ЛЕКЦИЯ 22

Аналитична механика

Съдържание

1. Тензор на инерцията на твърдо тяло.
2. Инерчен момент относно произволна ос. Главни инерчни оси.

1. Тензор на инерцията на твърдо тяло.

- инерционен момент на механична система от точки M_i $(i = 1,...,n)$ с маси m_i
  - относно точка O: $J_O = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, r_i - разстояние до точката O
  - относно ос z: $J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2$, h_i - разстояние до оста
  - относно равнина π: $J_\pi = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$, d_i - разстояние до равнината
- инерционен момент на твърдо тяло (разглеждано като съвкупност от точки с маси Δm; ρ - плътност; V - обем)
  - относно точка O: $J_O = \lim_{n\to\infty,\,\Delta m\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 = \int_V r^2 dm = \int_V \rho r^2 dv$,
  - относно ос z: $J_z = \lim_{n\to\infty,\,\Delta m\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i h_i^2 = \int_V h^2 dm = \int_V \rho h^2 dv$
  - относно равнина π: $J_\pi = \lim_{n\to\infty,\,\Delta m\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i d_i^2 = \int_V d^2 dm = \int_V \rho d^2 dv$
- изразите имат същия вид и за материална повърхнина, чиято маса е разпределена в тънък слой по повърхнината – интегралите са по площта σ на повърхнината, като с $d\sigma$ е означена елементарна площ от нея
- за материална линия интегралите са по дължината l на линията, като с dl е означена елементарна дъга от нея (плътностите съответно са ρ_0 - маса на единица повърхнина и ρ_l - маса на единица дължина)
- означение: M_0 - проекция на точка M_i в равнината Oxy на Декартова координатна система; тогава разстоянията на M_0 до осите Ox и Oy, изразени чрез координатите на точката M_i, съответно са y_i и x_i; тогава разстоянието на M_0 (както и на M_i) до оста Oz е $h_i^2 = x_i^2 + y_i^2$, т.е. $J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$ (1)

- аналогично инерционните моменти относно останалите оси на координатната система са $J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i(z_i^2 + y_i^2)$; $J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2)$ (2)
- инерционният момент относно координатното начало O се записва като $J_O = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$, а спрямо координатните равнини –

$$J_{Oxy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 , \quad J_{Oyz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 , \quad J_{Ozx} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \tag{3}$$

- зависимости между инерционните моменти

$$J_x + J_y + J_z = 2J_O , \; J_{Oxy} + J_{Oyz} + J_{Ozx} = J_O , \; J_O = J_x + J_{Oyz} = J_y + J_{Ozx} = J_z + J_{Oxy}$$
$$J_{Oxy} + J_{Ozx} = J_x , \; J_{Oxy} + J_{Oyz} = J_y , \; J_{Oyz} + J_{Ozx} = J_z \tag{4}$$

- при дадени инерционни моменти относно координатните оси могат да се определят инерционните моменти относно координатните равнини и относно координатното начало
- за твърдо тяло сумите се трансформират в интеграли и (1) - (3) приемат вида

$$J_O = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dm \,; J_x = \int_V (y^2 + z^2) dm \,; J_y = \int_V (x^2 + z^2) dm \,; J_z = \int_V (x^2 + y^2) dm$$
$$J_{Oxy} = \int_V z^2 dm \,; \quad J_{Oyz} = \int_V x^2 dm \,; \quad J_{Ozx} = \int_V y^2 dm \tag{5}$$

- следствия:
  - *инерционният момент спрямо една от осите е по-малък от сумата на инерционните моменти спрямо другите две оси и е по-голям от тяхната разлика*

    $J_x < J_y + J_z , \quad J_y < J_x + J_z , \quad J_z < J_x + J_y$

    от $J_y < J_x + J_z \Rightarrow J_x > J_y - J_z$; от $J_z < J_x + J_y \Rightarrow J_x > J_z - J_y$ (6)

  аналогично и за инерционните моменти относно останалите оси
  - *сумата от инерционните моменти относно три взаимно перпендикулярни оси* (която всъщност е инерционен момент относно пресечната им точка) *не зависи от направленията на тези оси*
  - *инерционните моменти са неотрицателни*; могат да са нули – когато точките лежат на дадена ос или в дадена равнина
- при тела с неправилна геометрична форма инерционните моменти се определят експериментално
- инерционни радиуси: дефинират се с помощта на масата на системата (тялото)

  $i_O = \sqrt{\dfrac{J_O}{M}} \Rightarrow J_O = M i_O^2$ (спрямо точка); $i_s = \sqrt{\dfrac{J_s}{M}} \Rightarrow J_s = M i_s^2$ (спрямо ос);

$i_\pi = \sqrt{\dfrac{J_\pi}{M}} \Rightarrow J_\pi = Mi_\pi^2$ (спрямо равнина);

- наименования на инерционните моменти
  - полярни: относно точка
  - осови: относно ос
  - планарни: относно равнина
- центробежни инерционни моменти:

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i\ ,\quad J_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i\ ,\quad J_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i \tag{7}$$

за тяло: $J_{xy} = \int\limits_V xydm$; $J_{yz} = \int\limits_V yzdm$; $J_{zx} = \int\limits_V zxdm$ (8)

- *симетричност* на центробежни моменти: $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{yz} = J_{zy}$, $J_{zx} = J_{xz}$ (9)
- неравенства между центробежните и осовите моменти:

от $\int\limits_V (x-y)^2 dm \geq 0 \Rightarrow \int\limits_V (x^2+y^2)dm \geq 2\int\limits_V xydm$, т.е. $J_z \geq 2J_{xy}$ или $J_{xy} \leq \dfrac{1}{2} J_z$

аналогично и за другите центробежни моменти: $J_{yz} \leq \dfrac{1}{2} J_x$, $J_{zx} \leq \dfrac{1}{2} J_y$ (10)

- *главна* инерционна ос на тяло: центробежните моменти, съдържащи координатите на такава ос, са нули, т.е. ако $J_{xz} = J_{yz} = 0$, то оста z е главна
- *централна главна инерционна ос* - главна ос, минаваща през масовия център
- Теорема на Щайнер за инерционен момент на тяло спрямо произволна точка O

$$J_O = J_C + Md^2 \tag{11}$$

в (11) J_C - инерционен момент спрямо масовия център, d - разстояние между масовия център и точката O, J_O - инерционен момент спрямо точката O

От $J_O = \int\limits_V r^2 dm$ и $J_C = \int\limits_V r_1{}^2 dm$, където r и r_1 са големините на радиус-векторите на точка от тялото спрямо O и масовия център C, а $d = r_C$ (като $\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_1$); тогава се стига до

$$J_O = \int\limits_V (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_1)^2 dm = r_C^2 \int\limits_V dm + 2\mathbf{r}_C \int\limits_V \mathbf{r}_1 dm + \int\limits_V r_1{}^2 dm = Mr_C^2 + J_C \text{, където } \mathbf{r}_{1C} = \frac{1}{M}\int\limits_V \mathbf{r}_1 dm = \mathbf{0}$$

<u>следствие:</u> $J_O > J_C$, т.е. *инерционният момент на тяло спрямо масовия център е най-малък в сравнение с инерционните моменти на тялото спрямо произволни точки от пространството, различни от масовия център*

- Теорема на Щайнер за инерционен момент на тяло спрямо произволна ос z: $J_z = J_{z'} + Md^2$, където z' - ос, която минава през масовия център на дадено тяло и е успоредна на оста z; d - разстояние между осите

<u>следствие:</u> $J_z > J_{z'}$, т.е. *за всяка съвкупрост от успоредни оси в пространството тялото има най-малък инерционен момент относно оста, минаваща през масовия му център*

- Теорема на Щайнер за инерционен момент на тяло спрямо произволна равнина π $J_\pi = J_{\pi'} + Md^2$, където π' - равнина, която минава през масовия център на дадено тяло и е успоредна на равнината π; d - разстояние между равнините
  <u>следствие:</u> $J_\pi > J_{\pi'}$, т.е. *за всяка съвкупрост от успоредни равнини в пространството тялото има най-малък инерционен момент относно равнината, минаваща през масовия му център*
- Теорема на Щайнер за центробежните моменти: за произволна координатна система и за Кьонигова система (с начало в масовия център и оси, успоредни на осите на разглежданата координатна система) е в сила

$$J_{xy} = J_{x'y'} + Mx_C y_C\,,\quad J_{yz} = J_{y'z'} + My_C z_C\,,\quad J_{zx} = J_{z'x'} + Mz_C x_C \tag{12}$$

По дефиниция $J_{xy} = \int\limits_V xydm$, $J_{x'y'} = \int\limits_V x'y'dm$, като координатите в двете системи са свързани чрез координатите на масовия център с изразите $x = x_C + x'$, $y = y_C + y'$ $z = z_C + z'$. Тогава $J_{xy} = \int\limits_V xydm = \int\limits_V (x' + x_C)(y' + y_C)dm =$

$$= \int\limits_V x'y'dm + \int\limits_V x'y_C dm + \int\limits_V x_C y'dm + \int\limits_V x_C y_C dm =$$

$$= J_{x'y'} + y_C \int\limits_V x'dm + x_C \int\limits_V y'dm + x_C y_C \int\limits_V dm = J_{x'y'} + Mx_C y_C$$

(отчитайки, че $\int\limits_V x'dm = 0$ и $\int\limits_V y'dm = 0$)

2. Инерчен момент относно произволна ос. Главни инерчни оси.

- инерционен момент на тяло спрямо ос, минаваща през координатното начало
  Нека инерционните моменти на тяло спрямо осите на Декартова система са известни, а s е ос, минаваща през координатното начало, и $\mathbf{l}$ е единичен вектор по тази ос с директорни косинуси $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, т.е. $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.
  За произволна точка от тялото, която има радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$, сключващ ъгъл θ с оста, разстоянието ѝ до тази ос е $h = r\sin\theta$, а проекцията ѝ върху оста е $\mathbf{lr} = r\cos\theta$. Тогава $J_s = \int\limits_V h^2 dm$, като

$$h^2 = r^2 - (\mathbf{lr})^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 =$$
$$= x^2(1 - \cos^2\alpha) + y^2(1 - \cos^2\beta) + z^2(1 - \cos^2\gamma) -$$
$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2xz\cos\alpha\cos\gamma$$

от $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ следва

$1-\cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma\,; 1-\cos^2\beta = \cos^2\alpha + \cos^2\gamma\,, 1-\cos^2\gamma = \cos^2\beta + \cos^2\alpha$

и след заместване в последния израз и групиране по директорните косинуси:

$$h^2 = (y^2+z^2)\cos^2\alpha + (z^2+x^2)\cos^2\beta + (x^2+y^2)\cos^2\gamma -$$
$$-2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2xz\cos\alpha\cos\gamma$$

Или $J_s = \int\limits_V h^2 dm = \cos^2\alpha\int\limits_V (y^2+z^2)dm + \cos^2\beta\int\limits_V (z^2+x^2)dm + \cos^2\gamma\int\limits_V (x^2+y^2)dm -$

$$-2\cos\alpha\cos\beta\int\limits_V xydm - 2\cos\beta\cos\gamma\int\limits_V yzdm - 2\cos\alpha\cos\gamma\int\limits_V xzdm$$

$$J_s = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma -$$
$$-2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\alpha\cos\gamma \qquad (13)$$

Изразът (13) – *квадратична форма относно директорните косинуси.*

- ако осите на координатната система са главни инерчни оси (центробежните моменти са нули), то (13) се записва в каноничен вид:

$$J_s = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma \qquad (14)$$

- инерционен елипсоид:

Нека по оста s е нанесена от началото на координатната система отсечка ON с дължна $ON = \dfrac{1}{\sqrt{J_s}}$; нека координатите на точката N са (x,y,z) - тогава $\cos\alpha = \dfrac{x}{ON} = x\sqrt{J_s}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{ON} = y\sqrt{J_s}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{ON} = z\sqrt{J_s}$. След замедтване в (14) и съкращаване на общия множител J_s се стига до

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = 1 \qquad (15)$$

Изразът (15) е уравнение на повърхнина от втора степен (елипсоид), която се описва от точката N при изменението на направлението на оста s, т.е. геометричното множество на положенията на точката N.

- геометрично онагледяване (Поансо): уравнението (15) е канонично уравнение на елипсоид с полуоси $a = \dfrac{1}{\sqrt{J_1}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{J_2}}$, $c = \dfrac{1}{\sqrt{J_3}}$ (16)

величините J_1, J_2, J_3 се наричат *главни инерчни моменти* (относно главните инерчни оси).

При равенство на две от тях елипсоидът е ротационен, а при три – сфера.

При равенство на нула на един или два от главните инерчни моменти елипсоидът се трансформира в елипса или отсечка. Физичен смисъл (при „отсечка“) – кръгов цилиндър с безкрайно малък радиус и крайна височина, т.е. всички точки от тялото лежат на оста s, която е главна инерчна ос.

- следствие: *За всяка точка съществуват три главни инерчни оси, които са взаимно перпендикулярни. В частност точката може да бъде масовият център.* Ако някоя от координатните оси е *главна инерчна ос, то центробежните моменти, в които влиза съответстващата на тази ос координата, са нули.*
- симетрични тела:
  - ако хомогенно твърдо тяло има ос на симетрия, то тя е главна централна инерчна ос
  - ако хомогенно твърдо тяло има равнина на симетрия, то всяка ос, перпендикулярна на тази равнина, е главна инерчна ос
- инерционен тензор на тяло в негова точка
  - представяне на вектор като линейна функция на друг вектор

    Разглежда се тяло, ноето се върти около неподвижна точка. Неговият главен момент на количеството движение има вида

$$\mathbf{K} = \int_M \mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})dm = \int_M [(\mathbf{rr})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\mathbf{r}]dm = \boldsymbol{\omega}\int_M \mathbf{r}^2 dm - \int_M (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\mathbf{r}dm \tag{17}$$

  - След проектиране на (17) по координатните оси и групиране по координатите на вектора на ъгловата скорост се стига до

$$\begin{aligned} K_x &= J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z, \\ K_y &= -J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y - J_{yz}\omega_z, \\ K_z &= -J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z, \end{aligned} \tag{18}$$

където $J_{xx} = \int_M (y^2+z^2)dm$; $J_{yy} = \int_M (x^2+z^2)dm$; $J_{zz} = \int_M (x^2+y^2)dm$;

$$J_{xy} = J_{yx} = \int_V xydm; \quad J_{yz} = J_{zy} = \int_V yzdm; \quad J_{zx} = J_{xz} = \int_V zxdm$$

  ❖ изразът (18) определя вектора $\mathbf{K}$ като линейна функция на $\boldsymbol{\omega}$, представена с матрицата

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix} \tag{19}$$

  - Векторите $\mathbf{K}$ и $\boldsymbol{\omega}$ са обективни физични величини, т.е. матрицата (19) определя обективна физична величина – тензор от втори ранг, който се нарича *тензор на инерцията на твърдо тяло в дадена негова точка.*
  - Съкратени означения: $J_{xx} = J_x$, $J_{yy} = J_y$, $J_{zz} = J_z$

  ❖ *Тензорът и матрицата на тензора са <u>различни</u> понятия.* Матрицата на тензора се отнася за конкретна координатна система. В различни координатни системи матрицата на тензора е различна, но заради обективния смисъл на тензора матриците са свързани, т.е. те са *подобни* *матрици.* Съвкупността от елементите на матрицата като цяло определя обективна физична величина – тензора на инерцията J.

- сравнение с постъпателното движение – масата характеризира инертността при постъпателно движение, докато тензорът характеризира инертността при въртеливото движение на тяло около някакъв център (неподвижна точка)
- тензорът на инерцията е функция на точка от тялото – в различните му точки той има различни значения, т.е. в тялото се дефинира *тензорно поле*
- дефиниция за тензор в тензорната алгебра: съвкупността от коефициентите, изразяващи линейната връзка между два физични (обективно съществуващи) вектора, като тази съвкупност се изменя по определен закон при преход между две правоъгълни координатни системи
- *Изразът (13) представлява момент на инерцията на тяло относно произволна ос, която минава през произволна точка на това тяло. Веднъж щом такава точка е определена, моментът на инерцията относно оста, минаваща през точката, се изразява чрез моментите на инерцията относно три пресичащи се в тази точка взаимно перпендикулярни оси и съответните им центробежни моменти.*

  В разглежданата точка се определят 6 инерционни характеристики на тялото: три инерционни момента относно осите и три центробежни; те образуват коефициентите на квадратичната форма (13).

  - Геометрично онагледяване на симетрични тензори от втори ранг: елипсоиди

  Във всяка точка на тялото съществуват три главни оси на инерцията, които съвпадат с осите на елипсоида на инерцията с център тази точка.

  - *Главни инерционни моменти*: моментите на инерция, фигуриращи в каноничния вид (14).

- връзка с диагонална форма на матрица, собствени вектори и собствени значения
  - характеристичен полином и характеристично уравнение: за симетрична матрица характеристичните корени, т.е. собствените значения, са реални числа
  - на всяко собствено значение съответства собствен вектор; за собствените значения, които не са кратни корени на характеристичното уравнение, собствените вектори са ортогонални
  - в базис от собствени вектори матрицата се записва в диагонална форма, като по главния диагонал стоят собствените значения
- изменение на матрицата на тензора при изменение на базиса, в който е записана

Разглеждат се два ортонормирани базиса на тримерно векторно пространство $\mathbf{e}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и $\mathbf{e}^*(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$. Всеки вектор $\mathbf{e}_i^*$ се изразява чрез линейна комбинация на единичните вектори на базиса $\mathbf{e}$ със съответните коефициенти пред тях.

- стълбовете на матрицата на прехода C между двата базиса съдържат разложението на векторите на $\mathbf{e}^*$ в базиса $\mathbf{e}$, като връзката между базисните вектори се дава с $\mathbf{e}^* = C^T \mathbf{e}$, т.е.

$$C = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{e}_1^* & \mathbf{e}_2^* & \mathbf{e}_3^* \\ | & | & | \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_3^* \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

- ако $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x^*, y^*, z^*) = \mathbf{a}(x, y, z)$ е един вектор, представен с координатите си в двата базиса, то връзката между координатите на векторите чрез матрицата на преход се дава с

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Нека дадено линейно преобразуване, определено с матрица T, трансформира координатите на вектор $\mathbf{a}$ в координатите на вектор $\mathbf{b}$, т.е. $b = Ta$ (където b и a са матриците-стълбове на координатите на векторите). При преход от базиса $\mathbf{e}$ към базиса $\mathbf{e}^*$ векторите $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ се записват със съответните си координати като $\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{a}^*$, а линейното пробразуване ги свързва с някаква матрица T^*, т.е. $b^* = T^* a^*$. Изразявайки $\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{a}^*$ в базиса $\mathbf{e}$ чрез матрицата на преход C, т.е. чрез координатите им в базиса $\mathbf{e}$, се стига до $b^* = C^{-1} b$, $a^* = C^{-1} a$, т.е. $C^{-1} b = T^* C^{-1} a$ и след умножаване отляво с матрицата C се стига до $b = CT^* C^{-1} a$. Сравнявайки последното с $b = Ta$ се получава $T = CT^* C^{-1}$, т.е. матриците са подобни – преобразуват се по определен начин, но не изменят характера на линейното пробразуване. Това свойство може да се използва като дефиниция на тензор.
- зависимост на главните оси на инерцията (главните инерчни оси) от точката на тялото, в която те са определени

  Нека O е точка от твърдо тяло, в която са определени главни инерчни оси $Oxyz$, т.е. координатните оси на $Oxyz$ са главни инерчни оси (за тях центробежните моменти са нули). Ако точка М е различна, за нея също могат да се определят три главни инерчни оси, които в общия случай са различни от главните инерчни оси през точката O. За простота нека М е върху оста z на разстояние a от точката O Ако с начало М се свърже координатна система М$x'y'z'$ с успоредни на първата система оси, то координатите на произволна точка от тялото в двете системи са: $x = x'$, $y = y'$, $z = a + z'$. Тогава за центробежните моменти:

$$J_{y'z'} = \int_V y'z'dm = \int_V y(z-a)dm = \int_V yzdm - a\int_V ydm = J_{yz} - aMy_C$$

$$J_{z'x'} = \int_V z'x'dm = \int_V x(z-a)dm = \int_V xzdm - a\int_V xdm = J_{zx} - aMx_C$$

Но за системата $Oxyz$ от главни оси $J_{zx} = J_{yz} = 0$. За да бъдат центробежните моменти нули и в системата М$x'y'z'$, трябва x_C и y_C да бъдат нули, т.е. да са координати на масовия център.

Или: *Главна инерчна ос запазва характеристиката си на главна инерчна ос за всички точки от нея, когато минава през масовия център на тялото.*

- дефиниция: <u>*централен инерчен елипсоид*</u> на тяло – елипсоид на инерцията с център, съвпадащ с масовия център на тялото
- *Осите на елипсоида са главни централни оси на инерцията. Матрицата на тензора на инерцията в главни инерчни оси е диагонална, като главните централни моменти на инерцията са по главния диагонал. Центробежните моменти са нули. Геометрично тензорът на инерцията се онагледява с елипсоид на инерцията. Когато центърът на този елипсоид съвпада с масовия център на тялото, стойностите на моментите относно осите са минимални.*
- инварианти на тензор от втори ранг (тензорът на инерцията)
    - линеен инвариант: сума от диагоналните елементи на матрицата на тензора
    - квадратичен инвариант: сума от произведенията от всички компоненти на матрицата (аналог на дължина при вектор)
    - кубичен инвариант: детерминантата на матрицата на тензора