ДМ 10.03.13
лекции

Частично наредени множества

$\langle A, \leq \rangle$ — ЧНМ

най-голям (малък); минимален (максимален)

$B \subseteq A$, B - антиверига т.е.

B - верига (линейно наредено мн)

$a < b \iff a \leq b \;\&\; a \neq b$

Тв: Нека $\langle A, \leq \rangle$ е ЧНМ и A - крайно ($\langle A, \leq \rangle$ е крЧНМ) тогава $\langle A, \leq \rangle$ притежава минимален и максимален елем.

Док: Допускаме противното $\Rightarrow$ крЧНМ не притежава max елемент

$A \neq \emptyset$ по условие. $a_0 \in A$, a_0 не е max

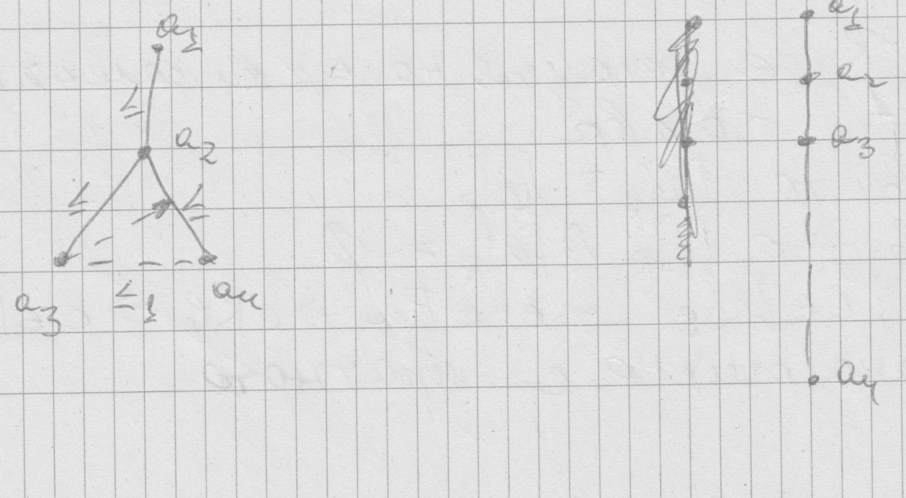
т.е. $\exists a_1 \in A$ т.ч. $a_0 < a_1$, a_1 също не е max

т.е. $\exists a_2 \in A$ т.ч. $a_1 < a_2$ ---- Получаваме безкрайна редица $a_0 < a_1 < a_2$ --- строго монотонна растяща $\Rightarrow$ ↯ с A - крайно

Деф (бинарна)

Нека R е релация в A. Продължение на R се нарича $\forall R_1$ т.ч. $R \subseteq R_1$ aRb, за $\forall a, b \in A$ ($aRb \Rightarrow aR_1b$)

$\leq_1$ е продължение на $\leq$ точно когато $\forall ab$ ($a \leq b \Rightarrow a \leq_1 b$)



1

Тв (топологична наредба)

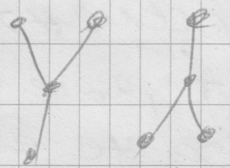
$\langle A, \le \rangle$ кр ЧНМ. Тогава $\exists$ продължение $\le_1$ на релация $\le$ т.ч. $\langle A, \le_1 \rangle$ е ЛНМ т.е. $\langle A, \le_1 \rangle$ е ЧНМ и A е ЛНМ на $\langle A, \le_1 \rangle$

Док

Нека a_0 е произв мин елемент в $\langle A, \le \rangle$

Ще построим редица $a_0, a_1 \ldots a_m$ т.ч. $A = \{a_0, \ldots a_m\}$, $a_0 \ne a_0 \ne \ldots \ne a_m$

$a_0 <_1 a_1 <_1 a_2 \ldots <_1 a_m$



Нека $a < b \Rightarrow a <_1 b$

Релации на Еквивалентност

Деф: Нека A е множество (наредено). Релация на еквивалентност в A се нарича бинарна релация R която е симетр, рефл, транзитивна

Пр: $aRb \Leftrightarrow a = b$ при $a b \in R$

Деф: Нека A е мн-во и R е релация на еквивалентност. Клас на еквивалентност съдържащ елемента a се нарича

$[a]_R = \{b \mid b \in A$ и $bRa\}$

(вместо $(a b) \in R \to aRb$)

Тв Нека R е релация на еквивалентност в A. Тогава

а) ако aRb то $[a]_R \equiv [b]_R$

б) ако aRb то $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

Док Нека aRb, $c \in [a]_R$ т.е. $cRa \Rightarrow cRb \Rightarrow c \in [b]_R$

$[a]_R \equiv [b]_R$, аналогично с обратното

Нека aRb. Допускаме че $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$. $\exists$ $c \in [a]_R \cap [b]_R$ т.е. cRa и $cRb \Rightarrow bRc$

транз

bRa т.е. aRb

Деф: Нека A е непразното множество. Разбиване на A се нарича $\{A_1 \dots A_n\}$ - съвкупност от непразни множества на A със св-ва

а) A_i е непразно ПМ на A, $i = 1 \div n$

б) $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $1 \leq i, j \leq n$ и $i \neq j$

в) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

Тв Нека A е множество и R-релация на екв в A. Тогава класовете на екв-ст образуват разбиване на мн-то A

Док

Разгл. класовете на екв-ст относно R и избиране по 1 елемент от $\forall$ клас. Нека това са елементите $a_1 \dots a_n$

$[a_1]_R \dots [a_n]_R$ т.е. $[a_1]_R \dots [a_n]_R$ е разбиване на A

Тв Нека $\{A_1 \dots A_n\}$ е разбиване на A. Тогава $\exists$ R-релация на екв. т.ч. класовете на екв относно R са $A_1 \dots A_n$

Док R са определя $aRb \Leftrightarrow \exists i$, $i = 1 \dots n$, т.ч. $a \in A_i$ и $b \in A_i$

а) aRa

б) $aRb \Rightarrow bRa$

в) Нека aRb и $bRc \overset{?}{\Rightarrow} aRc$

$\underbrace{\exists i \text{ т.ч. } a \in A_i, b \in A_i \quad \exists j \text{ т.ч. } b \in A_j, c \in A_j}$

$i = j \Rightarrow a \in A_i, c \in A_i \Rightarrow aRc$

3

Функции. Крайни и изброими мн-ва

$f: A \to B$, $a \in A$, $f(a) = b \in B$

Деф Нека $f: A \to B$. Казваме че f е обратима или инективна, ако за $\forall$ два различни елемента, $a, b \in A$ е изпълнено $f(a) \neq f(b)$

Деф Нека $f: A \to B$. Казваме че f е в/у (сюрективна) ако за $\forall$ $b \in B$ $\exists$ $a \in A$ т.е. $f(a) = b$

Деф $f: A \to B$. Казваме f е взаимно еднозначно (биекция) ако f е едновременно инекция и сюрекция

Деф: Едно мн-во A се нарича крайно и има n брой елемента, ако $\exists$ биекция $f: I_n = \{1..n\} \to A$

$A = \{a_1 .. a_n\} = \{f(1), .., f(n)\}$

Принцип на Дирихле

Нека A и B са кр. мн-ва. A има n елемента, B има m елемента, $n > m$. Тогава за $\forall$ $f: A \to B$ $\exists$-т a, b, $a \neq b$ т.е. $f(a) = f(b)$

Принцип на чекмеджетата!

Нека имаме n чекмеджета и m топки, $m > n$, Тв. че $\exists$ поне 1 чекмедже с 2 топки

Деф: 1 мн A се нарича изброимо, ако $\exists$ биекция $f: \mathbb{N} \to A$. Ако A е изброимо то $A = \{f(0), f(1) ...\}$

Деф: Казваме че едно мн-во A е най-много изброимо, ако A е крайно или изброимо

Тв Нека A е некр. мн-во. Тогава A е НМИ т.е. елементите на A могат да се подредят в безкрайна редица

④