ЛЕКЦИЯ 17

Аналитична механика

Съдържание

1. Движение на точка под действие на земното привличане.

- задача: изследване на движението на материална точка под действие на земното привличане; силата на привличане е обратно пропорционална на квадрата на разстоянието от точката до центъра на Земята
- избор на координатна система: начало O – в центъра на Земята; координатна ос Ox – през началото и дадена точка от земната повърхност
- при пренебрегване на съпротивлението на въздуха и въртенето на Земята уравнението на движение на точката (съгласно втория закон) има вид:

$$m\ddot{x} = -\frac{C}{x^2}, \qquad (1)$$

- на повърхността на Земята: $x = R$ (R – радиус на Земята за разглежданата точка от земната повърхност), $\ddot{x} = -g$ (g - земно ускорение)
- от (1): $mg = -\frac{C}{R^2}$, $C = mgR^2$ и (1) приема вида

$$\ddot{x} = -\frac{gR^2}{x^2}, \qquad (2)$$

- смяна на променливите: $\dot{x} = v$, $\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$; или $\ddot{x} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ и се стига до уравнение с разделящи се променливи

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad vdv = -gR^2\frac{dx}{x^2} \qquad (3)$$

- начални условия: при $t = 0$ $x(0) = x_0 \geq R$, $\dot{x}(0) = \pm v_0$ (движение при привличане или отблъскване)
- от (3): $d(\frac{v^2}{2}) = gR^2 d(\frac{1}{x})$ и след интегриране в граници от 0 до t (при t стойностите на съответните променливи са съответно v и x) се получава

$$v^2 - v_0^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) \tag{4}$$

- Максималното разстояние H, на което ще се отдалечи точката, стартирала от повърхността на Земята с начална скорост v_0, ще се постигне, когато скоростта стане нула, т.е. при $v = 0$, $x = H$ и от (4) следва

$$v_0^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{H}\right), \qquad H = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}$$

при безкрайно ($H \to \infty$) отдалечаване от Земята: $2gR - v_0^2 = 0$, $v_0 = \sqrt{2gR}$

- обратно: ако материална точка би започнала падане с нулева начална скорост от безкрайно отдалечена позиция, тя ще достигне Земята със същата скорост $v_* = \sqrt{2gR}$

- числена стойност (при $g = 9.81\,[m/s^2]$, $R = 6.4.10^6\,[m]$): $v_* \approx 12\,[km/s]$, наричана *втора космическа скорост*

- обобщение за произволна планета с маса M и радиус R: в дясната част на (1) стои $C = fmM$, където f - коефициент в закона за привличаща сила между две тела с маси m_1 и m_2, намиращи се на разстояние r, т.е. $\mathbf{F} = -f\dfrac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r}$

- аналогично на досегашните разглеждания се стига до: $v_* = \sqrt{\dfrac{2fM}{R}}$

2. Движение на материална точка под действие на централна сила.

- точка с маса M се движи под действие на сила F, чиято линия на действие през цялото движение минава през неподвижен център O
- означения:

  $\mathbf{r}_0$ - радиус-вектор на M в начално положение M_0

  $\mathbf{v}_0$ - начална скорост

  $\mathbf{r}$ - радиус-вектор на M относно центъра O

  Ox - избрана координатна ос, съвпадаща с $\mathbf{r}_0$

  α - ъгъл между Ox и v_0

- уравнение на движението в полярни координати

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \qquad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = F_\varphi = 0 \tag{5}$$

начални условия

при $t = 0$: $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = \dot{r}_0 = v_0 \cos\alpha$, $\varphi(0) = \varphi_0$ $r_0\dot{\varphi}_0 = v_0 \sin\alpha$

от второто уравнение на (5): $r^2\dot{\varphi} = 2C = const$ (6)

- смисъл на константата от (6): *площна скорост* – производната по времето $\dot{S}$ на площта, описвана от радиус-вектора на точката М
- определяне на С от началните условия: $\dot{S} = C = \frac{1}{2}r_0^2\dot{\varphi}_0 = \frac{1}{2}r_0 v_0 \sin\alpha$, т.е.

$$r^2\dot{\varphi} = r_0 v_0 \sin\alpha \tag{7}$$

изразът (7) – пръв интеграл на уравнението на движението (*площен интеграл*)

- уравнение на траекторията (изключване на времето от системата (5))

- изразяване на $\dot{\varphi}$ от (6): $\dot{\varphi} = \frac{2C}{r^2}$
- изразяване на $\dot{r}$: $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{2C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -2C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$
- изразяване на $\ddot{r}$: $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{r}}{d\varphi} = \frac{2C}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(-2C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = -\frac{4C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$
- заместване на $\ddot{r}$ в (5) и преобразуване:

$$-\frac{4C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{F_r}{m} + r\left(\frac{2C}{r^2}\right)^2, \quad \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2F_r}{4mC^2} \tag{8}$$

- траектория на движението (форма на Бине) – изразът (8)

При $F_r < 0$ (привличане) траекторията е обърната (вдлъбната) към центъра О; при $F_r > 0$ (отблъскване) траекторията е обърната с изпъкналата си част към центъра О.

3. Движение под действие на привличане от централно тяло.

- централно тяло: тяло с маса m_0, съсредоточена в центъра, пораждащ движение на привличане под действие на централна сила
- в този случай $F = -f\frac{mm_0}{r^2}$ и (8) добива вида

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{fm_0}{4C^2} = \frac{1}{p}, \tag{9}$$

където е положено $p = \frac{4C^2}{fm_0}$; след отчитане на $C = \frac{1}{2}r_0 v_0 \sin\alpha$ и $v_* = \sqrt{\frac{2fM}{R}}$, което в случая се записва във вида $v_* = \sqrt{\frac{2fm_0}{r_0}}$,

$fm_0 = v_*^2 r_0 / 2$ - тогава $p = \dfrac{4C^2}{fm_0} = 2r_0 \left(\dfrac{v_0}{v_*}\right)^2 \sin^2\alpha$, т.е. характеризира се с началните параметри на движението и v_*, които са известни

- решението на (9) има вида (характеристичните корени на хомогенното уравнение са $\pm i$; частното решение се намира като $\dfrac{1}{p}$)

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi + \frac{1}{p} \tag{10}$$

- определяне на константите

при $\varphi = 0$: $\qquad \dfrac{1}{r_0} = C_1 + \dfrac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{p}$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi \tag{11}$$

но $\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\varphi} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr/dt}{d\varphi/dt} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d\dot{r}}{d\dot{\varphi}}$

или $-\dfrac{1}{r_0^2}\dfrac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = -\dfrac{1}{r_0^2}\dfrac{v_0 \cos\alpha}{(v_0/r_0)\sin\alpha} = -\dfrac{\cot g\alpha}{r_0}$, т.е. $C_2 = -\dfrac{\cot g\alpha}{r_0}$

тогава решението на (10) се записва като

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p}\right)\cos\varphi - \frac{\cot g\alpha}{r_0}\sin\varphi + \frac{1}{p} \tag{12}$$

- опростяване до вид на (12) като конично сечение

полагане: $\delta\cos\varepsilon = \left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{p}\right)$, $\delta\sin\varepsilon = -\dfrac{\cot g\alpha}{r_0}$; $e = p\delta$, $\omega = \varphi - \varepsilon$

тогава: $$r = \frac{p}{1 + e\cos\omega} \tag{13}$$

- основни параметри, определящи вида на коничното сечение: p и e; ъгълът $\omega = \varphi - \varepsilon$: истинска аномалия
  - при $e < 1$ таекторията е елипса
  - при $e = 1$ таекторията е парабола
  - при $e > 1$ таекторията е хипербола
  - при $\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad r = r_{\min} = \dfrac{p}{1+e}$: перихелий – минимално разстояние до фокуса на елипсата

- при $\omega = \pi \quad \Rightarrow \quad r = r_{max} = \dfrac{p}{1-e}$: афелий – максимално разстояние до фокуса на елипсата

- връзка на елиптичното движение със задачата за изстрелване на тяло с начална скорост от земната попърхност

  В този случай ъгълът α (между вертикалата, т.е. нормалата към земната повърхност в точката на изстрелване и началната скорост) се заменя с „ъгъл на хвърляне" λ спрямо земната повърхност.

  Тогава $v_* = \sqrt{2gR}$, където R е радиусът на Земята. С изменение на λ и началната скорост v_0 движението се осъществява по различен вид траектории.

  При „обикновен" изстрел движението е парабола от точката на изстрелване до точката на падане на земната повърхност (всъщност тази парабола е част от елипса с далечен фокус, съвпадащ с центъра на Земята, а близкият фокус е под повърхността близо до началната точка на движението).

  При увеличаване на началната скорост ексцентрицитетът на елипсата намалява, което съответства на приближаване на близкия фокус до центъра на Земята.

  При $v_0 = \sqrt{gR}$ и $\lambda = 0$ траекторията става окръжност и тялото ще описва кръгова орбита около Земята; стойността на началната скорост е $v_0 \approx 7.9\,[km/s]$, т.нар. „първа космическа скорост".

  При по-нататъшно увеличаване на началната скорост движението се извършва по елипси, ексцентрицитетът на които намалява до минимално значение $e_{\min} = \sin\lambda$ и при $v_0 = \sqrt{2gR}$ (втора космическа скорост) елипсата се превръща в парабола, която след последващо увеличаване на параметрите на движението (при $e > 1$) преминава в хипербола.