ЛЕКЦИЯ 19

Аналитична механика

Съдържание

1. Влияние на силите на съпротивление, пропорционално на първата степен на скоростта, върху свободните колебания на точка.

- при съпротивление към уравнението на свободните колебания $m\ddot{x} = -cx$ се прибавя и силата на съпротивление $D = -\beta\dot{x}$ (β - коефициент на съпротивлението; знакът „минус" – силата е винаги противоположна на посоката на движение)
- диференциалното уравнение на движението е:

$$m\ddot{x} = -cx - \beta\dot{x}, \tag{1}$$

- след полагане на : $\dfrac{c}{m} = k^2$, $\dfrac{\beta}{m} = 2n$, (1) приема вида

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \tag{2}$$

- характеристичното уравнение $s^2 + 2ns + k^2 = 0$ има корени:

$$s_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} \tag{3}$$

- случай на затихващи колебания ($n < k$, комплексни корени)
  - общо решение на (2):

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t) \tag{4}$$

  - начални условия: при $t = 0$ $\quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_0$
  - определяне на константите

$$x_0 = C_1; \qquad C_2 = \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

  - уравнение на движението:

$$x = e^{-nt}(x_0 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t + \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin\sqrt{k^2 - n^2}t) \quad (5)$$

- преобразуване на (5): „отделяне на амплитуда“ и начална фаза

$$x = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha), \quad (6)$$

$$\text{където } a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{nx_0 + \dot{x}_0}{k^2 - n^2}\right)^2}, \ \cot g\alpha = \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{x_0\sqrt{k^2 - n^2}} \quad (7)$$

- от (6) следва, че движението е колебание и x периодично си сменя знака
- кръговата честота (коефициентът пред t) е $\omega = \sqrt{k^2 - n^2}$
- периодът е $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1-(n/k)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-(n/k)^2}}$, (8)

  където $T_0 = \frac{2\pi}{k}$ е периодът на свободните колебания при отсъствие на съпротивление
- след разлагане в ред на знаменателя на (8) и пренебрегване на членовете след втория, се получава $T = T_0(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{k}\right)^2 + ...)$ (9)

❖ периодът, т.е. времето, за което се извършва едно пълно колебание, се увеличава заради съпротивлението; ако коефициенът на съпротивление е малък, то и увеличението на периода също е малко

- за скоростта се получава след диференциране на (6)

$$\dot{x} = ae^{-nt}[(-n)\sin(\omega t + \alpha) + \omega\cos(\omega t + \alpha)] \quad (10)$$

Скоростта на движението става нула, когато точката се отдалечава максимално от равновесното си положение и от (10) следва:

$$\dot{x} = ae^{-nt}[(-n)\sin(\omega t + \alpha) + \omega\cos(\omega t + \alpha)] = 0, \ tg(\omega t + \alpha) = \frac{\omega}{n},$$

$$\omega t + \alpha = arctg\left(\frac{\omega}{n}\right) + m\pi, \quad m = 0,1,2,....$$

Ако за $arctg\left(\frac{\omega}{n}\right)$ се вземе стойността му в момента t_0, т.е. при $m = 0$, то

$$arctg\left(\frac{\omega}{n}\right) = \omega t_0 + \alpha, \quad \omega t + \alpha = \omega t_0 + \alpha + m\pi, \quad t_m = t_0 + m\frac{\pi}{\omega} \quad (11)$$

(t_m - означение за момента от времето, съответстващ на стойността m)

❖ моментите от времето, съответстващи на крайните положения на точката, образуват аритметична прогресия с разлика π / ω, т.е.

$\frac{\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}$; големините на координатите на крайните точки са равни на самите амплитуди, т.е. $|x_m| = a_m$ - стойностите, съответстващи на момента m

Или: $x_m = ae^{-nt_m}\sin(\omega t_m + \alpha) = ae^{-n(t_0+m\frac{\pi}{\omega})}\sin(\omega t_0 + \alpha + m\pi) =$

$$= a(-1)^m e^{-nt_0}\sin(\omega t_0 + \alpha)e^{-nm\frac{\pi}{\omega}} = (-1)^m x_0 e^{-nm\frac{\pi}{\omega}},$$

$a_m = a_0 e^{-nm\frac{\pi}{\omega}} = a_0\left(e^{-n\frac{\pi}{\omega}}\right)^m$ - амплитудите намаляват в геометрична прогресия с частно $e^{-n\frac{\pi}{\omega}}$, т.е. *затихват*

- *фактор на затихване* на колебанията: отношението на две последователни амплитуди $\eta = \frac{a_m}{a_{m+1}} = e^{n\frac{\pi}{\omega}} = e^{n\frac{T}{2}}$
- *логаритмичен декремент* (логаритъм на η): $\Delta = \ln\eta = n\frac{T}{2}$

- апериодично движение ($n > k$): от (3) следва, че корените са реални и отрицателни, т.е. при $t \to \infty$ решението на диференциалното уравнение на движението клони към нула
  - случаи в зависимост от началната скорост:
  1) $\dot{x} > 0$ - началната скорост отдалечава точката от равновесния център; тя се отклонява до максимално (крайно) положение, а после започва да се приближава до равновесното положение, без да го достига
  2) $\dot{x} < 0$ - точката минава през равновесното положение, отдалечава се на максимално (крайно) разстояние, и след това започва да се приближава до равновесното положение
  3) $\dot{x} < 0$ - точката изобщо не минава през равновесното положение
  - първите два случая: апериодични движения от първи род, а в третия случай - апериодични движения от втори род
- пределно апериодично движение ($n = k$): характеристичното уравнение (3) има двукратен корен, а решението на (2) има вида

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2) \qquad (12)$$

- след определяне на константите чрез начални условия $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x_0$

$$x = e^{-nt}((\dot{x}_0 + nx_0)t + x_0) \qquad (13)$$

- при $t \to \infty$ от (13) следва $x \to 0$, т.е. точката се връща в положението на равновесие; и тук се наблюдават пределни апериодични движения от първи и втори род в зависимост от началните условия

2. **Влияние на съпротивлението, пропорционално на първата степен на скоростта, върху принудените колебания на точка.**
   - досегашен резултат: при пренебрегване на съпротивлението амплитудата при принудени колебания расте с времето и при изпадане в резонанс би се стигнало до разрушаване на изследваната система
   - този резултат е в противоречие с практическия опит, което се обяснява с наличие на силите на съпротивление
   - при принудени колебания, където смущаващата сила има вида $F(t) = H\sin(pt + \delta)$, където H – амплитуда; p – честота; δ - начална фаза, към уравнението на движение (1) се добавя и силата $F(t)$
   - движението се разглежда като наслагване на три движения
     - затихващи свободни колебания (с честота, по-малка от собствената честота), причинени от началното отклонение от равновесното положение и от началната скорост в това начално отклонение
     - затихващи колебания (с честота, равна на собствената честота), причинени от наличието на смущаващата сила
     - принудени колебания с честота, равна на честотата на смущаващата сила
   - заради наличието на множител e^{-nt} в решението на уравнението на движение първите две движения могат да се пренебрегнат; при голямо съпротивление понятието резонанс губи смисъл
3. **Свободни колебания при наличие на Кулоново триене.**
   - разглежда се движение на тяло по хоризонтална повърхност при наличие на триене, като движението се извършва под действие на две закрепени в единия си край пружини, между които е тялото
     - сила на пружината: $F = -cx$
     - сила на реакцията на повърхността: $N = G = mg$
     - сила на триене: $R = fN$, f - коефициент на триене при хлъзгане
     - сила на триене при покой: $R_1 = f_1 N$, f_1 - коефициент при покой
     - при $\dot{x} > 0 \Rightarrow R = -fmg$; при $\dot{x} < 0 \Rightarrow R = fmg$; при $\dot{x} = 0$ триенето не превишава силата на триене при покой
   - Кулоново триене – пример за съпротивление с нелинеен закон на зависимостта от скоростта на движение; силата на триене е прекъсната константна функция от първи род (краен интервал на прекъсване; изменение само по знак)

- нека за определеност $x_0 > 0$ - движението започва към равновесния център, като $\dot{x} < 0$
- уравнението на движение има вида:

$$m\ddot{x} + cx = fmg\,,\ \ddot{x} + k^2 x = mg\,,\ \text{където}\ \frac{c}{m} = k^2 \qquad (14)$$

- решение на (14): $x = \frac{fg}{k^2} + (x_0 - \frac{fg}{k^2})\cos kt$ (15)
- за скоростта от (15) се получава: $\dot{x} = -k(x_0 - \frac{fg}{k^2})\sin kt$ (16)
- в момента $t_1 = \frac{\pi}{k}$: $\dot{x} = 0$ и $x_1 = x(t_1) = -x_0 + \frac{2fg}{k^2}$ (17)
- след t_1 движението продължава, като скоростта си сменя знака, т.е. $\dot{x} > 0$ и (14) приема вида $\ddot{x} + k^2 x = -mg$ (18)
- началните условия сега вече са: $t = t_1,\ x = x_1,\ \dot{x} = 0$
- аналогично в момент $t_2 = \frac{2\pi}{k}$ скоростта е нула, а $x_2 = x(t_2) = x_0 - \frac{4fg}{k^2}$
- резултат:
  - последователните отклонения от равновесното положение имат вида $x_1 = -x_0 + \frac{2fg}{k^2}, x_2 = x_0 - \frac{4fg}{k^2}, x_3 = -x_0 + \frac{6fg}{k^2}, ..., x_n = (-1)^n(x_0 - \frac{2nfg}{k^2})$
  - периодът (времето между две крайни положения от една страна на равновесието) е $T = t_n - t_{n-2} = \frac{2\pi}{k}$, т.е. същият, както при отсъствие на сили на триене – или *силата на триене не влияе на периода на колебание*
  - последователните отклонения намаляват в аритметична прогресия с разлика $\frac{2fg}{k^2}$ за полупериод
  - за някое n силата на пружината (която зависи от x_n) става по-малка от триенето при покой и движението спира; разглежданите колебания се наричат *спиращи колебания*
- пример: $T = 2\,[s]$; $x_0 = 4{,}6.10^{-2}\,[m]$; $f = 0.005$; $f_1 = 0.007$;

$$\frac{fg}{k^2} \approx 0{,}5.10^{-2}\,[m];\ \frac{f_1 g}{k^2} \approx 0{,}7.10^{-2}\,[m]$$

За полупериод амплитудите намаляват с $10^{-2}\,[m]$, като отклоненията са

$$x_0 = 4.6.10^{-2}\ [m];\ x_1 = -3.6.10^{-2}\ [m];\ x_2 = 2.6.10^{-2}\ [m]; x_3 = -1.6.10^{-2}\ [m]$$

След време $t_4 = 4[s] \ \Rightarrow \ x_4 = 0.6.10^{-2} \ < \dfrac{f_1 g}{k^2}$ и движението спира.

4. **Теорема за изменение на количеството движение на система материални точки.**

- спрямо неподвижна координатна система се разглежда система от материални точки $M_i, (i = 1,..., n)$ с маси m_i и радиус-вектори $\mathbf{r}_i$
- означения за скоростите и ускоренията на всяка точка: $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$, $\mathbf{w}_i = \dot{\mathbf{v}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i$
- *вътрешни сили*: взаимовействие между точките от системата
- *външни сили*: действие, породено от тела, непринадлежащи на системата
- означения:
  - равнодействаща на всички външни сили, действащи върху точката M_i: $\mathbf{F}_i$
  - равнодействаща на всички вътрешни сили, действащи върху точката M_i: $\mathbf{F}_i^*$
- диференциални уравнения на движнието на системата – съвкупност от основните уравнения на динамиката за всяка точка

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^*,\ (i = 1,..., n) \qquad (19)$$

- проекции на (19) върху осите на неподвижна (инерциална) Декартова система

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + F_{ix}^*, \quad m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + F_{iy}^*, \quad m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + F_{iz}^* \qquad (20)$$

- уравненията (20) са система от $3n$ обикновени диференциални уравнения с неизвестни (x_i, y_i, x_i), които трябва да се определят като функции на времето при зададени $F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}, F_{ix}^*, F_{iy}^*, F_{iz}^*$ като функции на времето; началните условия са зададени за всяка точка поотделно – от тях се определят интеграционните костанти
- главният вектор на вътрешните за системата сили (съгласно третия закон на Нютон) е равен на нулевия вектор

$$\mathbf{V}^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^* = 0 \qquad (21)$$

- след сумиране по всички точки от (19) следва

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^* \qquad (22)$$

- означение: $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$ - главен вектор на външните сили

- външните сили са приложени в различни точки на системата; тяхната сума се изразява чрез един вектор (главен вектор на външните сили), <u>който не трябва да</u>

<u>*се разглежда като равнодействаща на външните сили*</u> – когато точките се движат една спрямо друга, понятието равнодействаща няма смисъл

- определение: *количество движение* на точка с маса m - вектор $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$, имащ направление на скоростта на точката
- главен вектор на количеството движение на система материални точки

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \qquad (23)$$

  - проекции на (23) върху осите на неподвижна Декартова система

$$Q_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i, \qquad Q_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i, \qquad Q_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{z}_i$$

- отчитайки означенията, (22) приема вида

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{V}, \ \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{V} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{Q} = \mathbf{V} \qquad (24)$$

  - проекции на (24) върху осите на неподвижна Декартова система

$$\frac{dQ_x}{dt} = V_x, \qquad \frac{dQ_y}{dt} = V_y, \qquad \frac{dQ_z}{dt} = V_z$$

❖ Теорема: *Векторната производна по времето на количеството движение на система материални точки е равна на главния вектор на външните сили, приложени към системата.*

- следствие: вътрешните сили не влияят на изменението на количеството движение на системата

- <u>закон за запазване на количеството движение на система материални точки</u>: Ако главният вектор на външните сили е нула (системата е изолирана от външни въздействия), то количеството движение се запазва във времето по големина и направление

5. Теорема за масовия център на система материални точки.

- маса на система от материални точки с маси m_i $(i = 1,\dots,n)$: $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$
- масов център на система от точки: точка C с радиус-вектор $\mathbf{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$
- в Декартови координати: $x_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$, $y_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$, $z_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$
- разлика с понятието „център на тежестта“ – масовият център не е свързан с наличието на гравитационни сили, т.е. е по-общо понятие
- след диференциране по времето на радиус-вектора на масовия център:

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \ \Rightarrow M\dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{Q} \quad \text{или} \quad M\,\mathbf{v}_C = \mathbf{Q} \qquad (25)$$

- количеството движение на система от материални точки е равно на произведението от масата на системата и скоростта на масовия ѝ център, т.е. на количеството движение на масовия ѝ център, където все едно е съсредоточена цялата маса на системата
- след диференциране по времето на (25):

$$M\,\dot{\mathbf{v}}_C = \frac{d}{dt}\mathbf{Q} \;\;\Rightarrow\;\; M\,\mathbf{w}_C = \mathbf{V} \tag{26}$$

❖ Теорема: *Масовият център на система от материални точки се движи като една точка, в която е съсредоточена масата на цялата система, към която е приложен главният вектор на външните сили, действащи на системата.*

- следствие: вътрешните сили не влияят на движението на масовия център; само външните могат да изменят неговото движение
- следствие: ако системата е в покой, вътрешните сили не могат да изведат масовия център от състоянието на покой, т.е. под действие на вътрешните сили масовият център остава неподвижен

- случай на еднородно твърдо тяло, разглеждано като система материални точки, която остава неизменна: в гравитационно поле масовият център съвпада с центъра на тежестта; *центърът на тежестта на твърдо тяло се движи все едно цялата маса на тялото е съсредоточена в него и в него е приложен главният вектор на външните сили, действащи на твърдото тяло.*
- частни случаи при движение на система материални точки:

  - главният вектор на външните сили е равен на нула (тогава ускорението на масовия център също е нула и той се движи равномерно и праволинейно или е в покой)

  - проекцията на главния вектор на външните сили по някакво направление е равна на нула (тогава ускорението на масовия център по това направление също е нула и по него той се движи равномерно и праволинейно или е в покой)

6. **Движение на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос.**

- без ограничение на общността неподвижната ос се избира за ос Oz на Декартова координатна система
- момент на количество движение на точка с маса m_i относно оста Oz: $k_{iz} = h_i m_i v_i$, където h_i - разстояние до оста
- от $v_i = \omega h_i$, $\omega = \dot{\varphi}$ - ъглова скорост на тялото: $k_{iz} = \omega m_i h_i^2 = \omega m_i (x_i^2 + y_i^2)$
- главен момент на количеството движение относно оста Oz:

$$K_z = \sum_{i=1}^{n} k_{iz} = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 \tag{27}$$

- *определение*: сумата от произведенията на масите на точките от едно тяло и квадрата на разстоянието им до някаква ос се нарича *момент на инерция* на тялото относно тази ос: $J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$ (28)
- радиус на инерцията ρ на тялото относно оста Oz: $\rho^2 = J_z / M$, където M е масата на тялото
- тогава $J_z = M\rho^2$ и $K_z = J_z\omega$ (29)
- или: *Главният момент на количеството движение на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос, е равен на произведението на момента на инерцията на тялото относно оста и ъгловата скорост на тялото.*
- *инерчни моменти*: при тела, които са еднородни и имат „правилна" геометрична форма, инерчните моменти се определят чрез интегрално изчисление; при тела с произволна форма инерчните моменти се определят или приближено (с необходима точност), или експериментално
- при непрекъснато разпределение на масата в (28) m_i се заменя с dm; h_i - с разстоянието h на масов елемент dm до оста, спрямо която се определя инерчният момент, а сумирането се заменя с интеграл по цялата маса M на тялото, т.е. $J_z = \int_M h^2 dm$ (30)
- означения: $d\tau$ - елементарен обем на масовия елемент, δ - плътност
- тогава $dm = \delta d\tau$ и $J_z = \int_V h^2 \delta d\tau$, където V е целият обем на тялото
- при еднородни тела плътността е постоянна, $\delta = M / V$ и $J_z = \frac{M}{V} \int_V h^2 d\tau$ (31)
- пример: инерчен момент на тънък прът с дължина l относно ос, перпендикулярна на l и минаваща през единия му край

  Ако σ е площта на напречното сечение на пръта, то $d\tau = \sigma\, dl$, $V = \sigma l$ и

  $$J_z = \frac{M}{V} \int_V h^2 d\tau = \frac{M}{\sigma l} \int_0^l h^2 \sigma\, dh = \frac{M}{l} \frac{h^3}{3} \bigg|_0^l = \frac{1}{3} M l^2;$$

  радиус на инерцията: $\rho^2 = J_z / M = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0.557l$
- инерчен момент на цилиндър с радиус R относно оста му: $J = \frac{1}{2} MR^2$
- инерчен момент на кълбо: $J = \frac{2}{5} MR^2$; $\rho = 0.632R$
- Теорема на Хюйгенс-Щайнер: *Моментът на инерция на тяло относно ос е равен на момента на инерцията на тялото относно успоредна ос на разглежданата, която минава през масовия център на тялото, прибавен към*

произведението на масата на тялото и квадрата на разстоянието между осите.

Нека $Oxyz$ е координатна система, относно оста Oz на която се определя моментът на инерция; $Cx'y'z'$ - координатна система с начало масовият център C на тялото, като осите Oz и Cz' са успоредни. Ако (a,b,c) са координати на C в $Oxyz$, то разстоянието между осите Oz и Cz' е $d=\sqrt{a^2+b^2}$. За произволна точка M_i в двете системи координатите ѝ съответно са (x_i,y_i,z_i) и (x_i',y_i',z_i'), като $x=x_i'+a, y=y_i'+b, z=z_i'+c$. Съгласно определението за инерчен момент относно оста Oz:

$$J_z=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i^2+y_i^2)=\sum_{i=1}^{n}m_i[(x_i'+a)^2+(y_i'+b)^2]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m_i[(x_i')^2+(y_i')^2]+(a^2+b^2)\sum_{i=1}^{n}m_i+2a\sum_{i=1}^{n}m_ix_i'+2b\sum_{i=1}^{n}m_iy_i'$$

Но $\sum_{i=1}^{n}m_ix_i'=Mx_C'=0$, $\sum_{i=1}^{n}m_iy_i'=My_C'=0$, $\sum_{i=1}^{n}m_i=M$, $\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i'^2+y_i'^2)=J_{z'}$, т.е.

$$J_z=J_{z'}+Md^2$$

- следствие: *Моментът на инерцията относно ос, която минава през масовия център на дадено тяло, е по-малък от момента на инерцията на тялото относно която и да е друга ос, успоредна на първата.*

- уравнение на движението на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос

Нека към тялото са приложени външни сили $\mathbf{F}_i,(i=1,...,n)$. Към тях се включват и реакциите в точките на закрепване на тялото към оста (моментите им относно оста на въртене са нули). Съгласно теоремата за изменение на количеството движение (производната на главния момент на количеството движение е равна на главния момент на външните сили) (29) приема вида (тук главният момент на външните сили относно оста е означен с m_z, а ε - ъгловото ускорение):

$K_z=J_z\omega$, $\dot{K}_z=J_z\dot{\omega}=m_z$; но $J_z\dot{\omega}=J_z\ddot{\varphi}=J_z\varepsilon$ и $m_z=\sum_{i=1}^{n}m_z(\mathbf{F}_i)$

или: $$J_z\varepsilon=\sum_{i=1}^{n}m_z(\mathbf{F}_i) \qquad (32)$$

- аналогия с постъпателното движение (смяна на термините):

  линейно преместване $\leftrightarrow$ ъглово преместване (завъртане);
  (линейна) скорост $\leftrightarrow$ ъглова скорост;
  (линейно) ускорение $\leftrightarrow$ ъглово ускорение;
  маса $\leftrightarrow$ момент на инерция (инерчен момент);
  сила $\leftrightarrow$ момент на сила