

ЛЕКЦИЯ 20

Аналитична механика

Съдържание

1. Главен момент на количеството движение.
2. Теорема за изменение на главния момент на количеството движение относно масовия център.
3. Теорема за запазване на главния момент на количеството движение.
4. Работа на сила. Мощност.
5. Кинетична енергия на система материални точки. Теорема на Кьониг.
6. Кинетична енергия на абсолютно твърдо тяло.
7. Теорема за изменение на кинетичната енергия.

1. Главен момент на количеството движение.

- главен момент на количеството движение на система материални точки:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i, \quad (1)$$

където параметрите на абсолютното движение, влизащи в (1), са радиус-векторите \mathbf{r}_i и скоростите \mathbf{v}_i на материални точки с маси m_i ($i=1, \dots, n$), влизащи в изследваната система

- означения:
 - неподвижна (или произволна инерциална) координатна система $Oxyz$ с начало O , относно която се определя векторът \mathbf{K}
 - подвижна система $O'x'y'z'$ с радиус-вектор \mathbf{r}_0 и скорост $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$ на началото ѝ O' в $Oxyz$, а $\boldsymbol{\omega}$ - ъглова скорост на $O'x'y'z'$ спрямо $Oxyz$
 - \mathbf{r}'_i - радиус-вектор на произволна точка M_i в $O'x'y'z'$, т.е. $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i$ (2)
- от (1) следва:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i) \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_0 \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (3)$$

Но главният вектор на количеството движение на система материални точки е

$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_C$, където \mathbf{v}_C е скоростта на масовия център на системата, а

$$M = \sum_{i=1}^n m_i - \text{нейната маса; тогава} \quad \mathbf{K} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (4)$$

- представяне на абсолютната скорост \mathbf{v}_i в (4) чрез относителната скорост $\mathbf{v}_i^{(r)}$ и преносната $\mathbf{v}_i^{(e)} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$
- случай, когато началото O' съвпада с масовия център C на системата, а $O'x'y'z'$ се движи постъпателно ($\boldsymbol{\omega} = 0$): $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_C$, $\mathbf{v}_i^{(e)} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_C$, т.е. $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{(r)} + \mathbf{v}_C$

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i^{(r)} + \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i m_i \right) \times \mathbf{v}_C$$

при означение $\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i^{(r)} = \mathbf{K}'$ и отчитане на $\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i m_i \right) = M \mathbf{r}'_C = \mathbf{0}$ се получава

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{Q} + \mathbf{K}' \quad (5)$$

Или: Главният момент \mathbf{K} на количеството движение на система материални точки спрямо неподвижен център е векторна сума на момента на главния вектор на количеството движение на системата, приложен в масовия център, и на главния момент \mathbf{K}' на количеството движение на системата относно масовия център при относителното движение на нейните точки в постъпателно движеща се координатна система

- общ случай (преобразуване на последното събираемо на (4))

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i (\mathbf{v}_i^{(r)} + \mathbf{v}_i^{(e)}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i^{(r)} + \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i m_i \right) \times \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i m_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = \\ &= \mathbf{K}' + \mathbf{r}'_C \times M \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \end{aligned}$$

Или:
$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{Q} + \mathbf{K}' + \mathbf{r}'_C \times M \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \quad (6)$$

- частен случай: системата представлява твърдо тяло, като $O'x'y'z'$ е неподвижно свързана с него, т.е. $\mathbf{K}' = \mathbf{0}$ и (6) се опростява; когато началото O' съвпада с масовия център C , т.е. $\mathbf{r}'_C = \mathbf{0}$, (6) се опростява още повече до

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \quad (7)$$

Или: Главният момент на количеството движение на твърдо тяло спрямо неподвижен център е векторна сума на момента на главния вектор на количеството движение относно масовия център, и на главния момент на количеството движение при въртенето на тялото около масовия център

2. Теорема за изменение на главния момент на количеството движение относно масовия център.

- теорема за изменение на момента на количеството движение на материална точка

- означения:

$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ - момент на сила \mathbf{F} (приложена в точка M с радиус-вектор \mathbf{r} относно точка O) относно точка O

$\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \mathbf{q} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ - момент на вектора на количеството движение (\mathbf{v} - скорост на точката; m - маса на точката)

- диференциране по времето: $\frac{d}{dt} \mathbf{k} = \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \mathbf{q} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} \mathbf{q} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt} \mathbf{q}$

- от теоремата за изменение на количеството движение на материална точка:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{q} = \mathbf{F}, \text{ а } \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \mathbf{0}, \text{ т.е. } \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}) \quad (8)$$

- сумиране на (8) по всички точки от системата материални точки:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{m}^{(O)}, \mathbf{K} - \text{главен момент на количеството движение; } \mathbf{m}^{(O)} - \text{главен момент}$$

на външните сили относно неподвижен център O

- означения:

$\mathbf{m}^{(C)}$ - главен момент на външните сили относно масовия център C

\mathbf{r}_C - радиус-вектор на масовия център C спрямо O

\mathbf{V} - главен вектор на силите, действащи върху системата

- от (5) $\mathbf{K} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{Q} + \mathbf{K}'$, а $\mathbf{m}^{(O)} = \mathbf{m}^{(C)} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{V}$; тогава

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_C \times \mathbf{Q}) + \frac{d}{dt} \mathbf{K}' = \mathbf{m}^{(O)} = \mathbf{m}^{(C)} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{V}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_C \times \mathbf{Q}) = \dot{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{Q} + \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{V}, \text{ защото } \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_C = M\dot{\mathbf{r}}_C \text{ и}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{Q} = \dot{\mathbf{r}}_C \times M\dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{0}, \text{ а } \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{V}; \text{ тогава}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}' = \dot{\mathbf{K}}' = \mathbf{m}^{(C)} \quad (9)$$

Или: Производната на главния момент на количеството движение на системата относно масовия център, изчислена в постъпателно движеща се координатна система, свързана с масовия център, е равна на главния моментна външните сили относно масовия център.

- следствие: Теоремата за изменение на главния момент на количеството движение запазва същата формулировка и при относителното движение на точките от системата спрямо масовия център, като количеството движение на точките от системата и моментите им се изчисляват спрямо

осите на координатна система, движеща се постъпателно заедно с масовия център.

- теоремата (9) е в сила и в частния случай, когато системата представлява твърдо тяло

3. Теорема за запазване на главния момент на количеството движение.

Ако главният момент на външните сили относно неподвижна точка е нула, то главният момент на количеството движение относно тази точка е постоянен по големина и направление.

- теоремата е в сила и за случая, когато главният момент на външните сили на системата относно масовия център е нула; тогава главният момент на количеството движение на системата относно масовия център е постоянен.
- когато при движение някои проекции по координатни оси на момента на външните сили са нули, то съответните проекции на главния момент на количеството движение по тези остават постоянни.
- пример: В слънчевата система се избират координатни оси с начало масовия център на слънчевата система, насочени към три „неподвижни“ звезди („звездна координатна система“). Пренебрегва се действието на звездите върху системата, т.е. тя е изолирана и силите на привличане между телата в нея са вътрешни. Тогава главният момент на количеството движение на системата относно масовия център остава постоянен и съществува равнина, перпендикулярна на неговото направление – „неизменна равнина на планетната система“ (Лаплас, 1749-1827)
- пример: Завъртане на човек около вертикална ос, минаваща през масовия му център, като човекът стои на гладка повърхност и няма триене. Външни сили: тегло на човека и реакция на опората – и двете минават през масовия център, т.е. главният момент е нула относно вертикалната ос, следователно проекцията на главния момент на количеството движение по тази ос се запазва постоянен. В начално състояние на покой при завъртане на ръката си (с ъглова скорост ω_1 ; J_1 - инерчен момент на ръката относно оста) тялото се завърта в обратна посока (с ъглова скорост ω_2 ; J_2 - инерчен момент на тялото относно оста), защото $J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = 0$, т.е. $\omega_2 = -\omega_1 \frac{J_1}{J_2}$. За да се увеличи ω_2 , трябва или да се увеличи ω_1 , или в ръката да се вземе тежък предмет (увеличава се J_1)
- пример:
 - акробат, правещ салто около хоризонтална ос след отблъскване от земята
 - падане на котка от височина (силата на тежестта няма момент относно масовия център; моментът на количеството движение се запазва и котката извива тялото си чрез движение на лапи и опашка)

4. Работа на сила. Мощност.

- понятието „работа на сила“ – мярка за въздействието на сила върху материална точка
- определение: работа W на сила \mathbf{F} , имаща постоянно направление и големина, за преместване \mathbf{u} на материална точка:

$$W = Fu \cos \alpha, \quad \text{където } \alpha \text{ е ъгълът между силата } \mathbf{F} \text{ и } \mathbf{u} \quad (10)$$

- или:
$$W = \mathbf{F}\mathbf{u} \quad (11)$$
 работата W на силата \mathbf{F} за преместване \mathbf{u} е равна на скаларното произведение на силата и преместването

- мерни единици: джаул; $1[J] = 1[Nm]$
- ако към точка са приложени различни сили $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$, то за преместване \mathbf{u} работата на равнодействащата им \mathbf{R} е равна на сумата от работите на приложените към точката сили: $W = \mathbf{R}\mathbf{u} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots)\mathbf{u} = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$
- в случай на последователни премествания $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n$ на точката, на която действа сила \mathbf{F} , работата на силата за крайното преместване \mathbf{u} е сума от работите за всяко преместване: $\mathbf{F}\mathbf{u}_1 + \mathbf{F}\mathbf{u}_2 + \mathbf{F}\mathbf{u}_3 + \dots + \mathbf{F}\mathbf{u}_n = \mathbf{F}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \dots + \mathbf{u}_n) = \mathbf{F}\mathbf{u}$
- обобщение на определението за работа на сила, действаща на точка, в случай на променлива сила и криволинеен път

- елементарна работа δW на сила \mathbf{F} за елементарно преместване $d\mathbf{r}$ ($|d\mathbf{r}| = ds$ при естествена параметризация на траекторията чрез дължината на изминатата дъга)
$$\delta W = \mathbf{F}d\mathbf{r} = Fds \cos \alpha = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (12)$$

- за краен участък (път) $M_1 M_2$ работата е сума от елементарните работи за

$$\text{отделни безкрайно малки премествания: } W = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_{M_1}^{M_2} F \cos \alpha ds \quad (13)$$

- (13) е криволинеен интеграл по дължинета на траекторията, взет от положение M_1 до положение M_2 на точката; по определение такъв интеграл се нарича *циркуляция на вектора \mathbf{F} по дъгата $M_1 M_2$* (термини в хидродинамиката, електродинамиката и др.)

- частен случай на затворен контур “C”, т.е. M_1 съвпада с M_2 :
$$W = \oint_C \mathbf{F}d\mathbf{r} \quad (14)$$

- свеждане на (13) до определен интеграл (по аргумент - времето t) при зададено движение на точката: $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$ и при зададен закон за изменение на силата:

$$F_x = F_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), F_y = F_2(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), F_z = F_3(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

тогава $\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F_1 f_1' dt + F_2 f_2' dt + F_3 f_3' dt = \Phi(t) dt$,

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t) dt, (t_1, t_2 - \text{моменти, съответстващи на положенията } M_1 \text{ и } M_2)$$

- при движение по права (избрана за ос x) и F - функция само на x :

$$\delta W = F_x dx \quad \text{и} \quad W = \int_{x_1}^x F dx$$

- ❖ в общия случай (12) не е пълен диференциал на някаква функция; означението δ символизира безкрайно малки величини
- определение: *мощност* – извършена работа за определен интервал време (характеризиране на работата от гледна точка на времето)

$$N = \frac{\delta W}{dt} = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z \quad (15)$$

или: мощността е равна на скаларното произведение на векторите на силата и скоростта; мерни единици: ват - $1[W] = 1[J/s]$

- частен случай на работата на силата на тежестта \mathbf{G}

Нека материална точка с маса m се движи по траектория (крива) L от положение M_1 до положение M_2 . За преместване $d\mathbf{r}$ елементарната работа е

$$\delta W = \mathbf{G} d\mathbf{r} = G_x dx + G_y dy + G_z dz$$

При избор на координатни оси, така че оста Oz е противоположна на земното притегляне: $G_x = 0, G_y = 0, G_z = -G = -mg$

- елементарната работа се изразява като пълен диференциал от функция на координатите на точката: $\delta W = -mg dz = -d(Gz)$ (16)

За пълната работа на краен участък $M_1 M_2$ от движението:

$$W = - \int_{M_1}^{M_2} d(Gz) = G(z_1 - z_2) = mg(z_1 - z_2)$$

Или: Работата на силата на тежестта е равна на произведението ѝ с разликата във височините на началното и крайното положение на точката; тя е положителна, когато крайното положение е по-ниско от началното, а в противен случай – отрицателна. Тази работа не зависи от вида на траекторията на точката.

- определение: *потенциални (консервативни) сили* – чиято работа зависи само от началното и крайното положение на точката

Работата на консервативните сили се явява пълен диференциал на някаква функция на координатите на точката и заради това не зависи от вида на траекторията на точката.

- за система от материални точки (индексите 1 и 2 съответстват на началното и крайното положение на системата)

$$W = \sum_{i=1}^n G_i(z_{i1} - z_{i2}) = \left(\sum_{i=1}^n G_i z_i \right)_1 - \left(\sum_{i=1}^n G_i z_i \right)_2$$

Ако $M = \sum_{i=1}^n m_i$ е общата маса на системата, а z_C - координата на центъра на

$$\text{тежестта, то } Gz_C = \sum_{i=1}^n G_i z_i \text{ и } W = G(z_{C1} - z_{C2}) = Mg(z_{C1} - z_{C2}) \quad (17)$$

Работата е равна на сумарната сила на тежестта за цялата система, умножена по разликата в началното и крайното положение на масовия център (в случая той съвпада с центъра на тежестта). Тази работа е еквивалентна на работата на

сумарната сила на тежестта $G = \sum_{i=1}^n G_i$ на цялата система, приложена в масовия

център, и е изчислена за крайно движение на масовия център – разглеждан като материална точка, където е съсредоточена цялата маса на системата.

- частен случай на работата на сили, приложени към абсолютно твърдо тяло

Нека силите $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}_n$ са приложени към твърдо тяло в точки M_i ($i = 1, \dots, n$);

\mathbf{r}_i - радиус-вектори на M_i спрямо начало на неподвижна координатна система;

O - точка от тялото (полюс) с радиус-вектор \mathbf{r}_0 , а \mathbf{r}'_i - радиус-вектори на M_i

спрямо полюса. За всяка точка M_i : $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}'_i = d\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'_i$, където $\boldsymbol{\theta}$ е вектор на малкото завъртане около полюса.

Елементарната работа на силата \mathbf{F}_i е:

$$\delta W_i = \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_0 + \mathbf{F}_i (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'_i) = \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\theta} (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\theta} \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i)$$

Означение: $d\varphi$ - безкрайно малък ъгъл на завъртане около моментната ос, т.е. големината на вектора на малкото завъртане; тогава

$\boldsymbol{\theta} \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i) = |\mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i)| d\varphi \cos(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m}_O) = m_L(\mathbf{F}_i) d\varphi$, т.е. проекцията на момента на \mathbf{F}_i относно ос L , успоредна на оста на малкото завъртане и минаваща през полюса.

Означение: $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$ - главен вектор на външните сили;

$$\mathbf{m}^{(O)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i) - \text{главен момент на силите относно полюса;}$$

\mathbf{m}_L - главен момент на силите относно оста L

$$\text{Или: } \delta W = \sum_{i=1}^n \delta W_i = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \right) d\mathbf{r}_0 + \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i) \right) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{V} d\mathbf{r}_0 + \mathbf{m}^{(O)} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{V} d\mathbf{r}_0 + \mathbf{m}_L d\varphi$$

При въртене около неподвижна ос и избор на полюса върху тази ос $d\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$.

При въртене около неподвижна точка векторът на малкото завъртане се определя чрез ъглите на Ойлер като $\theta = \mathbf{k}d\psi + \mathbf{n}d\theta + \mathbf{k}'d\varphi$ и $\mathbf{m}^{(0)}\theta = m_z d\psi + m_N d\theta + m_z d\varphi$; в общия случай на движение на твърдо тяло $\delta W = \mathbf{V} d\mathbf{r}_0 + m_z d\psi + m_N d\theta + m_z d\varphi$

Или работата на силите, приложени към твърдо тяло, се изразява чрез главния вектор и главния момент на тези сили. Работата на вътрешните сили на взаимодействие на точките от твърдото тяло е нула (главният вектор и главният момент на вътрешните сили са нулеви вектори).

- работа на еластична сила

- праволинейно движение под действие на сила, породена от пружина

За ос Ox се избира направлението на движението, като $F_x = -cx$

$$\text{Тогава } \delta W = F_x dx = -cxdx = d\left(-\frac{cx^2}{2}\right); W = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{M_1}^{M_2} d\left(-\frac{cx^2}{2}\right) = \frac{1}{2}c(x_1^2 - x_2^2)$$

- движение по произволна крива: $\mathbf{F} = -c\mathbf{r}$ (c - коефициент на еластичност)

$$\delta W = \mathbf{F}d\mathbf{r} = -c\mathbf{r}d\mathbf{r} = -cd\left(\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{2}\right) = d\left(-\frac{cr^2}{2}\right); W = \int_{M_1}^{M_2} d\left(-\frac{cr^2}{2}\right) = \frac{1}{2}c(r_1^2 - r_2^2)$$

- движение при усукване: $m_z = -k\varphi$ - проекция на момента на силата на усукване; (φ - ъгъл на усукване; k коефициент на еластичност)

$$\delta W = -k\varphi d\varphi, \quad W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (-k\varphi d\varphi) = \frac{1}{2}k(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)$$

Работата на еластичните сили при отклонение от недеформирано състояние зависи само от началното и крайното положение. Еластичната сила се стреми да възстанови равновесното (недеформираното) състояние. При отдалечаване от него работата на еластичната сила е отрицателна, а при приближаване – положителна. Работата на еластичните сили е пропорционална на квадрата на преместването.

5. Кинетична енергия на система материални точки. Теорема на Кьониг.

- определение: кинетична енергия – мярка за движението материална точка

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (m \text{ и } v - \text{ маса и скорост на материалната точка}) \quad (18)$$

- кинетична енергия на система от материални точки: $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$ (19)

- мерни единици: джаул; $1 \left[\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] = 1 \left[\left(\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \text{m} \right] = 1[\text{Nm}] = 1[\text{J}]$

- Теорема на Кьониг(1712-1757)

Кинетичната енергия на система от материални точки е равна на сумата от кинетичната енергия на цялата маса на системата, съсредоточена в масовия

център и движеща се със скоростта на масовия център, и кинетичната енергия на системата в относителното ѝ движение относно постъпателно движеща се координатна система с начало в масовия център.

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T' = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i^{(r)})^2, \quad (20)$$

където $v_i^{(r)}$ - големини на скоростите на точки с маси m_i ($i=1, \dots, n$) относно постъпателно движеща се координатна система с начало в масовия център;

- нека първоначално масовият център не съвпада с началото на подвижна система $O'x'y'z'$, като началото ѝ O' в неподвижна координатна система $Oxyz$ има радиус-вектор \mathbf{r}_0 и скорост $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$
- при постъпателно движеща се координатна система преносната скорост е $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$; тогава абсолютната скорост е $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{(r)} + \mathbf{v}_i^{(e)} = \mathbf{v}_i^{(r)} + \mathbf{v}_0$ и от (19):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i^{(r)} + \mathbf{v}_0)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i^{(r)})^2 + \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i^{(r)}) \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_0^2 \quad (21)$$

В последното равенство се означава $T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i^{(r)})^2$, а $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_0^2 = \frac{1}{2} M v_0^2$;

За средното събираемо се получава:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i^{(r)}) \mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}_0 \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i^{(r)}) = \\ &= \mathbf{v}_0 \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\mathbf{r}}_i^{(r)}) = \mathbf{v}_0 \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0) = \mathbf{v}_0 \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{v}_0 \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0 M \mathbf{v}_C - \mathbf{v}_0 M \mathbf{v}_0 = \\ &= \mathbf{v}_0 M (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_0) = M \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_C^{(r)} \end{aligned}$$

- при съвпадане на масовият център с началото на подвижната система $O'x'y'z'$: $\mathbf{v}_C^{(r)} = \mathbf{0}$ (средното събираемо на (21) отпада) и $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_C$, т.е. (21) приема вида (20), с което теоремата е доказана
- *Кьонигова система* - постъпателно движеща се (спрямо неподвижна координатна система) координатна система с начало в масовия център на системата от материални точки

6. Кинетична енергия на абсолютно твърдо тяло.

- при постъпателно движение на твърдо тяло скоростта \mathbf{v} на всички негови точки е една и съща и изразът за кинетичната енергия се записва като

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v^2 = \frac{1}{2} M v^2 \quad (22)$$

- при въртливо движение около неподвижна ос Oz ъглова скорост ω , скоростта \mathbf{v} на всяка точка маса m_i се записва като $\mathbf{v}_i = \omega h_i$, където h_i - разстояние до оста, а J_z е инерчният момент на тялото относно оста на въртене

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\omega h_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (23)$$

- при равнинно движение на твърдо тяло относителното му движение относно постъпателно движеща се координатна система се явява въртене на тялото ъглова скорост ω ; когато началото на постъпателно движещата се координатна система е масовият център С, в нея (23) приема вида $T' = \frac{1}{2} J_z^{(C)} \omega^2$, (24)

където $J_z^{(C)}$ е инерчният момент на тялото относно ос, перпендикулярна на равнината на движението и минаваща през масовия му център

Или в общия случай на равнинно движение (постъпателно заедно с полюса и въртеливо около полюса):

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_C^2 + \frac{1}{2} J_z^{(C)} \omega^2 \quad (25)$$

7. Теорема за изменение на кинетичната енергия.

- теоремата свързва изменението на кинетичната енергия на система материални точки с работата на силите, предизвикващи това изменение
- от основното уравнение за материална точка след скалярно умножаване с елементарно преместване $d\mathbf{r}$ и отчитане на $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ се стига до

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = \mathbf{F} d\mathbf{r}, \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v} dt = m \mathbf{v} d\mathbf{v} = d\left(\frac{m}{2} \mathbf{v}\mathbf{v}\right) = d\frac{mv^2}{2} = dT;$$

от друга страна $\mathbf{F}d\mathbf{r} = \delta W$ - елементарната работа на силата за преместване $d\mathbf{r}$

- тогава
$$dT = \delta W \quad (26)$$

(диференциална форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия)

Изменението на кинетичната енергия на материална точка при елементарно преместване е равно на елементарната работа на приложените към точката сили, извършена за това преместване.

- означения:

M_1 - начално положение на точката, в което има скорост \mathbf{v}_1

M_2 - крайно положение на точката, в което има скорост \mathbf{v}_2

$W_{1,2}$ - работа на силите, действащи на точката за преместване $M_1 M_2$

- интегриране на (26):
$$\int_{M_1}^{M_2} dT = \int_{M_1}^{M_2} \delta W \Rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W_{1,2} \Rightarrow T_2 - T_1 = W_{1,2} \quad (27)$$

- (интегрална форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия)

Изменението на кинетичната енергия на материална точка при крайно преместване е равно на сумата от работите на приложените към точката сили, извършени за това преместване.

- (форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия чрез понятието мощност): Производната по времето на кинетичната енергия на материална точка е равна на мощността на действащите на точката сили.

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} = N \quad (28)$$

- обобщение за система от материални точки (сумиране на кинетичната енергия и елементарната работа за всички точки) - от $d\frac{m_i v_i^2}{2} = dT_i = \delta W_i$ и $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$:

$$dT = d\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2\right) = \sum_{i=1}^n \delta W_i$$

- представяне на $\sum_{i=1}^n \delta W_i$ чрез елементарната работа δW на външните сили и елементарната работа $\delta W'$ на вътрешните сили: $dT = \delta W + \delta W'$ (29)

- (диференциална форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия)
Изменението на кинетичната енергия на система материална точка при елементарно преместване е равно на сумата от елементарните работи на външните и вътрешните сили, действащи на системата за това преместване.

- (интегрална форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия)

$$T_2 - T_1 = \int_{(1)}^{(2)} \delta W + \int_{(1)}^{(2)} \delta W' = W_{1,2} + W'_{1,2} \quad (30)$$

Изменението на кинетичната енергия на система материални точки при крайно преместване е равно на сумата от работите на външните и вътрешните сили, действащи на системата за това преместване.

- (форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия чрез мощностите N и N' на външните и вътрешните сили \mathbf{F} и \mathbf{F}'):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}'_i \mathbf{v}_i = N + N' \quad (31)$$

Производната по времето на кинетичната енергия на система материални точки е равна на мощностите на външните и вътрешните сили, действащи на системата.