ЛЕКЦИЯ 1

Аналитична механика

Библиография

Основна:

Анчев А., Л. Лилов, С. Радев (1988). Лекции по аналитична механика, ч. 1. Унив. изд. „Св. Кл. Охридски“, София.
Лойцянский Л. Г., А. И. Лурье (1995). Курс теоретической механики. ч. 1 и 2, „Наука“, Москва.

Бл. Долапчиев, Аналитична механика, 2-ро издание, София, 1966.

Бухгольц, Н. Н., Основной курс теоретической механики, изд. 6-ое, Наука, Москва, 1976.

Допълнителна:

Марков К. (1995). Ръководство по аналитична механика. Унив. изд. „Св. Кл. Охридски“, София.

Писарев А., Ц. Парасков, С. Бъчваров (1986, 1988). Курс по теоретична механика. ч. 1 и 2. ДИ „Техника“, София.

Литература

1. Percey F. Smith, William R. Lfngley, Yale University, Theoretical Mechanics, Ginn and Company, Boston-New York-Chicago-London, 1910.
2. A. Nony Mous, A Short Introduction to Theoretical Mechanics, Brigham University, 2007.
3. Rugerro M. Santilli, Foundation of Theoretical Mechanics, Cambridge, USA, Springer-Verlag Ney York Inc.,1983

Text: "*Classical Mechanics, 3th Edition,*" H. Goldstein, C.P. Poole, J.L. Safko, Addison-Wesley (2002).

"*Mathematical methods in classical mechanics,*" V.I Arnold (1989).

Web Site: http://www.colorado.edu/physics/phys5210/

Съдържание

1. **Предмет на аналитичната механика.**

- движението като философско понятие: всички процеси и явления във вселената

- механично движение – изменение във времето на взаимното разположение на телата впространството

- изучаване на общите закони на механичното движение и механичното взаимодействие на материалните тела

- основни понятия: пространство, време, сила, маса

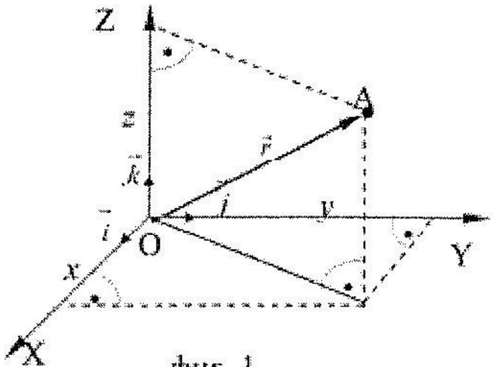
- материална точка: материален обект с пренебрежимо малки размери

- абсолютно твърдо тяло: разстоянието между произволни негови точки остава неизменно независимо от механичните въздействия

- движението - векторна функция със скаларен аргумент времето

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

- координатна система – средство за описание на движението

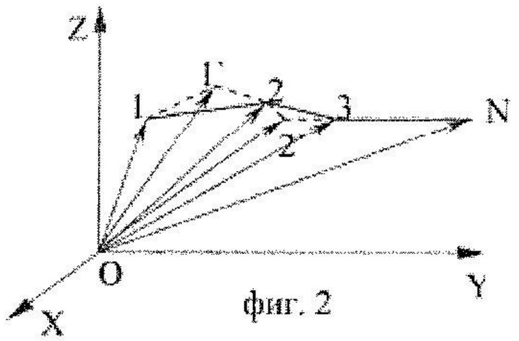


фиг. 1

- Скаларни функции : x=x(t); y=y(t); z=z(t)

2. **Траектория на точка.**

- Непрекъсната крива в пространството



фиг. 2

3. **Векторна функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ на скаларен аргумент t.**

- *определение:* на всяко числено значение на t съответства определено значение на вектора – определени модул и направление

- скаларна функция $x = x(t)$ на скаларен аргумент t

- представяне

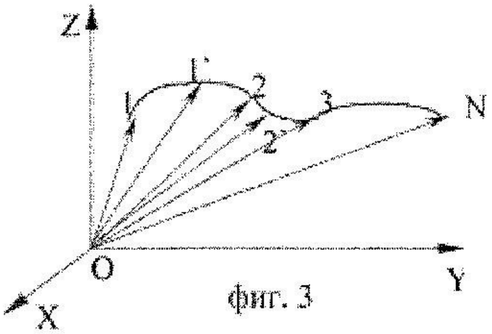
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ - единични вектори по координатните оси на Декартова система

4. **Ходограф на вектор-функция.**

- Траектория, описвана от краищата на вектора на вектор-функцията, като векторите имат общо начало една неподвижна точка

- Съпоставяне на траектория на точка и ходограф на вектор-функция
  траекторията на точка – ходограф на вектор-функция



фиг. 3

5. **Производна на векторна функция.**

- дефиниция

$$\mathbf{a}'(u) = \frac{d\mathbf{a}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{a}(u + \Delta u) - \mathbf{a}(u)}{\Delta u}$$

Вектор с направление на допирателната към ходографа и посока, съответна на нарастване на аргумента

$|\mathbf{a}'(u)|$ - модул на производната

a - големина на вектора $\mathbf{a}$

a' - големина (стойност) на производната на вектора $\mathbf{a}$

- Правила за диференциране

$$\boxed{\frac{d}{du}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{du}}$$

- Пример: производна на единичен вектор $\mathbf{e}$ с постоянно направление

$$\frac{d\mathbf{e}}{du} = \mathbf{0}$$

- Пример: производна на вектор $\mathbf{a}$ с постоянна големина

$$\frac{da^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{a}\,\mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{a} + \mathbf{a}\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 2\mathbf{a}\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \mathbf{a} \perp \frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

- За координатна система с неподвижни (с постоянни направления) оси

$$\mathbf{a}(u) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad , \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

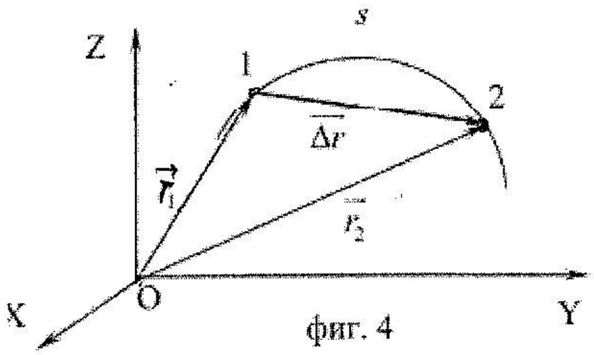
$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \frac{da_x}{du}\mathbf{i} + \frac{da_y}{du}\mathbf{j} + \frac{da_z}{du}\mathbf{k}\,, \qquad \left|\frac{d\mathbf{a}}{du}\right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{du}\right)^2 + \left(\frac{da_y}{du}\right)^2 + \left(\frac{da_z}{du}\right)^2}$$

$$a'(u) = \frac{da}{du} = \frac{a_x\dfrac{da_x}{du} + a_y\dfrac{da_y}{du} + a_z\dfrac{da_z}{du}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$|\mathbf{a}'(u)| \neq a'(u)$$

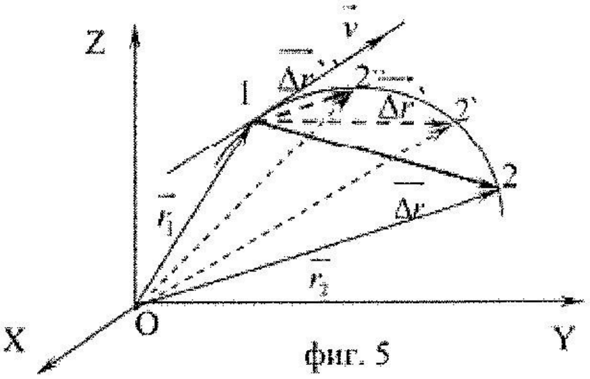
6. Вектори скорост и ускорение на движеща се точка.

$$\Delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$$



фиг. 4

средна скорост: $\mathbf{v}_{cp} = \dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ **моментна скорост:** $\mathbf{v} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$



фиг. 5

$$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Средно ускорение: $\mathbf{w}_{cp} = \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$

моментно ускорение: $\mathbf{w} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{v} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$

$$w = |\mathbf{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

7. Триедър на Френе.

- естествена координатна ситема

регулярна крива: допуска задаване с векторно-параметрично уравнение $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, където $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ е n пъти непрекъснато диференцируема функция; при $n=1$ кривата се налича *гладка*

s - криволинейна абсциса

s = s(t) естествен закон на движение на точката
$\boldsymbol{\tau}$ - вектор по тангентата към траекторията

$$\boldsymbol{\tau}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

Теорема: Всяка непрекъсната и диференцируема функция (гладка крива) притежава единствена допирателна във всяка точка. Ако $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ е векторно-параметричното уравнение на кривата, то допирателната в точката, съответна на стойността на аргумента t, има направлението на вектора $\dot{\mathbf{r}}(t)$.

- оскулачна равнина

  Нека P_0 - точка от гладка крива, а $\boldsymbol{\tau}_0$ - вектор по тангентата в тази точка.

  Нека P_1 - друга точка от кривата, а $\boldsymbol{\tau}_1$ - вектор по тангентата в тази точка.

  Векторите $\boldsymbol{\tau}_0$ и $\boldsymbol{\tau}_1$ с начало P_0 характеризират в общия случай равнина, която при граничен преход $P_1\to P_0$ се дефинира като оскулачна.

  Смисъл: оскулачната равнина е „най-плътно" приближена до кривата.

  Следствие: оскулачната равнина или е единствена, или всяка равнина през допирателната към кривата в дадена точка е оскулачна.

- нормална равнина и главна нормала

  нормална равнина в точка – перпендикулярна равнина към тангентата в тази точка

  главна нормала – пресечница на оскулачната и нормалната равнина

- единични вектори $\boldsymbol{\tau}$ по тангентата и $\mathbf{n}$ по главната нормала

- бинормала и единичен вектор по бинормалата

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$$

С всяка точка от траекторията може да се свърже естествена координатна система (естествен триедър , триедър на Френе) с оси, насочени по тангентата, нормалата и бинормалата.

Единичните вектори по тези оси образуват дясна координатна система.