ДМ Андреев 07.04.14

Резонираме следното $\tilde{0}, \tilde{1}$ за $\forall$ случай от 1) .. 4) - Използвали сме само f_0, f_1, f_s

$\exists f_m \notin M$, $f_m \in F \Rightarrow \exists \alpha, \beta$ $\alpha < \beta$, но $f_m(\alpha) > f_m(\beta) \Rightarrow f_m(\alpha) = 1$, $f_m(\beta) = 0$

Съгласно лема $\exists \alpha', \beta'$ т.ч. $\alpha' < \beta'$ и

$1 = f_m(\alpha') > f_m(\beta') = 0$

$1 = f_m(a_1 .. a_{i-1}, 0, a_{i+1} .. a_n) > 0 = f_m(a_1 .. a_{i-1}, 1, a_{i+1} .. a_n)$

Тогава $g_m(x) = f_m(a_1 .. a_{i-1}, x, a_{i+1} .. a_n)$

$g_m \in F$?

$g_m(0) = \underset{\sim}{1}$, $g_m(1) = 0$, $g_m(x) = \bar{x}$

$\tilde{0}, \tilde{1} \in F$

$\exists f_e \notin L$, $f_e \in F$ Жегалов

$f_e(x_1 .. x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus .. \oplus a_n x_n \oplus .. \oplus \underbrace{x_1 x_2 .. x_{ik}}_{\text{нелинеен член с най-малко на брой мн-ли като променливи}} \oplus ..$

$x_{i1} = .. = x_{ik} = 1$ - полагаме

$\forall$ ост без $x_1 x_2$ пол. да са 0 $\Rightarrow$

$g_e(x_1 x_2) = d + a x_1 + b x_2 + x_1 x_2$, $g_e \in F$

$g_e(x \oplus b, y \oplus a) = h_e(xy) \Rightarrow$

$d \oplus a(x \oplus b) \oplus b(y \oplus a) \oplus (a \oplus y)(b \oplus x) =$

$d \oplus \cancel{ax} \oplus \cancel{ab} \oplus \cancel{by} \oplus \cancel{ba} \oplus \cancel{ab} \oplus \cancel{ax} \oplus by \oplus \cancel{yx} =$

$\underbrace{(d \oplus ab)}_{c} \oplus xy \Rightarrow h_e(xy) = c \oplus xy \in F$

вземи $\tilde{1}$ $c = 0 \Rightarrow h_e(xy) = xy$, $\wedge \in F \Rightarrow F$ пълно

вземи $\bar{1}$ $c = 1 \Rightarrow h_e(xy) = \overline{xy} \Rightarrow \in F \Rightarrow$

$\overline{h_e} = \overline{\overline{xy}} = xy$ т.е. $\wedge \in F \Rightarrow F$ - пълно

F - пълно мн-во $\square$

1

Деф Казваме че f е Шеферова ф-я ако мн-вото $\{f\}$ е пълно мн-во

Деф Казваме че едно мн-во F е базис, ако F е пълно но никое негово собствено подмн-во не е пълно

$\{f\}$, $\{\wedge, \vee, \neg\}$ - не е базис

$\{\vee, \neg\}$; $\{\wedge, \neg\}$ - базиси

Тв Критерий за Шеферовост

Една ф-я f е шеферова $\Leftrightarrow f \notin T_0, f \notin T_1, f \notin S$

Док

Нека f е шеферова. Тогава $\{f\}$ - пълно мн-во $\Rightarrow \underline{f \notin T_0}, \underline{f \notin T_1}, f \notin M, \underline{f \notin S}, f \notin L$

$\Leftarrow$ Нека $f \notin T_0$, $f \notin T_1$, $f \notin S$. Допускаме че f е линейна т.е. $f \in L$. $f(x_1 \ldots x_n) =$

$a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n = a_0 \oplus x_{i_1} \oplus \ldots \oplus x_{i_k}$

Тогава $f(0 \ldots 0) = 1 = a_0 \Rightarrow f(x_1 \ldots x_n) = 1 \oplus x_{i_1} \oplus \ldots \oplus x_{i_k}$

$f(1 \ldots 1) = 0 = 1 \oplus \underbrace{1 \oplus \ldots \oplus 1}_{k} =$

к - нечетен

$= f(x_1 \ldots x_n) = 1 \oplus x_{i_1} \oplus \ldots \oplus x_{i_k}$, к - нечетен

$(0 \ldots 0) < (1 \ldots 1)$ но $f(0 \ldots 0) = 1 > f(1 \ldots 1) = 0 \Rightarrow f \notin M$

$\overline{f}(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n}) = 1 \oplus (1 \oplus (1 \oplus x_{i_1}) \oplus \ldots \oplus (1 \oplus x_{i_k})) =$

$1 \oplus x_{i_1} \oplus \ldots \oplus x_{i_k} = f(x_1 \ldots x_n) \Rightarrow f = f^* \Rightarrow$

$f \in S \Rightarrow \lightning$ от допускането че е линейна

$\Rightarrow \{f\}$ е пълно $\Rightarrow f$ е шеферова ■

Деф Едно мн-во F е предпълно, ако F не е пълно но за $\forall f \notin F$, $F \cup \{f\}$ е пълно

$$f(g_1 \ldots g_n) = b_0 \oplus b_1 g_1 \oplus \ldots \oplus b_n g_n$$

$$g_i(x_1 \ldots x_m) = a_0^i \oplus a_1^i x_1 \oplus \ldots \oplus a_m^i x_m$$

$$h(x_1 \ldots x_m) = f(g_1(x_1 \ldots x_m) \ldots g_n(x_1 \ldots x_m)) =$$

$$b_0 \oplus b_1(a_0^1 \oplus a_1^1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_m^1 x_m) \ldots \oplus b_n(a_0^n \oplus a_1^n x_1 \oplus \ldots)$$