ДМ
Ангелов 17.04.14

Деф: Нека R е бинарна релация в A.
Рефлексивно и транзитивно затваряне на R се нарича R^* дефинирано индуктивно така:
а) ако $(a,b) \in R$, то $(a,b) \in R^*$
б) ако $a \in A$, то $(a,a) \in R^*$
в) ако $(a,b) \in R^*$ и $(b,c) \in R^*$, то $(a,c) \in R^*$
г) $(a,b) \in R^* \iff (a,b) \in R^*$ по а) ÷ в)

Тв
Нека R е бинарна релация в A. Тогава R^* е рефлексивна и транзитивна
Док
$(a,a) \in R^*$ по б) $\Rightarrow R^*$ - рефлексивна
Нека $(a,b) \in R^*$ и $(b,c) \in R^*$. Тогава $(a,c) \in R^*$ по в) $\Rightarrow$ транзитивна

$I_n = \{1 \dots n\}$, $J_n = \{0 \dots n-1\}$

A - кр. мн-во с n елемента ако $\exists f: I_n \to A$ биекция

N; A е изброимо ако $\exists$ биекция $f: N \to A \Rightarrow$
$A = \{f(0), f(1), \dots\}$
A е най-много изброимо ако A е крайно мн-во или A е изброимо мн-во

Тв: Ако A е НМИ и ∞, то A е изброимо

$A = \{a_0, \cancel{a_1}, a_2 \dots\}$ - в сл. $a_0 = a_1$

$a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2} \dots$ - безкр. редица от неповтарящи се елементи; $f(0) = a_0$, $f(S) = a_{i_S}$, $S = 1, 2 \dots$

1

Сл A е изброимо $\iff$ елементите на A могат да се подредят в ∞ редица от неповтарящи се елементи

Тв| Нека A и B са НМИ $\Rightarrow$ $A \cup B$ е НМИ

Док

$A = \{a_0, a_1 \dots\}$, $B = \{b_0 \dots\}$, $A \cup B = \{a_0, b_0, a_1, b_1 \dots\}$

Сл Ако A_0, A_1 – е ∞ редица от НМИ мн-ва тогава $\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$ е НМИ

$$A_0 \cup A_1 \dots = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = \{a_0^0, a_1^0 \dots\}$$

Тв| Нека A и B са изброими, тогава $A \times B$ е изброимо

Док

$A = \{a_0, a_1 \dots\}$, $B = \{b_0, b_1 \dots\}$ Тогава $A \times B = \{a_0\} \times B \cup \{a_1\} \times B \dots$

$\mathbb{N}$ - изброимо, $\mathbb{Z}$ - изброимо ; $\mathbb{N} \cup (-1, -2 \dots)$

Тв| $\mathbb{Q}$ - изброимо

Лема $\mathbb{Q}^+$ - изброимо = съвк на $\forall$ полож рационални числа

Док$^{\text{лема}}$: Разгл $\mathbb{N}_+^2 = \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ - изброимо

$(p, q) \in \mathbb{N}_+^2$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+$ е НМИ

Док$^{\text{Тв}}$ $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$

Тв| Съвкупността от подмн-вата на $\mathbb{N}$ не е изброимо

Деф: Хар-чна ф-я на $A \subseteq \mathbb{N}$ се нарича $C_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$

$$C_A\{x\} = \begin{cases} 1 & \text{ако } x \in A \\ 0 & \text{ако } x \notin A \end{cases}$$

Допускане $C_A(x) = y$

x	0	1	2	…
y	1	0	1	

Док: С допускане на противното. $P(\mathbb{N})$ – съвк на ∀ подмн-ва на $\mathbb{N}$. Допускаме че $P(\mathbb{N})$ е изброимо. Следователно елементите ѝ могат да се подредят в редица $A_0, A_1 \dots$ Нека $C_{A_0}; C_{A_1} \dots$ са хар-те им ф-ции

	0	1	2	3	…
$C_{A_0}(x)$					
$C_{A_1}(x)$					
$C_{A_2}(x)$					
$C_{A_3}(x)$					

– безкрайна таблица от 0 и 1

Диагонален метод $C_{A_n}(n)$

$$C_{A_n}(n) = \begin{cases} 1 & \text{ако } C_{A_n}(n) = 0 \\ 0 & \text{ако } C_{A_n}(n) = 1 \end{cases}$$

n	1	2	3	4	…
$C_{A_n}(n)$					

$A = \{ n \mid C(n) = 1 \} \Rightarrow C_{A_n} \equiv C(n)$ за $n \in \mathbb{N}$

C е хар-чна ф-я на A. Следователно $A = A_n$ за някое n.

$$C_{A_n}(n) = \begin{cases} 1 \Rightarrow C(n) = 0 \Rightarrow C_{A_n}(n) \neq C_A(n) \\ 0 \Rightarrow C(n) = 1 \Rightarrow C_{A_n}(n) \neq C_A(n) \end{cases} \Rightarrow \lightning$$

$\boxed{\text{Тв}}$ Съвк-та $\mathbb{R}^+$ не е изброимо мн-во.

Сл $\mathbb{R}$ не е изброимо мн-во

Лема $(0,1)$ не е изброимо мн-во

$a = 0,a_1 a_2 \dots \quad 0 \le a_i \le 9$

Допускаме че $\forall$ R числа в $(0,1)$ могат да се подредят в редица

$0,a_1^0 \dots \quad 0,a_1^1, a_2^1 \dots; \quad b = 0,b_1 b_2 \dots$

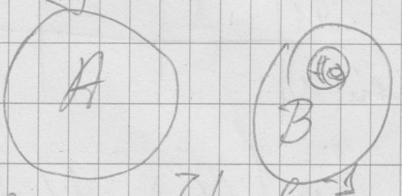
$$b_i = \begin{cases} a_i^i + 1, & \text{ако } 0 \le a_i^i < 5 \\ a_i^i - 4, & \text{ако } 5 \le a_i^i \le 9 \end{cases}$$

$f: A \to B$, $g: B \to C$. Суперпозиция (композиция) на f и g се нарича ф-ята $h: A \to C$, с $h(a) = g(f(a)) \in C$, $a \in A$

Деф. Образ на A, посредством f, $f: A \to B$, $A_1 \subseteq A$

$f[A_1] = \{f(a) \mid a \in A_1\} = \{b \mid \exists a \in A_1, f(a) = b\}$

Нека $f: A \to B$, f-инективно. Обратна ф-я на f се нарича такава ф-я $g: f[A] \to A$ със свойството, за $\forall a \in A$ $g(f(a)) = a$



Тв.

Ако $f: A \to B$, f-биекция, то $\exists!\, f^{-1}$ обратна на f и f^{-1} е биекция $f^{-1}: B \to A$

$n < m \iff \exists$ инекция $f: I_n \to I_m$, но не $\exists$ $g: I_m \to I_n$ инекция