ДМ Алчев 19.05.14

Крайни недетерминирани автомати

$M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ където $\Delta \subseteq K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times K$

(p, w) - конфигурация

$(p, w) \vdash_M (p', w')$

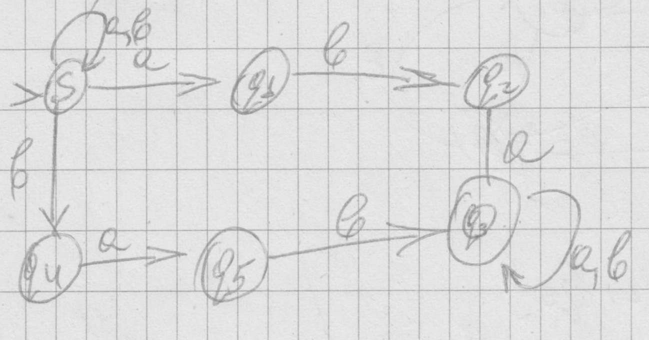
$\vdash_M^*$ - рефлексивно транзитивно затваряне (много стъпки)

$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ можем да разглеждаме като недетерминиран автомат

$\Delta = \{(p, a, q) \mid \delta(p, a) = q\} = G_\delta$ графиката на δ

$M' = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ - недетерминиран

Пример



$(s, bab) \vdash_M (s, ab) \vdash_M (s, b) \vdash (s, \varepsilon)$

Деф. Нека M_1 и M_2 са крайни автомати. Казваме че M_1 и M_2 са еквивалентни $\Longleftrightarrow$ те разпознават едни и същи езици $(L(M_1) = L(M_2))$

Th Нека $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ е краен недетерминиран автомат. Тогава съществува краен детерминиран автомат $M' = (K', \Sigma, \delta', s', F')$ т.ч. M и M' са еквивалентни

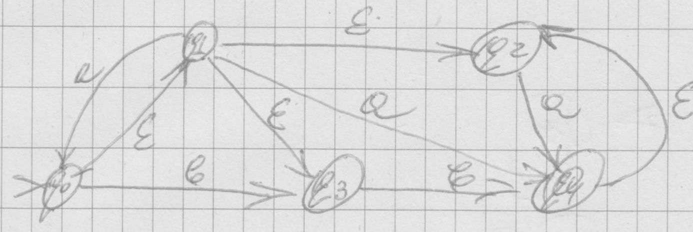
Док Припомняне
A - мн-во. $P(A) = 2^A$ = съвкупността от всички подмножества на A

$M' = (K', \Sigma, \delta', s', F')$

$K' = 2^K$, $F' = \{Q \mid Q \subseteq K$ и $Q \cap F \neq \emptyset\}$

$q \in K$, $E(q) = \{p \mid (q, \varepsilon) \vdash_M^* (p, \varepsilon)\}$

Пример



$E(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_3\}$

$E(q_2) = \{q_2\}$; $E(q_3) = \{q_3\}$

$E(q_4) = \{q_2, q_4\}$

връзки през ε

2

$s' = E(s)$

$\delta'(Q, a) = \bigcup \{E(p) \mid \exists q \in Q : (q a p) \in \Delta, p \in K, a \in \Sigma, Q \subseteq K\}$

Нека $(q, \omega) \vdash_M^* (p, \varepsilon) \iff (E(q), \omega) \vdash_{M'} (P, \varepsilon)$

за някое $P : p \in P$

Док с индукция относно $|\omega|$

1) $|\omega| = 0$ т.е. $\omega = \varepsilon$

$(q \varepsilon) \vdash_M^* (p \varepsilon) \iff p \in E(q) \iff (E(q), \varepsilon) \vdash_{M'}^* (P, \varepsilon)$ $p \in P$

$(E(q) \varepsilon) \vdash_{M'}^* (\underset{\substack{\cup \\ p}}{E(q)}, \varepsilon)$

2) Допускаме че твърдението е вярно за думи с дължина n и нека $|\omega| = n+1$

$\omega = va$, $a \in \Sigma$, $|v| = n$

индукционното предположение е в сила

$\to$ Нека $(q, \omega) \vdash_M^* (p, \varepsilon)$ т.е. $(q \omega) \vdash_M^* (r_1, a) \vdash_M (r_2, \varepsilon) \vdash_M^*$ (p, ε)

Съгласно индукционното предположение

$(q, v) \vdash_M^* (r_1, \varepsilon)$ следователно $\exists R_1 : r_1 \in R_1$

$(E(q), v) \vdash_{M'}^* (R_1, \varepsilon)$; $(E(q), va) \vdash_{M'}^* (R_1, a) \vdash_{M'}^* (P, \varepsilon)$

Заради $(r_1, a) \vdash_M (r_2, \varepsilon)$ заключаваме че

$\exists (r_1, a, r_2) \in \Delta$

$p \in R_2 \subseteq \delta(R_1, a) = P$ □

$\leftarrow$ Нека $(E(q) \omega) \vdash_{M'}^* (P, \varepsilon)$ т.е. $(E(q) va) \vdash_{M'}^* (R_1, a) \vdash_{M'}^* (P \varepsilon)$ $p \in P$

$\delta'(R_1 a) = \bigcup \{E(r') \mid \exists q \in R_1 : (q a r') \in \Delta\}$

$p \in \delta'(R_1 a)$ т.е. $p \in R_2 \subseteq \delta'(R_1 a) \Rightarrow$
$\exists\ r_1 \in R_1 : (r_1\ a\ r_2) \in \Delta$

$(q\,w) \vdash_M^* (r_1 a) \vdash_M (r_2 \varepsilon) \vdash_M^* (p\,\varepsilon)$ □

Док. тв.

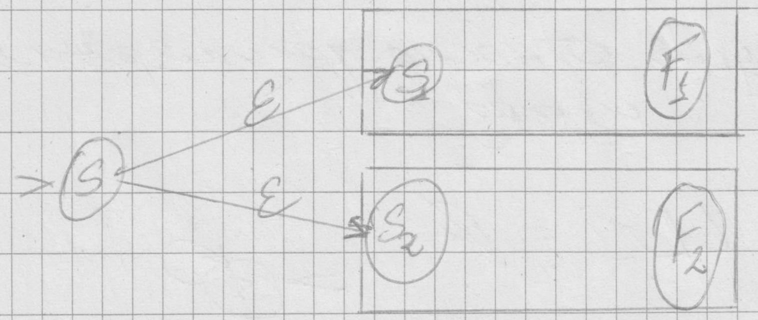
$w \in L(M) \Leftrightarrow (s\,w) \vdash_M^* (f, \varepsilon),\ f \in F$
$\Leftrightarrow (E(s), w) \vdash_{M'}^* (P, \varepsilon),\ f \in P \Leftrightarrow$
$\overset{\shortparallel}{s'}$ еквивалентни
$w \in L(M') \Rightarrow L(M) = L(M')$ □

Регулярни езици и крайни автомати

Тв. Множеството на езиците които се разпознават от крайни автомати е затворено относно следните операции
а) обединение
б) сечение
в) конкатенация
г) допълнение
д) звезда на Клини

Док. Нека $M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$ и $M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$ са два крайни автомата които разпознават езиците L_1 и L_2
Предполагаме че $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

а)



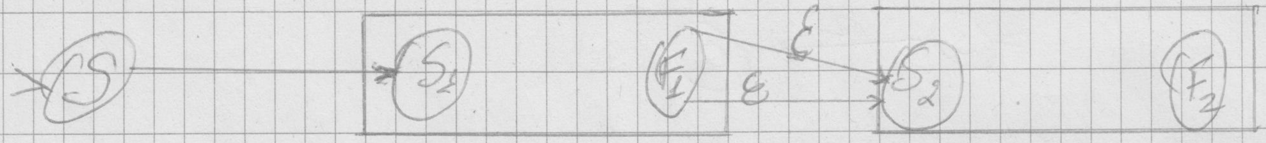
$M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$

$K = K_1 \cup K_2 \cup \{s\}$

$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s\,\varepsilon\,s_1), (s\,\varepsilon\,s_2)\}$

$F = F_1 \cup F_2$

б)



$K = K_1 \cup K_2 \cup \{s\}$

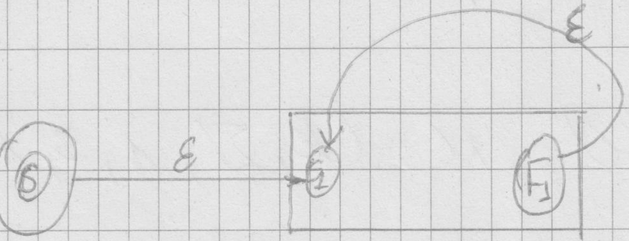
$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, \varepsilon, s_1)\} \cup \{f\,\varepsilon\,s_2 \mid f \in F_1\}$

$F = F_2$

г) $M = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, K_1 \setminus F_1)$

в) $L_1 \cap L_2 = \Sigma^* \setminus ((\Sigma^* \setminus L_1) \cup (\Sigma^* \setminus L_2))$

д)



$K = K_1 \cup \{s\}$

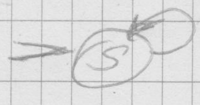
$\Delta = \Delta_1 \cup \{s\,\varepsilon\,s_1\} \cup \{f\,\varepsilon\,s_1 \mid f \in F_1\}$

$F = F_1 \cup \{s\}$ □

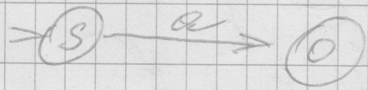
Th Един език е регулярен $\Leftrightarrow$ той се разпознава от краен автомат

Док → с индукция относно регулярния израз

1) $\gamma = \emptyset$ $\quad L[\gamma] = \emptyset$



2) $\gamma = a \in \Sigma$ $\quad L[\gamma] = \{a\}$



3) $\alpha = (\alpha_1 \cup \alpha_2)$ съгласно индукционното предположение

$L(M_1) = \mathcal{L}[\alpha_1]$, $L(M_2) = \mathcal{L}[\alpha_2]$

$L = L(M_1) \cup L(M_2)$

4) $\alpha = (\alpha_1 \circ \alpha_2)$ $\quad L = L(M_1) \circ L(M_2)$

5) $\alpha = (\alpha_1^*)$ $\quad L = (L(M_1))^*$ ◁

←

Нека $L = L(M)$, $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$

$K = \{q_1 \dots q_n\}$, $s = q_1$

$\mathcal{L}(i, j, k) = \{w \mid (q_i, w) \vdash_M^* (q_j, \varepsilon)$ и в този извод няма междинни състояния с номера по-големи от $k\}$

$(q_i, w) \vdash_M (q_{l_1}, w') \dots \vdash_M \dots \vdash_M (q_{l_p}, \varepsilon)$

където $l_1 \dots l_p \leq k$ $\qquad k = 0 \dots n$

(q_i, a, q_j) $\qquad a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

$J(i, j, k)$ – регулярни езици

$$L(M) = \bigcup_{q_j \in F} J(1, j, n)$$

7