ЛЕКЦИЯ 21

Аналитична механика

Съдържание

1. Потенциална енергия.

- силово поле: среда, в която силите, действащи върху дадена точка, *еднозначно се определят от положението на точката* в средата.
- разлика със случая, когато силите зависят от скоростите (например съпротивлението) – при силите, зависещи от положението, независимо от движението на точката, проекциите им зависят само от координатите.
- *силова линия* на поле: крива, характеризираща силата, действаща върху дадена точка – силата е насочена по допирателната на кривата, минаваща през точката;
- смисъл: по силовата линия в начален момент точката ще почне да се движи, ако се „пусне“ без начална скорост
- *особени точки* на силово поле: в тях или няма силова линия, или през тях минават повече от една силови линии
- *теорема:* Необходимото и достатъчно условие работата на сила да не зависи от вида на траекторията на материална точка в силово поле, а да се определя само от началното и крайното положение на точката, е съществуването на еднозначна функция на координатите на точката, чиито частни производни по координатите са равни на проекциите на силата по съответните координатни оси
- означение: $-\Pi(x,y,z)$, т.е. $F_x = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}$, $F_y = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial y}$, $F_z = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial z}$
- функцията $\Pi(x,y,z)$ се нарича *потенциал* (потенциална енергия) на силовото поле, а самото поле – потенциално
- за две положения M_0 и M_1 на дадена точка работата $W_{0,1}$ на сила $\mathbf{F}$ се определя от

$$W_{0,1} = \int_{M_0}^{M_1} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (1)$$

- достатъчност: при верност на условията за частните производни от (1) следва

$$W_{0,1} = -\int_{M_0}^{M_1} (\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz) = -\int_{M_0}^{M_1} d\Pi = \Pi(x_0, y_0, z_0) - \Pi(x, y, z) \qquad (2)$$

- следствие: работата в потенциално силово поле по произволен затворен контур е равна на нула
- необходимост: (ако (2) е изпълнено, да се докаже условието за частните производни) нека точката заема положение M', безкрайно близко до началното положение M_0 - тогава M' ще има координати $M'\ (x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$

  от (2): $W_{0,1'} = -\Pi(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz) + \Pi(x_0, y_0, z_0) = -d\Pi$ (с точност до безкрайно малки величини от по-висок ред)

  Елементарната работа, извършена за пътя $M_0 M'$, е $\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

  тогава $$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -(\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz)$$

  $$(F_x + \frac{\partial \Pi}{\partial x})dx + (F_y + \frac{\partial \Pi}{\partial y})dy + (F_z + \frac{\partial \Pi}{\partial z})dz = 0$$

  Но диферециалите dx, dy, dz са произволни и независими един от друг, а (3) е винаги изпълнено, което води до равенство на нула на коефициентите пред тях, или $F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$.

  резултат: Работата на сила в потенциално силово поле при преместване на точка от начално до крайно положение е равно на <u>*намаляване*</u> на потенциалната енергия между двете положения на точката.

  потенциалната енергия се определя като разлика на стойностите на функцията $\Pi(x, y, z)$ в две точки, т.е. с точност до някаква адитивна функция; тогава в начално положение може да се приеме, че $\Pi(x_0, y_0, z_0) = 0$ или

  $$\Pi(x, y, z) = -W_{0,1} = W_{1,0} \qquad (4)$$

- *потенциалната енергия в дадена точка от силово поле е равна на работата, която биха свършили силите на полето при преместване на точката от даденото положение в начално положение*
- изопотенциална повърхност: потенциалната енергия има едно и също значение
- Потенциалната енергия характеризира свойството на силовото поле да върши работа. В потенциалното поле силата е насочена по нормалата към изопотенциалната повърхност, като посоката е към намаляване на потенциалната енергия. Големината на тази сила е равна на производната на потенциалната енергия по направление на нормалата.

- обобщение за система материални точки: сумиране на елементарните работи за всички точки, като $F_{ix} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_i}$, $F_{iy} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial y_i}$, $F_{iz} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial z_i}$, т.е.

$\delta W = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i + F_{iz} dz_i) = -\sum_{i=1}^{n} (\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_i} dx_i + \dfrac{\partial \Pi}{\partial y_i} dy_i + \dfrac{\partial \Pi}{\partial z_i} dz_i)$ и след интегриране: $W_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2$

- Работата на потенциалните сили при преход на системата от едно положение в друго се определя от намаляването на потенциалната енергия от стойността ѝ в началното положение до стойността ѝ в крайно положение.

2. **Потенциални силови полета.**

- потенциална енергия на полето на силата на тежестта
- избор на координатна система, така че оста Oz е противоположна на земното притегляне; за точка с маса m и тегло G: $G_x = 0, G_y = 0, G_z = -G = -mg$ и
- $\delta W = -d\Pi = -Gdz = -mgdz$, $\quad \Pi = Gz = mgz$ (5)
- за система материални точки

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} (-G_i dz_i) = \sum_{i=1}^{n} (-m_i g dz_i), \Pi = \sum_{i=1}^{n} (G_i z_i) = g\sum_{i=1}^{n} m_i z_i = gMz_C = Gz_C \qquad (6)$$

- при преход между две състояния $W_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2 = G(z_{C1} - z_{C2}) = Mg(z_{C1} - z_{C2})$;
- работата не зависи от траекториите на точките от системата; изопотенциалните повърхности са хоризонтални равнини, а силовите линии – вертикални прави

- потенциална енергия на еластично деформируемо тяло – пример за пружина
В случая на разтегната пружина на разстояние x от естественото ѝ (недеформирано) състояние потенциалната енергия се определя от работата на силите при връщане на пружината в това недеформирано състояние

$$\Pi(x) = \int_x^0 F_x dx = -c\int_x^0 xdx = c\int_0^x d\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}cx^2 \qquad (7)$$

- аналогично за тяло, подложено на усукване (φ - ъгъл на усукване; k коефициент на еластичност)

$$\Pi = \frac{1}{2}k\varphi^2 \qquad (8)$$

- потенциална енергия на взаимно привличащи се маси
Нека точка M с маса m и радиус-вектор $\mathbf{r}$ се намира в поле на привличане, създавано от точки, които се намират в положение M_i $(i = 1,..., n)$ и имат маси m_i и радиус-вектори $\mathbf{r_i}$. На точка M действа съвкупност от сили $\mathbf{F_i} = fmm_i \dfrac{\mathbf{r_i} - \mathbf{r}}{|\mathbf{r_i} - \mathbf{r}|^3}$, където $(\mathbf{r_i} - \mathbf{r})$ е радиус-векторът на M_i относно M; респективно $|\mathbf{r} - \mathbf{r_i}|$ е

разстоянието между точките, а f - константа на привличане. За преместване $d\mathbf{r}$ елементарната работа на силите $\mathbf{F}_i$ е

$$\delta W = fm\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}d\mathbf{r} = -fm\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}d(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) = -fm\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^2}{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} =$$

$$= fmd\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\right);\ \text{или}\ \Pi = -\ fm\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \quad (9)$$

Всяко събираемо в (9) представлява потенциалната енергия, „създавана“ от наличието на маса m_i положение M_i на полето. Това може да се каже и за самата точка M относно всяка от другите точки, т.е. $\Pi_{ij} = -\ f\dfrac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} - f\dfrac{m_i m_j}{r_{ij}}$ (10)

Или потенциалната енергия Π_{ij} на две привличащи се маси се дава с (10).

- за цялата система от всички точки (след сумиране по всички маси):

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Pi_{ij}\ ,\ (i \neq j) \quad (11)$$

3. **Закон за запазване на механичната енергия.** ЗЗМЕ
   - от теоремата за изменение на кинетичната енергия на система материални точки (интегрална форма; $W_{1,2}$ - сумата от работите на *всички* сили, действащи на системата за крайно преместване): $T_2 - T_1 = W_{1,2}$
   - но работата на потенциалните сили при преход на системата от едно положение в друго се определя от намаляването на потенциалната енергия от стойността ѝ в началното положение до стойността ѝ в крайно положение: $W_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2$
   - тогава за потенциалните сили: $T_2 - T_1 = \Pi_1 - \Pi_2$ (12)
   - при наличие и на непотенциалните сили (наред с потенциалните сили):

     $$T_2 - T_1 = \Pi_1 - \Pi_2 + W_{1,2} + W'_{1,2}\ , \quad (13)$$

     където $W_{1,2}$ е работата на непотенциалните външни сили, а $W'_{1,2}$ - работата на непотенциалните вътрешни сили
   - в диференциална форма (13) приема вида $dT = -d\Pi + \delta W + \delta W'$ (14)
   - от (12) следва $T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2$ (15)

     При движение в потенциално поле сумата от кинетичната и потенциалната енергия на дадена система остава постоянна.
   - означение: пълна механична енергия $E = T + \Pi$
   - Закон за запазване на механичната енергия: $E = const$ (16)

     Ако една система се движи под въздействие само на потенциални сили, нейната пълна механична енергия през цялото време на движението запазва своята стойност.

- От математическа гледна точка (16) е един първи интеграл на уравненията на движение (интеграл на енергията); величината на константата се определя от задаване на координатите и скоростите на системата в някое положение, в частност – в началото на движението (начални условия). В (16) не се съдържат ускорения.
- На практика при движението съществуват и други въздействия – съпротивление, триене, явления с немеханична природа и т.н. Законът за запазване на механичната енергия не е „в чист вид" – реалното движение е резултат от наслагване на различни процеси, в които движението в потенциално поле има по-малка или по-голяма роля.

4. **Връзки. Класификация на връзките.**

- обобщени координати: параметри, еднозначно определящи положението на дадена механична система в пространството
- примери:
  - система от n на брой материални точки: координатите им (x_i, y_i, z_i) $(i = 1,...,n)$
  - твърдо тяло: координатите (x_0, y_0, z_0) на негова точка (полюс) и три Ойлерови ъгли, описващи въртенето около полюса
- общ случай: q_i, $(i = 1,...,r)$ - брой обобщени координати; тогава

$$x_i = x_i(q_s), y_i = y_i(q_s), z_i = z_i(q_s), \ (i = 1,...,n), \ (s = 1,...,r) \qquad (17)$$

- в случай на несвободна система, обобщените координати и производните им - обобщените скорости $\dot{q}_i$, се подчиняват на ограничителни условия, наречени *връзки*; аналитично връзките се изразяват с равенства или неравенства
- видове връзки:
  - кинематични: израз, свързващ времето, координатите и скоростите

$$\Phi_\alpha(t, q_i, \dot{q}_i) = 0, \ (i = 1,...,r) \qquad (18)$$

  - стационарни: времето *не влиза явно* в уравнението на връзките
  - нестационарни: времето *влиза явно* в уравнението на връзките
  - холономни: не съдържат обобщени скорости или те могат да се интегрират (такива връзки се наричат още *интегруеми връзки*)
  - нехолономни: обобщени скорости - в тях обобщените скорости не могат да се интегрират (*неинтегруеми връзки*)

  Докато холономните връзки налагат ограничения само между обобщените координати (след евентуално интегриране), нехолономните налагат ограничения между координатите и скоростите.
- пример: математическо махало с променлива дължина

  Тежка точка е закачена с връв, горният край на която минава през отверстие, така че връвта може да изменя дължината си l по някакъв зададен закон.

Уравнението на връзката, налагащо ограничения върху координатите x и y на точката (във вертикална равнина), има вида $x^2 + y^2 = l^2(t)$, т.е. - нехолономна. Ако обаче $l = const$, връзката става холономна и стационарна - $x^2 + y^2 = l^2$.

- неудържащи връзки: при някакво условие „губят" значението си и налаганото ограничение изчезва – аналитично се изразяват чрез неравенства
Доколкото неудържащите връзки в едно направление запазват наложените ограничения, а в друго – не, се наричат *едностранни*; в тази терминология удържащите връзки (от тип равенство) се наричат *двустранни.*
- пример: $x^2 + y^2 \leq l^2$ - математическо махало с неразтеглива връв; или $x^2 + y^2 \geq l^2$ - тежка точка се движи по външната повърхност на сфера

5. **Възможни премествания на система от тела. Степени на свобода.**

- определение: *възможни премествания* - множеството от безкрайно малки премествания на точки от дадена система, съвместими с наложените на системата връзки. В частност в това множество влизат и *действителните* премествания на точките под действието на приложените към системата сили.
- определение: *виртуални премествания* - безкрайно малки премествания на точки от дадена система, съвместими с наложените връзки, като връзките се считат фиксирани в даден момент
- *разлика между виртуалните й възможните премествания* – в класа на възможните премествания влизат и движенията, обусловени от изменението на самите връзки с времето
- *при стационарни връзки виртуалните и възможните премествания нямат разлика и са едно и също по смисъл понятие*
- геометрична интерпретация на виртуалните премествания – съвкупност от безкрайно малки вектори, зависеща само от структурата на фиксираните в даден момент връзки („втвърдени" връзки) – тук времето се разглежда като параметър, фиксиран в дадено състояние на връзките, а не като основен аргумент в съотношенията, които се удовлетворяват от виртуалните премествания
- аналитични условия за виртуалните премествания (аналитично изразяване)
Нека $f(t,x,y,z,...)$ е някаква функция на аргументите $(t,x,y,z,...)$. Безкрайно малките изменения на функцията вследствие на безкрайно малките изменения на нейните аргументи се дава с диференциала df, т.е.

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + ... \qquad (19)$$

Ако сега аргументът t е фиксиран (като параметър), а $(x,y,z,...)$ са независимо изменящи се величини (не зависят от t), безкрайно малкото изменение на функцията се дефинира като *вариация* δf на тази функция, т.е.

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \ldots\ , \qquad (20)$$

където $(\delta x, \delta y, \delta z, \ldots)$ се наричат вариации на аргументите

- Нека положението на система от точки $M_i\ (i = 1,\ldots,n)$ се определя от координатите им (x_i, y_i, z_i), като на системата са наложени холономни връзки

$$\Phi_\alpha(t, x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots, x_n, y_n, z_n) = 0\,, \quad (\alpha = 1,\ldots,r) \qquad (21)$$

- диференциране на последния израз: (пълна производна по времето) - стига се до

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i}dz_i\right) = 0\,, \quad (\alpha = 1,\ldots,r) \qquad (22)$$

или може да се каже по друг начин, че преместванията (dx_i, dy_i, dz_i) удовлетворяват ограниченията на връзките, записани във вида (22)

- виртуалните премествания удовлетворяват съотношенията

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0\,, \qquad (\alpha = 1,\ldots,r) \qquad (23)$$

Ако холономните връзки са стационарни, изразите (22) и (23) не се различават.

- пример: математическо махало с постоянна дължина $l = const$, $x^2 + y^2 = l^2$
  - виртуалните премествания удовлетворяват съотношенията $x\delta x + y\delta y = 0$ (24)
  - при променлива $l = l(t)$ възможните премествания удовлетворяват връзката $xdx + ydy = ldl = l\dot{l}dt$, като виртуалните премествания отново се дават с (24)
- пример: две точки M_1 и M_2, съединени с твърда връзка (прът с дължина r_{12}) Едната от точките може да има произволно безкрайно малко преместване, докато втората – само такова движение, при което проекцията на преместването ѝ по направлението на пръта е равна на проекцията на преместването първата точка по направлението на пръта. Аналитично това условие се получава чрез диференциране на уравнението на стационарната връзка

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = r_{12}^2\,,$$

т.е. $$(x_2 - x_1)(dx_2 - dx_1) + (y_2 - y_1)(dy_2 - dy_1) + (z_2 - z_1)(dz_2 - dz_1) = 0\,,$$

$$x_2dx_2 + y_2dy_2 + z_2dz_2 = x_1dx_1 + y_1dy_1 + z_1dz_1$$

- или последното съотношение е еквивалентно на равенство на скаларните произведения на векторите $\mathbf{r}_{12}d\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{12}d\mathbf{r}_1$, където $\mathbf{r}_{12}$ е векторът с начало M_1 и край M_2.

- нека положението на система материални точки се определя чрез r на брой обобщени координати, подчинени на холономни връзки

$$\Phi_\alpha(t, q_1, q_2, \ldots, q_r) = 0\,, \quad (\alpha = 1,\ldots,s) \qquad (25)$$

За възможните премествания dq_i уравненията на връзките (25) дават условието

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i} dq_i \right) = 0 , \qquad (\alpha = 1,\dots, s) \tag{26}$$

Виртуалните премествания δq_i удовлетворяват условието

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i \right) = 0 , \qquad (\alpha = 1,\dots, s) \tag{27}$$

Равенствата (26) се получават чрез диференциране на (25), докато равенствата (27) - чрез *варирaне* на (25) (вариационна производна).

- Колкото повече са условията върху безкрайно малките премествания, налагани от наличието на връзки, толкова по-малко свобода имат движенията – това свойство се характеризира с броя на степените на свобода.

  степени на свобода: брой независими координати на системата, допускащи произволни вариации

  ❖ Само в случая на холономни системи броят на степените на свобода съвпада с броя на независимите обобщени координати. Например за система от n точки, подчинени на s холономни връзки, броят на степените на свобода е

$$k = 3n - s \tag{28}$$

- примери: точка, движеща се по повърхнина – 2 степени на свобода; точка, движеща се по крива – една степен на свобода; система от две свързани с твърда връзка точки – 5 степени на свобода ($n = 2$, $s = 1$, $k = 3.2 - 1 = 5$)
- В общия случай, когато положението на една система се определя от r броя обобщени координати, подчинени на s холономни връзки, степените на свобода са $$k = r - s \tag{29}$$
- примери:

  свободно твърдо тяло - ($r = 6$, $s = 0$, $k = 6$), 6 степени на свобода;
  тяло с неподвижна точка – 3 степени на свобода;
  тяло, извършващо равнинно движение - 3 степени на свобода
  механизми или машини, които са сложни несвободни системи с холономни връзки, обикновено имат една степен на свобода – конструкцията им е такава, че движението се определя от задвижваща система (двигател с редуктор, задвижващ вал или директно задвижване); ъгълът на завъртане в случая на задвижващ вал може да се приеме за обобщена координата (една степен на свобода)