ДМ Димов 12.05.14

Крайни автомати

Азбуки и езици

Σ - крайна азбука

Дума в азбуката Σ се нарича всяка редица $a_1 \dots a_n$ от букви в Σ т.е. $\forall a_i \in \Sigma$

n - дължина на думата

a_i - i-тият член на думата

$\omega: \{1 \dots n\} \to \Sigma$ - изображение на азбука

Ако $\omega(i) = a_i$ то $\omega = a_1 \dots a_n$

Нека $\omega = a_1 \dots a_n$ и $v = b_1 \dots b_k$. Конкатенация на ω и v се нарича думата $u = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_k$

$$\omega \circ v = \omega v = u$$

ε - празна дума - дължина 0

Индуктивно ще дефинираме u^n за $n \in \mathbb{N}$, като

$u^0 = \varepsilon$ $\quad u^{n+1} = u^n \circ u$

ω^R - обратна дума - R от reverse

1) $|\omega| = 0$ т.е. $\omega = \varepsilon$ то $\omega^R = \varepsilon$

2) $|\omega| = n+1 \Rightarrow \omega = va$, $a \in \Sigma$, $|v| = n$. Тогава

$$\omega^R = a \circ (v^R)$$

Ако Σ е азбука то Σ^* е множеството на всички думи в Σ

Език се нарича всяко подмножество на Σ^*

L, L_1, L_2 - езици. Можем да дефинираме

$L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \setminus L_2$, $L_1 \circ L_2$

L^n, $n \in \mathbb{N}$ - степен на някакъв език

$L^0 = \{\varepsilon\}$; $L_1 \circ L_2 = \{w_1 \circ w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$

$L^{n+1} = L^n \circ L' = L \circ L^n$

$L^n = \{w_1 \dots w_n \mid w_1 \dots w_n \in L\}$

$L^* = \bigcup_{n=0}^{+\infty} L^n$ - звезда на Клини

$L^+ = \bigcup_{i=1}^{+\infty} L^i$

- Крайно описание на езици

Σ - азбука

$L = \{w \mid w$ има свойство $P\}$

Пример

$L_1 = \{w \in \{a\,b\}^* \mid w$ има четен брой букви$\}$

$L_2 = \{w \in \{a\,b\}^* \mid w$ има четен брой $a\}$

$L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ няма 3 последователни срещания на $b\}$

- Индуктивно дефиниране на регулярен израз в Σ

1) $\emptyset$ и всяка буква от Σ е регулярен израз

2) Ако α и β са регулярни изрази, то $(\alpha \cup \beta)$ $(\alpha \circ \beta)$ са регулярни изрази

3) Ако α е регулярен израз то $(\alpha)^*$ е регулярен израз

Пример

Нека $\Sigma = \{a\,b\}$

$((a \circ b) \cup b)^*$ е регулярен израз

Деф За всеки α регулярен израз ще определяме $L[\alpha]$ - индуктивно (Деф за Език)

1) $\alpha = \emptyset$ то $L[\alpha] = \emptyset$

2) α - буква от Σ то $L[\alpha] = \{\alpha\}$

3) Ако $\alpha = (\alpha_1 \circ \alpha_2)$ то $L[\alpha] = L[\alpha_1] \circ L[\alpha_2]$

4) Ако $\alpha = (\alpha_1 \cup \alpha_2)$ то $L_{[\alpha]} = L_{[\alpha_1]} \cup L_{[\alpha_2]}$

5) Ако $\alpha = (\alpha_1)^*$ то $L_{[\alpha]} = (L_{[\alpha_1]})^*$

Пример

Нека $\alpha = ((a \circ b) \cup b)^*$

$$L_{[\alpha]} = (L_{[(a \circ b) \cup b)]})^* = ((L_{[a \circ b]}) \cup L_{[b]})^* =$$

$$((L_{[a]} \circ L_{[b]}) \cup L_{[b]})^* = (\{ab\} \cup \{b\})^* = \{ab\}^*$$

Деф Един език L се нарича регулярен, ако $\exists$ регулярен израз α = $L_{[\alpha]} = L$

– Крайни детерминирани автомати

Припомняне ~~от~~ релация на еквивалентност (рефл и транзитивно затваряне)

Деф Нека R е бинарна релация в A.

Рефлексивно и транзитивно затваряне R^* в R се определя както следва:

1) $(a, a) \in R^*$ за $\forall a \in A$

2) Ако $(a b) \in R$ то $(a b) \in R^*$

3) Ако $(a b) \in R^*$ и $(b c) \in R^*$ то $(a c) \in R^*$

Деф Краен детерминиран автомат се нарича петорката $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ където

K – крайна азбука на състоянията

Σ – азбука

δ – функция $K \times \Sigma \to K$

s – елемент на K – начално състояние

$F \subseteq K$ – множество на заключителните състояния

3

Деф Конфигурация на M се нарича всеки елемент на $K \times \Sigma^*$ т.е. конфигурация е (q, ω), $q \in K$, $\omega \in \Sigma^*$

Деф Казваме че автомата M за една стъпка преработва (q, ω) в (q', ω') т.е.

$(q, \omega) \vdash_M (q', \omega') \overset{def}{\iff} \exists\, a \in \Sigma$ т.е. $\omega = a\omega'$ и $\delta(q, a) = q'$

$\vdash_M^*$ – рефлексивно и транзитивно затваряне на $\vdash_M$

$(q, \omega) \vdash_M^* (q, \omega)$

Деф Нека $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ е краен детерминиран автомат. Казваме че M разпознава (приема) думата ω, ако $(s, \omega) \vdash_M^* (f, \varepsilon)$ където $f \in F$

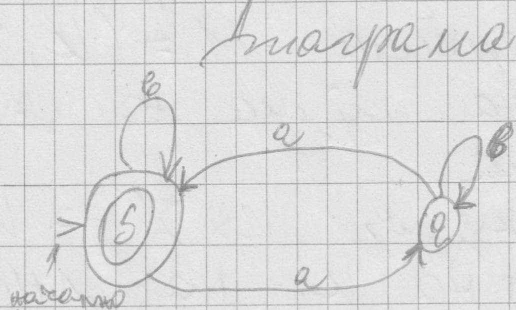
$L(M) = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^*, \omega$ се разпознава от автомата $M\}$
$= \{\omega \mid (s, \omega) \vdash_M^* (f, \varepsilon), f \in F\}$

$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$

$K = \{s, q\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ $F = \{s\}$

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
s	a	q
q	a	s
q	b	q
s	b	s

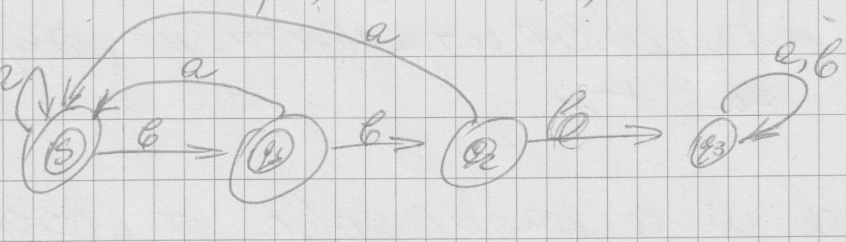
Диаграма



Заключение – с 2 кръга
Всяко звено има 2 изхода

$w = babab$

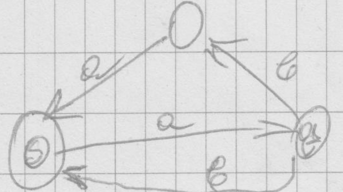
$(s, babab) \vdash_M (s, abab) \vdash_M (s, bab) \vdash_M (s, ab)$
$\vdash_M (s, b) \vdash_M (s, \varepsilon)$



— Краен недетерминиран автомат

Деф Краен недетерминиран автомат е петорката $M(K, \Sigma, \Delta, s, F)$ където
K - крайна азбука на състоянията
Σ - азбука
$\Delta \subseteq K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times K$ = релация на преходите
s - начално състояние
F - множество на заключителните състояния

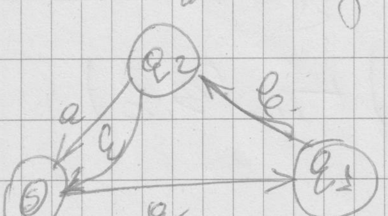
Пример: $(ab \cup aba)^*$



С 1 буква отива на 2 места
и не излизат по 2 стрелки от
всяко звено

~~Деф~~

Как да стигаме с ε



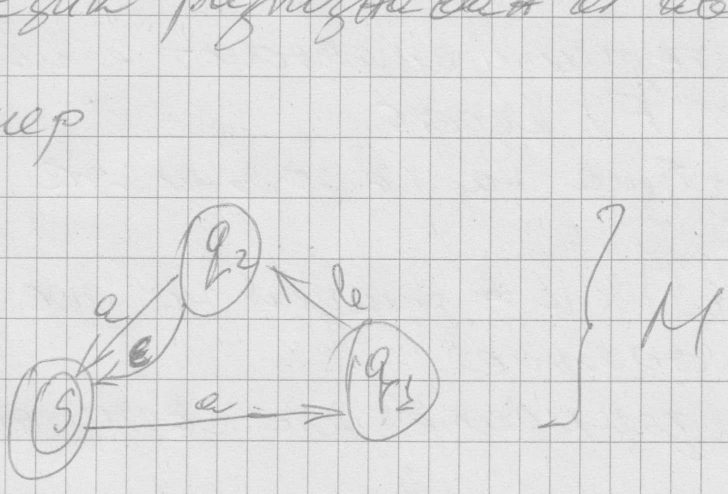
Деф $(q,w) \vdash_M (q',w') \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
$w = aw'$ и $(q,a,q') \in \Delta$

Деф $\vdash_M^*$ е рефлексивно и транзитивно затваряне на $\vdash_M$

Деф Казваме че w се разпознава от автомата M точно тогава, когато $(s,w) \vdash_M (f,\varepsilon)$, $f \in F$

$L(M)$ - език разпознаван от автомата

Пример



$(s,abab) \vdash_M (q_1,bab) \vdash_M (q_2,ab) \vdash_M$

$\vdash_M (s,b) \vdash_M \ldots$ няма от

или вместо

$\vdash_M (s,b)$ пишем $\vdash_M (s,ab)$ т.е. минава не през ε ~~пр~~ получаваме

$(s,ab) \vdash_M (q_1,b) \vdash_M (q_2,\varepsilon) \vdash_M (s,\varepsilon)$