолютната
   - тогава $\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c$, където $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$, $\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ и
   $$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{w}_e - m\mathbf{w}_c$$
   - преносна и Кориолисова сили на инерцията: $\mathbf{S}_e = -m\mathbf{w}_e$, $\mathbf{S}_c = -m\mathbf{w}_c$
   - движението в относителната система с помощта на силите на инерцията се записва като $m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_c$
   - *Диференциалните уравнения на динамиката в неинерциална система са същите както в инерциална, ако към приложените сили се добавят и силите на инерцията.*
   - *Когато относителната система се движи спрямо абсолютната постъпателно, праволинейно и равномерно, то тя също представлява инерциална (Галилеева) координатна система. Уравненията на движение, записани в нея, не се отличават от записа в абсолютната система – в този случай силите на инерцията са нули.*
   - *Всички Галилееви координатни системи от механична гледна точка са еквивалентни.*
   - *От уравненията на относителното движение се получават и уравненията на относителното равновесие* - след полагане на скоростта и ускорението на нули (тогава и Кориолисовата сила на инерцията е също нула) се стига до $\mathbf{F} + \mathbf{S}_e = \mathbf{0}$

6. **Канонични уравнения на Хамилтон.**
   - определение: обобщени импулси $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
   - функция на Хамилтон: $H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$
   - трансформация на Лежандър и теорема на Донкин

Нека $X = X(x_1, x_2, ...., x_n)$ е функция на $n$ променливи, за която $\det\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0$.

Тогава смяната на променливите $y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}$ се нарича трансформация на Лежандър, а $X$ - пораждаща функция. Теоремата на Донкин твърди, че обратната трансформация $y_i \to x_i$ също се поражда от функция $Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X$, като $x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i}$. Ако освен променливите в $X$ има и параметри $\alpha_k$, т.е. $X = X(x_1, x_2, ...., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_k)$, то тези параметри също се съдържат и във функцията $Y$, като $\frac{\partial X}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j}$.

- от уравненията на Лагранж: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i$, а чрез непосредствено диференциране на функцията на Хамилтон: $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$; от (28) $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$
- *Канонични уравнения на Хамилтон:* $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ (29)
- Доказателство на теоремата на Донкин

От условието, че $\det\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0$ ,т.е. Хесианът е неизроден, следва, че за смяната $y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}$ еднозначно е определено обратното преобразуване $x_i \to y_i$, т.е. $x_i = f_i(y_1, ..., y_n)$. Нека в $X$ има и параметри $\alpha_k$, които също ще се съдържат и във функцията $Y$ (чрез променливите $x_i$). Тогава пораждащата функция $Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X$ е функция само на променливите $y_i$ и на параметрите $\alpha_k$, т.е. $Y = \sum_{i=1}^{n} f_i y_i - X(f_1, .., f_n)$. С непосредствено диференциране се стига до

$$\frac{\partial Y}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k} y_i + f_k - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k} y_i + f_k - \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial f_i}{\partial y_k} = x_k$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} y_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial X}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}$$, което доказва теоремата.

- функцията на Лагранж има вида $L(t,q,\dot{q})$, а трансформацията на Лежандър води до променливите $(t,q,p)$, т.е. в означенията на теоремата на Донкин $X$ е функцията на Лагранж $L$, $(x)$ е $(\dot{q})$, а $(y)$ е $(p)$; съгласно трансформацията на Лежандър: $y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}$ която в случая има вида $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ - точно обобщените импулси. Пораждащата функция на обратната трансформация $y_i \to x_i$, т.е. $p \to \dot{q}$, е функцията на Хамилтон $H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$. За нея $x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i}$, т.е. $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$. За $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ вече бе показано, че следва от $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i$ и $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$.
- За $(t,q)$, разгледани като параметри във функциите $H$ и $L$, от теоремата на Донкин следва, че са са в сила $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ и $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$.