ЛЕКЦИЯ 23

Аналитична механика

Съдържание

1. Принцип на освобождаването. Идеални връзки.

- определение: *Реакции на връзките* – сили, действащи на точки от дадена система вследствие на наличието на връзки, ограничаващи движението на системата.
- *активни сили*: всички действащи на системата сили с изключение на реакциите
  Нека за система от точки M_i с маси m_i $(i = 1,...,n)$ наред с равнодействащата на активните сили $\mathbf{F}_i$ (приложена към точката M_i) са приложени и равнодействащата $\mathbf{R}_i$ на реакциите на връзките. Уравнението на движение на точките от системата се записва като ($\mathbf{w}_i$ - ускорение на точката M_i)
  $$m_i\mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \qquad (1)$$
- <u>принцип на освобождаването</u>: *Една несвободна система може да се разглежда като свободна, когато наред с активните сили, приложени към нея, към приложените сили се включат и реакциите* – изразът (1).
- При прилагане на принципа на освобождаването връзките мислено могат да се отхвърлят и да се заменят с динамично еквивалентвото действие на реакциите на връзките; при това броят на степените на свобода се увеличава и многообразието на виртуалните премествания се разширява.
- *идеални връзки*: такива връзки, за които сумата от елементарната работа на техните реакции е равна на нула за всяко виртуално преместване на системата.
- означение:
  - $\mathbf{N}_i$ - равнодействаща на реакциите на идеални връзки, приложена към точката M_i на дадена система
  - $\delta\mathbf{r}_i$ - вектор на виртуално преместване за тази точка
  - δW^*- елементарната работа на реакциите на връзките за виртуално преместване на системата

  Тогава
  $$\delta W^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i \delta\mathbf{r}_i = 0 \qquad (2)$$

в Декартови координати: $\delta W^* = \sum_{i=1}^{n} (N_{ix}\delta x_i + N_{iy}\delta y_i + N_{iz}\delta z_i) = 0$ (3)

- нека положението на система материални точки се определя чрез r на брой обобщени координати, подчинени на s холономни връзки

$$\Phi_\alpha(t, q_1, q_2, ..., q_r) = 0, \quad (\alpha = 1,...,s)$$

За всяка точка: $x_i = x_i(q_s), y_i = y_i(q_s), z_i = z_i(q_s)$, $(i = 1,..., n)$, $(s = 1,...,r)$; тогава

$\delta x_i = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)$; $\delta y_i = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)$; $\delta z_i = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)$ и след заместване в (3)

$$\delta W^* = \sum_{j=1}^{r}[\sum_{i=1}^{n}(N_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + N_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + N_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j})]\delta q_j = 0 \quad (4)$$

- определение: Q_j^* - обобщени реакции: $Q_j^* = \sum_{i=1}^{n}(N_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + N_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + N_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j})$

от (4): $\delta W^* = \sum_{j=1}^{r} Q_j^* \delta q_j = 0$ - *условие за идеалност на връзките* (5)

- нека е допуснато, че при избор на обобщени координати всички холономни връзки са взети пред вид, т.е. q_i, $(i = 1,...,r)$ са независими и няма нехолономни връзки; тогава δq_i, $(i = 1,...,r)$ също са независими и броят им е равен на степените на свобода - $r = k$. От произволността на δq_i и от (4) следва $Q_j^* = 0$, $(i = 1,..., k)$.Или *ако несвободна система е подчинена на идеални холономни връзки, всички обобщени реакции, съответстващи на независими виртуални премествания, също са нули.*
- общ случай: нека при избора на обобщени координати само част от холономните връзки се удовлетворяват - обобщени координати са зависими, т.е. броят им r е по-голям от броя на степените на свобода k, т.е. $r > k$. Нека виртуалните премествания удовлетворяват условията $\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j}\delta q_j\right) = 0$, $(\alpha = 1,...,r)$. След като всяко от тези условия се умножи с неопределен множител $(-\lambda_\alpha)$ и се сумира с (5), се стига до

$$\sum_{j=1}^{r}\left(Q_j^* - \sum_{\alpha=1}^{s}\lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j}\right)\delta q_j = 0 \quad (6)$$

- на s броя неопределени множители $(-\lambda_\alpha)$ може да се постави условие s броя събираеми в скобите на (6) да приемат стойност нули, така че оставащите $k = r - s$ виртуални премествания стават независими – броят им е равен на броя на броя на степените на свобода. Но равенството (6) може да бъде изпълнено само когато коефициентите пред δq_j са нули, т.е. условието за идеалност на връзките води до r на брой съотношения $Q_j^* = \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j}$, $(j = 1,\dots,r)$ (7)

Или обобщените реакции се изразяват чрез множителите (λ_α), наречени множители на връзките; методът на преминаване от (5) към (6) е известен като *метод на неопределените множители* (предложен от Лагранж и впоследствие прилаган в математическия анализ).

2. Принцип на виртуалните премествания.

- *Необходимото и достатъчно условие за равновесие на система, подчинена на стационарни идеални връзки, е равенството на нула на сумата от елементарните работи на активните сили за всяко виртуално преместване на системата от положение на съществуващо до момента равновесие.*
- означение: δW - сума от елементарните работи на активните сили за виртуално преместване на системата
- аналитичен израз на принципа на виртуалните премествания (три форми)

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0 ,$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) = 0 , \tag{8}$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0 ,$$

където δs_i е дължината на преместването $\delta \mathbf{r}_i$; α_i - ъгъл между силата и преместването

- <u>необходимост</u>: нека системата е в равновесие, т.е. равнодействащата на активните сили $\mathbf{F}_i$ и равнодействащата на реакциите на връзките $\mathbf{N}_i$, приложени към точката M_i на дадена система, са нули; следователно и тяхната работа е нула.

Тогава $\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i)\delta \mathbf{r}_i = 0$, т.е. $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i \delta \mathbf{r}_i = 0$ (9)

От (2) следва, че второто събираемо на (9) е нула, следователно и първото е нула, което доказва необходимостта на принципа

- <u>достатъчност</u>: (доказване на съществуване на равновесие, ако е изпълнено $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0$) – ако системата не е в равновесие, то за малък интервал от време под действие на активните сили $\mathbf{F}_i$ и на реакциите $\mathbf{N}_i$ на връзките тя ще извърши някакво действително преместване измежду всевъзможните виртуални премествания. Тъй като преместванията (от състояние на покой) са по посока на силите, ще бъде извършена положителна работа $\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i)\delta\mathbf{r}_i > 0$. Заради идеалните връзки $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i\delta\mathbf{r}_i = 0$,т.е. $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\delta\mathbf{r}_i > 0$; противоречие с $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\delta\mathbf{r}_i = 0$.

- ако активните сили са консервативни, то съществува потенциална енергия т.е. $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\delta\mathbf{r}_i = -\delta\Pi$; но в случая $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\delta\mathbf{r}_i = 0$ и се стига до

$$\delta\Pi = 0\,, \tag{10}$$

което представлява необходимо условие за екстремум на потенциалната енергия на системата в положение на равновесие

- От принципа на виртуалните премествания във формата (8) след заместване на $\delta x_i = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)$; $\delta y_i = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)$; $\delta z_i = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)$ се стига до

$\delta W = \sum_{j=1}^{r} Q_j\delta q_j = 0$, където се дефинира понятието *обобщена сила* като

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n}(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{11}$$

- когато активните сили са консервативни, потенциалната енергия е сложна функция на обобщените координати, т.е. обобщените сили имат вид

$$Q_j = -\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial\Pi}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial\Pi}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}) = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_j},\ \ (j = 1,...,r) \tag{12}$$

- ако обобщените координати са независими, δq_j са произволни и от $\delta W = \sum_{j=1}^{r} Q_j\delta q_j = 0$ следва

$$Q_j = 0\,,\ \ (j = 1,...,k)\,, \tag{13}$$

като тук $r = k$, k - брой на степените на свобода

- съгласно (12) и (13): $\frac{\partial\Pi}{\partial q_j} = 0$ - необходимо условие за екстремум на потенциалната енергия на системата в положение на равновесие
- в общия случай, когато броят на обобщени координати r е по-голям от броя на степените на свобода k $(r > k)$, т.е. наложени са s на брой връзки и $k = r - s$, чрез прилагане на метода на неопределените множители на Лагранж се стига до

$$\sum_{j=1}^{r}\left(Q_j - \sum_{\alpha=1}^{s}\lambda_\alpha\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial q_j}\right)\delta q_j = 0 \tag{14}$$

- заради произволния избор на s броя неопределени множители останалите $k = r - s$ вариации на обобщените координати са независими, от което следва, че за да бъде изпълнено тъждествено (14), коефициентите пред δq_j са нули

$$Q_j - \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j} = 0,\ (j = 1,\dots,r) \qquad (15)$$

Системата (15) има r уравнения с $r+s$ неизвестни; към нея се добавят още s уравнения на връзките и от така получената система от $r+s$ уравнения могат да се определят величините $(q_1^0, q_2^0, \dots, q_r^0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ - решение на системата, като намерените обобщени координати определят равновесното положение на механичната система.

- *когато активните сили са консервативни, задачата се свежда до намиране на условен екстремум на потенциалната енергия при ограничения, задавани от уравненията на връзките; последната задача се свежда до намиране на безусловен екстремум за функцията* $\{-\Pi + \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \Phi_\alpha\}$.

- пример за приложение на принципа на виртуалните премествания: равновесие на твърдо тяло под действие на произволни сили

Нека M_i е произволна точка от твърдото тяло с радиус-вектор относно избран полюс $\mathbf{r}_i'$, като полюсът O^* има радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ относно неподвижна точка O (начало на избрана координатна система). За безкрайно малкото преместване $\delta\mathbf{r}_i$ на M_i е в сила $\delta\mathbf{r}_i = \delta\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i'$, където $\boldsymbol{\theta}$ е вектор на безкрайно малкото завъртане на тялото. Нека в точките M_i с радиус-вектори $\mathbf{r}_i$ са приложени активни сили $\mathbf{F}_i$. Съгласно принципа на виртуалните премествания $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \delta\mathbf{r}_i = 0$ или $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \delta\mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}')_i = 0$. След отчитане на свойствата на смесеното произведение и изнасяне извън скоби на векторите $\delta\mathbf{r}_0$ и $\boldsymbol{\theta}$, които са еднакви за всички точки от тялото, се получава $(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i)\delta\mathbf{r}_0 + (\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i)\boldsymbol{\theta} = 0$. От произволността на векторите $\delta\mathbf{r}_0$ и $\boldsymbol{\theta}$ следва $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ и $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, т.е. се стига до условията за равенство на нулеви вектори на главния вектор и на главния момент на приложените към тялото сили (условия за равновесие, известни от статиката – но тук са изведени с понятия от динамиката и кинематиката).

3. **Принцип на Даламбер. Метод на кинетостатиката.**

- трактовки на Даламбер („Трактат по динамика“)
  - определение на движението като „скорост на тяло с отчитане на нейното направление“, т.е. като вектор на скоростта на материална точка
  - разлика между „движение, предавано на тялото“ и „действително възприето движение“
  - „загубено движение“ : разликата между „предаденото“ и „възприетото“ движение, причина за което е действието на окръжаващите тела
- формулировка на принципа на Даламбер (1717-1783):
  Ако към несвободна система се приложат само загубените движения, то те взаимно се унищожават и системата остава в състояние на покой.
- формулировка, използваща понятието ускорение: *Загубените сили, приложени към точки от несвободна система, не нарушават нейното равновесие.*
- В тази формулировка са приети означенията

  $\mathbf{w}'_i$ - „придавани“ ускорения на точките от системата

  $\mathbf{w}_i$ - действително „възприетите“ ускорения

  $\Delta\mathbf{w}_i = \mathbf{w}'_i - \mathbf{w}_i$ - „загубените“ ускорения

  $\mathbf{P}_i = m_i\Delta\mathbf{w}_i = m_i(\mathbf{w}'_i - \mathbf{w}_i)$ - „загубени“ сили; m_i - маси на точките
- *принципът на Даламбер свежда динамиката на несвободна система към задача на статиката за равновесие на несвободна система под действие на загубените сили*
- видоизменение на принципа на Даламбер чрез втория закон на Нютон
  Ако $\mathbf{F}_i$ е равнодействаща на зададените (активните) сили, то втория закон на Нютон се записва като $m_i\mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i$; тогава

$$\mathbf{P}_\mathrm{i} = \mathbf{F}_i - m_i\mathbf{w}_i \tag{16}$$

- От друга страна за несвободна система, където $\mathbf{R}_\mathrm{i}$ е равнодействаща на реакциите на връзките, съгласно принципа на освобождаването $m_i\mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$
- и (16) се видоизменя до $$\mathbf{P}_\mathrm{i} = -\mathbf{R}_\mathrm{i} \tag{17}$$
  Или *загубените сили се уравновесяват от реакциите на връзките.*
- определение за сили на инерцията, действащи на материална точка: $\mathbf{S}_i = -m_i\mathbf{w}_i$
- трактовка на понятието „загубени сили“ чрез понятието за сили на инерцията

$$\mathbf{P}_\mathrm{i} = \mathbf{F}_\mathrm{i} + \mathbf{S}_\mathrm{i} \tag{18}$$

- <u>метод на кинетостатиката</u> – следствие на принципа на Даламбер, стоящо в основата на кинетостатиката (раздел на техническата механика, прилагащ методите на статиката към решаване на задачи от динамиката на теорията на машините и механизмите)

Ако към несвободна система наред със зададените сили се приложат и силите на инерцията, то съвкупността на тези сили уравновесява реакциите на връзките.

4. **Общо уравнение на динамиката.**

- Условието за равновесие на несвободна система под действие на загубените сили (следствие от принципа на Даламбер) *се изразява в аналитичен вид* чрез използване на принципа на виртуалните премествания $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i \delta \mathbf{r}_i = 0$ и отчитайки (16) се стига до:

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 \tag{19}$$

където $\mathbf{F}_i$ е равнодействаща на всички сили, приложени в точки M_i, $\mathbf{w}_i$ - действително ускорение на точка M_i, $\delta \mathbf{r}_i$ - виртуални премествания на M_i.

- Общо уравнение на динамиката: изразът (19)
- форма, предложена от Лагранж (1788 г) – чрез координати в Декартова система

$$\sum_{i=1}^{n} [(F_{ix} - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i] = 0 \tag{20}$$

- приложение на общото уравнение на динамиката към извода на основните теореми – за количеството движение, за моментите и за кинетичната енергия

▪ Нека е допуснато, че наложените на системата връзки допускат еднакво преместване на всички точки по едно направление, коетоможе да се избере за ос – например Ox. Ако δx_0 е виртуално преместване на произволна точка, то $\delta x_i = \delta x_0$, $\delta y_i = 0$, $\delta z_i = 0$ ще бъдат едни от възможните премествания и от (20) се получава $\sum_{i=1}^{n} [(F_{ix} - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i] = 0$ и отчитайки произволността на δx_i се стига до

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \tag{21}$$

Лявата част на (21) представлява производната по времето на проекцията на количеството движение по оста Ox, а дясната – проекцията на главния вектор, т.е.

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = V_x \tag{22}$$

Или производната на количеството движение е равна на главния вектор на всички активни сили; това се отнася за някаква ос, по която системата има възможно преместване, допускано от връзките. В предишната формулировка на теоремата за количеството движение не се споменават наложени на системата връзки, а само външни сили. Прилагайки принципа на освобождаването, към задаваните сили се присъединяват и реакциите по разглежданото направление. Тези реакции са включени в проекциите на главния вектор на всички активни сили (главният вектор на вътрешните сили е равен на нулевия вектор).

- Нека е допуснато, че наложените на системата връзки допускат еднакво завъртане около някоя ос (за определеност избрана за ос Oz) на ъгъл $\delta\varphi$. Тогава виртуалните премествания се записват като

$$\delta x_i = -y\delta\varphi, \quad \delta y_i = x_i\delta\varphi, \quad \delta z_i = 0 \tag{23}$$

След заместване в (20) се получава $\sum_{i=1}^{n}[(F_{ix} - m_i\ddot{x}_i)(-y_i) + \left(F_{iy} - m_i\ddot{y}_i\right)x_i]\delta\varphi = 0$

и отчитайки произволността на $\delta\varphi$ се стига до

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i\ddot{y}_i - y_i\ddot{x}_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_iF_{iy} - y_iF_{ix}) \tag{24}$$

Лявата част на (24) представлява производната по времето на проекцията на главния момент на количеството движение по оста Oz, а дясната – проекцията на главния момент на всички активни сили по оста Oz, т.е.

$$\frac{dK_z}{dt} = m_z^{(o)} \tag{25}$$

Стига се до теоремата за производната на главния момент на количеството движение - равна на главния момент на външните сили

- Нека е допуснато, че наложените на системата връзки са стационарни. Тогава възможните премествания на точките на системата имат вид

$$dx_i = \dot{x}_i dt, \quad dy_i = \dot{y}_i dt, \quad dz_i = \dot{z}_i dt \tag{26}$$

В случая те съвпадат с виртуалните премествания и след заместване в (20):

$$\sum_{i=1}^{n}[(F_{ix} - m_i\ddot{x}_i)\dot{x}_i + \left(F_{iy} - m_i\ddot{y}_i\right)\dot{y}_i + \left(F_{iz} - m_i\ddot{z}_i\right)\dot{z}_i]dt = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{x}_i\ \dot{x}_i + \ddot{y}_i\ \dot{y}_i + \ddot{z}_i\ \dot{z}_i)dt = \sum_{i=1}^{n}(F_{ix}dx_i + F_{iy}dy_i + F_{iz}dz_i) \tag{27}$$

Лявата част на (27) представлява диференциал dT на кинетичната енергия

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i^{\ 2}$$

а дясната – елементарната работа на активните сили; стига се до $dT = \delta W$

При извода на теоремата за кинетичната енергия чрез общото уравнение на динамиката връзките се считат за стационарни (за да се мине към диференциали dx_i, dy_i, dz_i); работата на реакциите на връзките (идеални връзки) е автоматично изключена.