ДМ   Дичев   31.03.14

Затворени мн-ва от функции

F - мн-во от двуични ф-ии

$[F]$ - затворено относно суперпозиция

Деф - Едно мн-во F от ф-ии се нарича затворено ако $[F] = F$

Пример: F_2, $[F_2] = F_2$

Тв (Критерии за затвореност)

Нека F е мн-во от функции. Тогава, ако

1) $I_i^n \in F$ за всяко естествено i, n; $1 \leq i \leq n$

2) Ако $f, g \to g_n \in F$, то $f(g_1 \ldots g_n) \in F$, то F е затворено

Док

Нека 1) и 2) са налице. Дали F е затворено

$\Rightarrow$ $F \subseteq [F]$ - тривиално

$\Leftarrow$? $[F] \subseteq F$? - с индукция относно $[F]$

а) $f \in F \Rightarrow f \in F$

б) I_i^n - крайна ф-ия $\Rightarrow I_i^n \in F$ по 1)

$f, g_1 \ldots g_n \in [F] \overset{\text{инд. пред.}}{\Longrightarrow} f, g_1 \ldots g_n \in F \overset{\text{по 2)}}{\Longrightarrow} f(g_1 \ldots g_n) \in F$ т.е.

$[F] \subseteq F \Rightarrow [F] = F$ □

Деф Казваме че f запазва 0 (1), ако $f(0 \ldots 0) = 0$

$(f(1 \ldots 1) = 1)$

Клас $T_c = \{ f \mid f$ запазва $c \}$, $c = 0, 1$

Тв Класовете T_0, T_1 са затворени

Док - T_0 - затворено?

а) $I_i^n \in T_0$? ; $I_i^n(0 \ldots i=0, \ldots 0) = 0$ - и променливата

б) Нека $f, g_1 \ldots g_n \in T_0$

суперпозиция $g_1(0 \ldots 0) = 0, \ldots, g_n(0 \ldots 0) = 0$

$h(0 \ldots 0) = f(g_1 \ldots g_n) = f(0 \ldots 0) = 0$

За T_1 - аналогично

T_0 и T_1 - затворени

1

Сл (от миналия път)

$F = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \oplus, \cdot\}$ е пълно мн-во от ф-ии

$G = \{\cdot, \overline{}\}$ - пълно мн-во, пр $x \oplus 1 = \overline{x} \Rightarrow F$-пълно

Деф Полином на Жегалкин наричаме ф-я от вида

$$f(x_1 \dots x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n + a_{n+1} x_1 x_2 \oplus \dots$$
$$\oplus\, a_k x_{n-1} x_n \oplus a_{k+1} x_1 x_2 x_3 \oplus \dots \oplus a_e x_1 \dots x_n$$

$a_0 \dots a_e$ - фиксирана const

Деф Полином на Жегалкин за ф-ята $g: J_1^n \to J_2^n$

се нарича такъв полином на Жегалкин f,

че $f(x_1 \dots x_n) = g(x_1 \dots x_n)$, $x_1 \dots x_n \in \{0, 1\}$

x	y	x -> y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$x \to y = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$

при $x = 0, y = 0 \Rightarrow a_0 = 1$

при $x = 0, y = 1 \Rightarrow a_2 = 0$

при $x = 1, y = 0 \Rightarrow a_1 = 1$

при $x = 1, y = 1 \Rightarrow a_3 = 1$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_0 + a_1 = 0 \\ a_0 + a_2 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \end{cases}$$

Деф Една ф-я F се нарича линейна, ако

нейният полином на Жегалкин има вида

$$a_1 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n$$

L - класът на всички линейни функции

Тв Класът L е затворен

Док а) $I_i^n(x_1 \dots x_n) = x_i$, $I_i^n \in L$

б) Ако $f, g_1 \dots g_n \in L \Rightarrow\, ?\ f(g_1 \dots g_n) \in L$

б) Нека $f, g_1 \dots g_n \in S \Rightarrow h = f(g_1 \dots g_n)$

$h^* = f^*(g_1^* \dots g_n^*) = f(g_1 \dots g_n) = h \Rightarrow h \in S \Rightarrow$

S е затворено мн-во □ (клас)

$\boxed{T_0, T_1, L, M, S}$!!!

Критерии на Пост за пълнота на мн-во от ф-ии

Th. на Пост

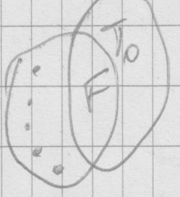
Нека F е мн-во от дв. ф-ии. Тогава F е пълно $\Longleftrightarrow$ F не се съдържа в никой от класовете T_0, T_1, L, M, S ($F \not\subseteq T_0, F \not\subseteq T_1, F \not\subseteq L, F \not\subseteq M, F \not\subseteq S$)

Док.

$\Rightarrow$ Нека F е пълно мн-во от ф-ии. Допускаме че $F \subseteq T_0 \Rightarrow [F] \subseteq [T_0] = T_0$. $\mathcal{F}_2 = [F] \Rightarrow$ $\mathcal{F}_2 \subseteq T_0$ но $\tilde{1} \in T_0 \Rightarrow$ ↯ $\Rightarrow F \not\subseteq T_0$

Аналогично за останалите

$\Leftarrow$ Нека $F \not\subseteq T_0, F \not\subseteq T_1, F \not\subseteq L, F \not\subseteq M, F \not\subseteq S \Rightarrow$ $\exists$ ф-ии $f_0, f_1, f_l, f_m, f_s \in F$ и $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1,$ $f_l \notin L$, $f_m \notin M$, $f_s \notin S$



Разгл. $f_0(0 \dots 0) = 1$ и $f_1(1 \dots 1) = 0$

$g_0(x) = f_0(x \dots x)$, $g_1(x) = f_1(x \dots x)$

$g_0(0) = 1$, $g_1(1) = 0$

$g_0(1) = ?$ $g_1(0) = ?$ $\Rightarrow$

I възм $g_0(1) = 0, g_1(0) = 0 \Rightarrow g_0(x) = \bar{x}$, $g_1(x) = \tilde{0}$

II възм $g_0(1) = 0, g_1(0) = 1 \Rightarrow g_0(x) = \bar{x}$, $g_1(x) = \bar{x}$

III възм $g_0(1) = 1, g_1(0) = 0 \Rightarrow g_0(x) = \tilde{1}$, $g_1(x) = \tilde{0}$

IV възм $g_0(1) = 1, g_1(0) = 1 \Rightarrow g_0(x) = \tilde{1}$, $g_1(x) = \bar{x}$

От $\overline{I} \Rightarrow \tilde{1} \in F$; от $\overline{II} \Rightarrow \overline{} \in F$

от $\overline{III} \Rightarrow \tilde{0}\tilde{1} \in F$; от $\overline{IV} \Rightarrow \tilde{0}\tilde{1} \in F$

от $\overline{I}$ ще получим че $\tilde{0}\tilde{1} \in F$

$f_S \in S \Rightarrow \exists \alpha$ т.ч. $f_S(\alpha) = f_S(\bar{\alpha})$

Въвеждаме $g_S(x) = f_S(x^{a_1} \dots x^{a_n}) \in F$

$g_S(0) = f_S(0^{a_1} \dots 0^{a_n}) = f_S(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n) = f_S(a_1 \dots a_n) = f_S(1^{a_1} \dots 1^{a_n}) = g_S(1) \Rightarrow$

$g_S(x) = const\ (\tilde{0}, \tilde{1})$ т.е.

$\underline{\underline{\tilde{0}\tilde{1} \in F}} \Rightarrow g_S \in F$