Увод в аналитичната теория на числата – II

Д. И. Толев

Записки по едноименния изборен курс, четен от автора
във ФМИ при СУ „Св. Климент Охридски“
през зимния семестър на учебната
2011/2012 г.

София, февруари 2012 г.

Съдържание

1 Увод и означения

В настоящите записки е изложен материалът от изборния курс, четен от автора във ФМИ през зимния семестър на учебната 2011/2012 г. Той е продължение на едноименен курс, по който бяха изготвени записките *Увод в аналитичната теория на числата*, цитирани в библиографията като [14]. (Файлът може да бъде изтеглен от сайта на ФМИ). При изложението многократно ще използуваме формули, леми и теореми от [14] и ще цитираме този източник като (УАТЧ-1).

В записките разглеждаме някои задачи, за решаването на които се използува методът на експоненциалните суми. Той е известен най-вече с приложенията си за изучаване на диофантови уравнения от типа на Варинг и Голдбах и също в проблемите за целите точки. Целта на настоящите записки е да бъдат показани и други приложения на този важен метод.

Във втора глава изследваме разпределението на дробните части на редици от вида $f(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, където f е полином от първа или от втора степен. Формулираме и доказваме една класическа теорема на Хейлброн и споменаваме (без да излагаме доказателство) резултат на Захареску, който усилва тази теорема.

В трета глава изучаване диофантово неравенство, което, в известен смисъл, е близко до уравнението на Лагранж (виж Глава 3, (УАТЧ-1)). Споменаваме съвсем накратко и за фундаменталните резултати на Маргулис, с чиято помощ се постига решителен пробив в теорията на диофантовите неравенства.

Четвърта глава е посветена на известната теорема на Пятецкий-Шапиро, отнасяща се за простите числа сред членовете на редицата $[n^c]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Излагаме подробно доказателство на тази теорема, в основата на което стои методът на И. М. Виноградов за оценяване на експоненциални суми по прости числа.

В пета глава въвеждаме сумата на Клостерман и формулираме (без доказателство) знаменитата теорема на А. Вейл за оценката на тази сума. Представяме проблема за делителите на квадратичен полином, след което формулираме и доказваме (с помощта на оценката на А. Вейл) теоремата на Хули.

В шеста глава разглеждаме проблема за делителите в аритметични прогресии и излагаме доказателство на теоремата на Селберг–Хули. Формулираме също задачата за делителите на Ингам и показваме как от теоремата на Селберг-Хули следва нейно частично решение.

Накрая, в седма глава, разглеждаме някои елементарни, но важни, свойства за сумата на Клостерман, след което формулираме и доказваме две теореми на Карацуба и Гараев, отнасящи се до оценки на експоненциални суми, аналогични на сумата на Клостерман.

Настоящите записки не представляват подробно изложение на теорията на експоненциалните суми, а са, по-скоро, въведение в нея. Читателят, желаещ да се запознае по-задълбочено с тази теория и нейните приложения в теоричта на числата, може да използува монографиите на И. М. Виноградов [2], [3], Карацуба [6], Лидл и Нидеррайтер [11], Бейкър [15], Греъм и Колесник [19], Иванец и Ковалски [23] и Вон [29]. Биха били от полза още записките [13] и [14] по материала от предишни изборни курсове, четени от автора. Препоръчително е също изучаването на всички цитирани статии, където са изложени най-силните варианти на теоремите, които разглеждаме.

Авторът изказва благодарност на Владимир Митанкин, Живко Петров и Стоян Димитров за посочването на някои грешки и неточности в предишните варианти на записките и също на Живко Петров за изготвянето на чертежите.

Означения

Означенията в настоящите записки до голяма степен съвпадат с означенията, възприети в (УАТЧ-1), но за удобство на читателя ги привеждаме отново.

Както обикновено $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ са множествата на естествените, целите, реалните и комплексните числа. С буквите k, l, n, m ще означаваме винаги цели числа, а буквата p ще означава просто число. Ще използуваме означенията за основните аритметични функции, въведени в (УАТЧ-1), както и техните свойства, но почти винаги ще цитираме съответните определения, леми и теореми. Когато работим със сравнения често ще използуваме $n \equiv a\ (q)$ като съкратен запис на $n \equiv a \pmod q$.

При $z \in \mathbb{C}$ ще считаме, че $\overline{z}$ е комплексно спрегнатото на z. Ако обаче разглеждаме сравнения по даден модул $q \in \mathbb{N}$ и ако числото $n \in \mathbb{Z}$ е взаимно просто с q, то $\overline{n}_{(q)}$ ще означава обратният елемент на n по модул q, т.е. число, за което $n\overline{n}_{(q)} \equiv 1 \pmod q$. Ако стойността на модула е ясна от констеста, за простота ще пишем $\overline{n}$.

Сума по естествените числа n, ненадминаващи величината x, ще означаваме накратко с $\sum_{n\leq x}$. Аналогично, сума по простите числа p, ненадминаващи x, ще означаваме с $\sum_{p\leq x}$. Ако $n \in \mathbb{N}$, то $\sum_{d|n}$ означава сума, в която сумирането се извършва по всички положителни делители на n и, съответно, $\sum_{p|n}$ означава сума по простите делители на n. На места ще използуваме означението $\sum^*$ за да подчертаем, че се сумира по числа, които са взаимно прости с дадено число.

С буквата γ ще бележим константата на Ойлер, но понякога същата буква ще използуваме и за други цели, като точният смисъл става винаги ясен от контекста.

С $\log x$ ще означаваме натурален логаритъм на x. Както обикновено, $[x]$ и $\{x\}$ ще бъдат цялата част и съответно дробната част на x, а $||x||$ ще бъде разстоянието от x до най-близкото цяло число. Ще означаваме също $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ и $e(x) = e^{2\pi i x}$.

Ако за функциите $f(x)$ и $g(x)$ е изпълнено $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ще казваме, че те са асимптотично равни при $x \to \infty$ и ще записваме $f(x) \sim g(x)$. Ако пък имаме $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то ще записваме $f(x) = o(g(x))$. По аналогичен начин се определят горните релации и когато аргументът x клони към число.

Ще употребяваме означенията на Ландау $X = O(Y)$ и съответно на Виноградов $X \ll Y$, като и двете са съкратен запис на твърдението „Съществува константа $c > 0$ такава, че $|X| \leq cY$“. Ако c зависи от някои други константи, например γ, δ то понякога ще отразяваме този факт, чрез означенията $X = O_{\gamma,\delta}(Y)$, съответно $X \ll_{\gamma,\delta} Y$. Ако пък константите в знаците $\ll$ или O не зависят от никакви параметри, то ще казваме, че тези константи са абсолютни. При $X \ll Y$ и $Y \ll X$ ще пишем за по-кратко $X \asymp Y$.

Буквата ε ще използуваме, за да означаваме произволно малко положително число, което не е едно и също в различни изрази. Тази уговорка ни позволява да пишем, например, $x^\varepsilon \log x \ll x^\varepsilon$. Ще считаме, че константите, вкючени в знаците $\ll$ и O зависят от ε, ако тази буква участва в съответните формули.

Ще използуваме $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$, за да означаваме наредената k-торка числа $x_1, \dots, x_k$, докато $(x_1, \dots, x_k)$ ще бъде най-големият общ делител на тези числа. От друга страна, (x, y) означава също отворен интервал с краища x и y, но това едва ли ще предизвика недоразумения.

Ако $\mathcal{A}$ е крайно множество, то броя на елементите му ще означаваме с $\#\mathcal{A}$. Със знака $\square$ ще бележим край на доказателство или отсъствие на такова.

2 Разстояния от членовете на дадена редица до най-близкото цяло число

2.1 Увод и формулировка на теоремата

Нека е дадена растяща и клоняща към безкрайност редица от реални числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$. Възниква въпросът дали безбройно много членовете на тази редица се намират в „близо” до цяло число, или, все едно, дали за безбройно много n числата $\| \lambda_n \|$ са „малки”. (Да припомним, че $\| t \|$ означава разстоянието от реалното число t до най-близкото цяло число). В настоящата глава ще разгледаме няколко класически теореми от този тип. Читателят, интересуващ се от тази тематика, може да намери повече информация в известните монографии на И. М. Виноградов [3] и Р. Бейкър [15].

Ще започнем със следната класическа

Теорема 2.1. *Нека $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тогава съществуват дроби $\frac{a}{q}$ с произволно големи знаменатели $q \in \mathbb{N}$ и такива, че*

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{q^2}, \qquad (a, q) = 1. \tag{1}$$

Доказателство. Да допуснем, че знаменателите на тези дроби са ограничени отгоре. От (1) следва, че $|a| < 1 + |\alpha| q$, следователно и множеството от числителите е ограничено. Тогава съществуват само краен брой дроби, удовлетворяващи (1), и нека δ е най-малкото разстояние от α до дроб от този вид. Тъй като α е ирационално ще имаме $\delta > 0$. Прилагаме теоремата на Дирихле за приближаване на реални числа с рационални — Теорема 3.63 (УАТЧ-1). Избираме $\tau \geq 1 + \frac{1}{\delta}$ и нека $a, q \in \mathbb{Z}$ са числа, удовлетворяващи

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{q\tau}, \qquad (a, q) = 1, \qquad 1 \leq q \leq \tau.$$

Но тогава е изпълнено (1), следователно

$$\delta \leq \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{\tau} < \delta,$$

което не е възможно. С това лемата е доказана.

□

Оттук получаваме

Следствие 2.2. *Ако $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то съществуват безбройно много $n \in \mathbb{N}$, за които*

$$\| \alpha n \| < n^{-1}.$$

Доказателство. Следва непосредствено от Теорема 2.1

□

Горното твърдение може да се обобщи. В сила е следната

Теорема 2.3. *Ако $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, то съществуват безбройно много $n \in \mathbb{N}$, за които*

$$\| \alpha n + \alpha_1 \| < 3n^{-1}. \tag{2}$$

Доказателство. Да вземем произволно голямо $A > 0$. Вследствие на Теорема 2.1 съществуват $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, удовлетворяващи (1) и такива, че

$$q > 2A. \tag{3}$$

Тогава можем да запишем

$$\alpha q - a = \omega_1, \qquad |\omega_1| < \frac{1}{q}. \tag{4}$$

По-нататък, очевидно е, че числото $\alpha_1 q$ може да се представи във вида $Q + \lambda$, където $Q \in \mathbb{Z}$ и $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$. Следователно можем да запишем

$$\alpha_1 = \frac{Q}{q} + \omega_2, \qquad |\omega_2| \leq \frac{1}{2q}. \tag{5}$$

Тъй като $(a, q) = 1$, то числото Q може да бъде представено във вида

$$Q = ua + vq, \qquad u, v \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

(Този е следствие от Лема 3.52 (УАТЧ-1).) При това, можем да считаме, че

$$|u| \leq \frac{q}{2}. \tag{7}$$

Наистина, ако е изпълнено (6), но не е вярно (7), записваме

$$Q = (u + hq)a + (v - ha)q$$

и очевидно можем да намерим $h \in \mathbb{Z}$ така, че $|u + hq| \leq \frac{q}{2}$.

Тогава, като използуваме (5) и (6), получаваме

$$\alpha_1 = \frac{ua + vq}{q} + \omega_2 = u\alpha + u\left(\frac{a}{q} - \alpha\right) + v + \omega_2 = u\alpha + v + \omega_3, \tag{8}$$

където

$$\omega_3 = u\left(\frac{a}{q} - \alpha\right) + \omega_2.$$

От (1), (5) и (7) следва

$$|\omega_3| < \frac{1}{q}. \tag{9}$$

Като съберем равенствата (4) и (8), получаваме

$$\alpha q - a + \alpha_1 = u\alpha + v + \omega_1 + \omega_3$$

и, като използуваме (4) и (9), намираме, че

$$|\alpha(q-u)+\alpha_1-a-v| = |\omega_1+\omega_3| < \frac{2}{q}. \tag{10}$$

Полагаме

$$n = q-u.$$

От (3) и (7) следва

$$A < \frac{q}{2} \le n \le \frac{3q}{2},$$

а от (10) имаме

$$\parallel \alpha n+\alpha_1 \parallel \le \ |\alpha n+\alpha_1-a-v| < \frac{2}{q} \le \frac{3}{n}.$$

И така, установихме (2) и понеже A е произволно голямо, получаваме доказателството на Теорема 2.3.

$\square$

Естествено възниква въпросът дали е възможно да бъде получен аналогичен резултат, ако вместо линейния полином $\alpha t+\alpha_1$, вземем произволен полином с реални коефициенти и ирационален старши коефициент. Тук ще установим резултат от такъв тип с полином от втора степен.

Теорема 2.4 (Хейлброн). *Нека $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и нека*

$$f(t) = \alpha t^2+\alpha_1 t+\alpha_2.$$

Тогава за всяко $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ съществуват безбройно много $n \in \mathbb{N}$ такива, че

$$\parallel f(n) \parallel < n^{-\theta}. \tag{11}$$

Редица учени са се занимавали с установяването на подобни резултати за всевъзможни функции $f(t)$, като подробна информация може да бъде намерена в монографиите на И. М. Виноградов [3] и Р. Бейкър [15]. Тук ще споменем също, че съществено подобрение на резултата от Теорема 2.4, в случая когато $f(t)=\alpha t^2$, е получено от Захареску [31] през 1996 г. Той е доказал, че за призволно $\alpha \in \mathbb{R}$ и при всяко $\theta \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ съществуват безбройно много $n \in \mathbb{N}$ такива, че $\parallel \alpha n^2 \parallel < n^{-\theta}$.

2.2 Спомагателни резултати

За да докажем Теорема 2.4 ще използуваме резултати, изложени в първата част на записките (УАТЧ-1), както и две нови леми, които намират приложение и при решаването на други задачи.

Следващата лема е получена от И. М. Виноградов и играе важна роля в аналитичната теория на числата — например при решаването на проблема на Варинг и на тернарния проблем на Голдбах. (Подробна информация може да бъде намерена в монографиите на И. М. Виноградов [3], Карацуба [6] и Вон [29]).

Лема 2.5. *Нека $X, Y \in \mathbb{R}, X \geq 1, Y \geq 1; \alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ и нека*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1. \tag{12}$$

Разглеждаме сумата

$$U = \sum_{n \leq X} \min\left(\frac{XY}{n}, \frac{1}{||\alpha n||}\right), \tag{13}$$

където $||x||$ е разстоянието от x до най-близкото цяло число. Тогава за сумата U е изпълнено неравенството

$$U \leq 100\, XY \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{Y} + \frac{q}{XY}\right) \log(3qX). \tag{14}$$

Доказателство. Първо да отбележим, че от известната оценка

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \leq 1 + \log x \qquad \text{при} \qquad x \geq 1 \tag{15}$$

следват неравенствата

$$U \leq \sum_{n \leq X} \frac{XY}{n} \leq XY(1 + \log X) \leq XY \log(3X).$$

Ако $q \leq 100$, то от последното неравенство следва (14). Оттук нататък ще предполагаме, че $q > 100$.

Нека разгледаме сумата

$$V_0 = \sum_{n \leq \frac{q}{2}} \min\left(\frac{XY}{n}, \frac{1}{||\alpha n||}\right). \tag{16}$$

От (12) следва, че α може да се запише във вида

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \qquad |\theta| \leq 1. \tag{17}$$

Да отбележим, че функцията $||x||$ е периодична с период 1 и е изпълнено

$$||x|| = |x| \quad \text{при} \quad |x| \leq \frac{1}{2}; \qquad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||. \tag{18}$$

Тъй като $(a, q) = 1$, то при $1 \leq n \leq \frac{q}{2}$ имаме $q \nmid an$, следователно $||\frac{an}{q}|| \geq \frac{1}{q}$. Тогава, като вземем предвид (17), (18) и условието $n \leq q/2$, получаваме

$$||\alpha n|| = \left|\left|\frac{an}{q} + \frac{\theta n}{q^2}\right|\right| \geq \left|\left|\frac{an}{q}\right|\right| - \left|\left|\frac{\theta n}{q^2}\right|\right| \geq \left|\left|\frac{an}{q}\right|\right| - \frac{|\theta n|}{q^2} \geq \left|\left|\frac{an}{q}\right|\right| - \frac{1}{2q} \geq \frac{1}{2}\left|\left|\frac{an}{q}\right|\right|. \tag{19}$$

От горното неравенство и от (15), (16), (18) и (19) следва

$$V_0 \le \sum_{n \le \frac{q}{2}} \frac{1}{||\alpha n||} \le 2 \sum_{n \le \frac{q}{2}} \left|\left| \frac{an}{q} \right|\right|^{-1} = 2 \sum_{\substack{-\frac{q}{2} < l \le \frac{q}{2} \\ l \ne 0}} \sum_{\substack{n \le \frac{q}{2} \\ an \equiv l \pmod q}} \left|\left| \frac{an}{q} \right|\right|^{-1}$$

$$= 2 \sum_{\substack{-\frac{q}{2} < l \le \frac{q}{2} \\ l \ne 0}} \left| \frac{l}{q} \right|^{-1} \sum_{\substack{n \le \frac{q}{2} \\ an \equiv l \pmod q}} 1 \ \le \ 4q \sum_{1 \le l \le \frac{q}{2}} \frac{1}{l}$$

$$\le 4q \log(3q). \tag{20}$$

Ако $X \le \frac{q}{2}$, то от (13) и (16) следва $U \le V_0$ и тогава (14) е следствие от (20).

Сега да разгледаме случая $X > \frac{q}{2}$. Тогава имаме

$$U \le V_0 + \sum_{s=0}^{k} W_s, \tag{21}$$

където

$$W_s = \sum_{\left(s+\frac{1}{2}\right)q < n \le \left(s+\frac{3}{2}\right)q} \min\left(\frac{XY}{n}, \frac{1}{||\alpha n||} \right), \tag{22}$$

а k се определя от условията

$$\left(k + \frac{1}{2}\right) q \le X < \left(k + \frac{3}{2}\right) q.$$

Ясно е, че

$$k = \left[\frac{X}{q} - \frac{1}{2} \right] \le \frac{X}{q}. \tag{23}$$

Записваме сумата W_s, определена от (22), във вида

$$W_s = \sum_{-\frac{q}{2} < l \le \frac{q}{2}} \min\left(\frac{XY}{(s+1)q + l}, \frac{1}{||\alpha((s+1)q + l)||} \right). \tag{24}$$

От (17) следва

$$\alpha((s+1)q + l) = \left(\frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2} \right) ((s+1)q + l)$$

$$= a(s+1) + \frac{al}{q} + \frac{\theta(s+1)}{q} + \frac{\theta l}{q^2}$$

$$= a(s+1) + \frac{al + [\theta(s+1)]}{q} + \frac{\lambda(l)}{q}, \tag{25}$$

където
$$\lambda(l) = \lambda_{q,s,\theta}(l) = \{\theta(s+1)\} + \frac{\theta l}{q}.$$
Като използваме (17) и условието $-\frac{q}{2} < l \le \frac{q}{2}$ виждаме, че
$$|\lambda(l)| < 2. \tag{26}$$
Тогава от (18), (25) и (26) получаваме
$$\begin{aligned} ||\alpha((s+1)q+l)|| &= \left|\left|\frac{al + [\theta(s+1)]}{q} + \frac{\lambda(l)}{q}\right|\right| \\ &\ge \left|\left|\frac{al + [\theta(s+1)]}{q}\right|\right| - \left|\frac{\lambda(l)}{q}\right| \\ &\ge \left|\left|\frac{al + [\theta(s+1)]}{q}\right|\right| - \frac{2}{q}. \end{aligned} \tag{27}$$

Разделяме сумата W_s, зададена чрез (24), на две части
$$W_s = W_s' + W_s'', \tag{28}$$
където в W_s' са събираемите, за които
$$al + [\theta(s+1)] \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod q,$$
а W_s'' съдържа останалите събираеми.

Сумата W_s' съдържа не повече от 5 члена и всеки от тях не надхвърля $\frac{XY}{(s+1)q - q/2}$. Тогава
$$W_s' \le \frac{5XY}{(s+\frac{1}{2})q}. \tag{29}$$

Сега да разгледаме W_s''. Стойностите, които сумационната променлива l на тази сума пробягва, са такива, че
$$al + [\theta(s+1)] \equiv m \pmod q,$$
където $3 \le |m| \le \frac{q}{2}$. Тогава за всяко такова l изразът в последния ред на (27) е положителен. Освен това, тъй като $(a,q) = 1$, то при фиксирано m последното

сравнение има единствено решение относно l. Следователно от (24) и (27) получаваме

$$W_s'' \le \sum_{3 \le |m| \le \frac{q}{2}} \sum_{\substack{-\frac{q}{2} < l \le \frac{q}{2} \\ al + [\theta(s+1)] \equiv m\ (q)}} \frac{1}{\left|\left| \frac{al+[\theta(s+1)]}{q} \right|\right| - \frac{2}{q}}$$

$$= \sum_{3 \le |m| \le \frac{q}{2}} \sum_{\substack{-\frac{q}{2} < l \le \frac{q}{2} \\ al + [\theta(s+1)] \equiv m\ (q)}} \frac{1}{\left|\left| \frac{m}{q} \right|\right| - \frac{2}{q}}$$

$$= \sum_{3 \le |m| \le \frac{q}{2}} \frac{1}{\frac{|m|}{q} - \frac{2}{q}}$$

$$= 2q \sum_{3 \le m \le \frac{q}{2}} \frac{1}{m-2}.$$

От горното неравенство и от (15) получаваме

$$W_s'' \le 2q \log(3q). \tag{30}$$

От (28) – (30) следва

$$W_s \le \frac{5XY}{q\left(s+\frac{1}{2}\right)} + 2q\log(3q)$$

и тогава, като вземем предвид (15) и (23), намираме

$$\sum_{s=0}^{k} W_s \le \frac{5XY}{q} \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s+\frac{1}{2}} + 2(k+1)q\log(3q)$$

$$\le \frac{5XY}{q}(3+\log k) + 2\left(\frac{X}{q}+1\right) q\log(3q)$$

$$\le 50\left(\frac{XY}{q} + X + q\right)\log(3qX). \tag{31}$$

Неравенството (14) е следствие на (20), (21) и (31). Лемата е доказана.

□

В следващата лема се дава оценка на експоненциалната сума, която възниква при решаване на нашата задача. Ще отбележим, че доста по-общи резултати са изложени в монографиите на И. М. Виноградов [3], Карацуба [6], Бейкър [15] и Вон [29].

Лема 2.6. *Нека* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ *и*

$$f(t) = \alpha t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2. \tag{32}$$

Нека съществуват $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ такива, че

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1.$$

За произволни $H \ge 1$, $Y \ge 1$ определяме

$$F = F(Y,H) = \sum_{m \le Y} |K_m|, \qquad K_m = K_m(H) = \sum_{n \le H} e\left(mf(n)\right). \tag{33}$$

В сила е оценката

$$F(Y,H) \ll YH \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{H^{\frac{1}{2}}} + \frac{q^{\frac{1}{2}}}{Y^{\frac{1}{2}} H} \right) (qYH)^{\varepsilon}, \tag{34}$$

където $\varepsilon > 0$ е произволно малко и константата в знака $\ll$ зависи само от ε.

Доказателство. Можем да считаме, че $H, Y \in \mathbb{N}$. От неравенството на Коши следва

$$F \le Y^{\frac{1}{2}} \, F_1^{\frac{1}{2}}, \tag{35}$$

където

$$F_1 = \sum_{m \le Y} |K_m|^2. \tag{36}$$

От определенията (32) и (33) за $f(t)$ и съответно K_m, от равенството $|z|^2 = z\overline{z}$ и от елементарните свойства на функцията $e(t)$, дадени в Лема 4.9 (УАТЧ-1), следва

$$|K_m|^2 = \sum_{n_1 \le H} e\left(mf(n_1)\right) \sum_{n_2 \le H} e\left(-mf(n_2)\right)$$

$$= \sum_{n_1, n_2 \le H} e\Big(m\left(f(n_1) - f(n_2)\right)\Big)$$

$$= \sum_{n_1, n_2 \le H} e\Big(m(n_1 - n_2)(\alpha(n_1 + n_2) + \alpha_1)\Big).$$

Разделяме последната сума на части съобразно стойността на $n_1 - n_2$, след което отделяме събираемите за които $n_1 = n_2$. Получаваме

$$|K_m|^2 = \sum_{|h| \le H} \sum_{\substack{n_1, n_2 \le H \\ n_1 - n_2 = h}} e\Big(m(n_1 - n_2)(\alpha(n_1 + n_2) + \alpha_1)\Big)$$

$$= H + \sum_{0 < |h| \le H} \sum_{\substack{n_1, n_2 \le H \\ n_1 - n_2 = h}} e\Big(mh\left(2\alpha n_2 + \alpha h + \alpha_1\right)\Big)$$

$$= H + \sum_{0 < |h| \le H} e\left(m\alpha h^2 + m\alpha_1 h\right) \sum_{H' < n \le H''} e\left(2\alpha m h n\right),$$

където
$$H' = \max(0, H-h), \qquad H'' = \min\left(H, H-h\right).$$

От горните равенства и от Лема 4.10 (УАТЧ-1) следва

$$|K_m|^2 \le H + \sum_{0<|h|\le H} \left| \sum_{H'<n\le H''} e\left(2\alpha m h n\right) \right|$$

$$\le H + 2 \sum_{1\le h\le H} \min\left(H, \frac{1}{\parallel 2\alpha m h \parallel}\right).$$

Заместваме последния израз в (36) и получаваме

$$F_1 \ll YH + F_2, \tag{37}$$

където

$$F_2 = \sum_{m\le Y} \sum_{h\le H} \min\left(H, \frac{1}{\parallel 2\alpha m h \parallel}\right)$$

Да означим с $\eta(l)$ броя на решенията на уравнението $2mh = l$ в естествени числа m, h. Като използуваме очевидното неравенство $\eta(l) \le \tau(l)$, както и Лема 3.33 (УАТЧ-1), получаваме

$$F_2 = \sum_{l\le 2YH} \sum_{\substack{m\le Y,\, h\le H \\ 2mh=l}} \min\left(H, \frac{1}{\parallel 2\alpha m h \parallel}\right) \le \sum_{l\le 2YH} \eta(l) \min\left(H, \frac{1}{\parallel \alpha l \parallel}\right)$$

$$\ll (YH)^{\varepsilon} \sum_{l\le 2YH} \min\left(H, \frac{1}{\parallel \alpha l \parallel}\right). \tag{38}$$

Ще оценим сумата от последния ред на (38) с помощта на Лема 2.5. Тъй като при $l \le 2YH$ е изпълнено $H \le \frac{2YH^2}{l}$, имаме

$$F_2 \ll (YH)^{\varepsilon} \sum_{l\le 2YH} \min\left(\frac{2YH^2}{l}, \frac{1}{\parallel \alpha l \parallel}\right) \ll YH^2 \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{H} + \frac{q}{YH^2}\right) (qYH)^{\varepsilon}.$$

Заместваме последния израз вместо F_2 в (37) и намираме

$$F_1 \ll YH^2 \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{H} + \frac{q}{YH^2}\right) (qYH)^{\varepsilon}.$$

От горната оценка и от (35) следва (34).

□

За доказателството на Теорема 2.4 ще използуваме също следната

Лема 2.7. *Нека* $\Delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *нека* $\lambda_\Delta(t)$ *е периодична с период* 1 *функция, която при* $|t| \le \frac{1}{2}$ *се определя чрез*

$$\lambda_\Delta(t) = \begin{cases} 1 - |t|\Delta^{-1} & \text{при} \quad |t| < \Delta, \\ 0 & \text{при} \quad \Delta \le |t| \le \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{39}$$

Тогава за всяко $t \in \mathbb{R}$ *е изпълнено*

$$\lambda_\Delta(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_\Delta(m)\, e(mt), \tag{40}$$

където

$$b_\Delta(0) = \Delta, \qquad b_\Delta(m) = \frac{\sin^2(\pi m \Delta)}{\pi^2 m^2 \Delta} \qquad \text{при} \qquad m \ne 0. \tag{41}$$

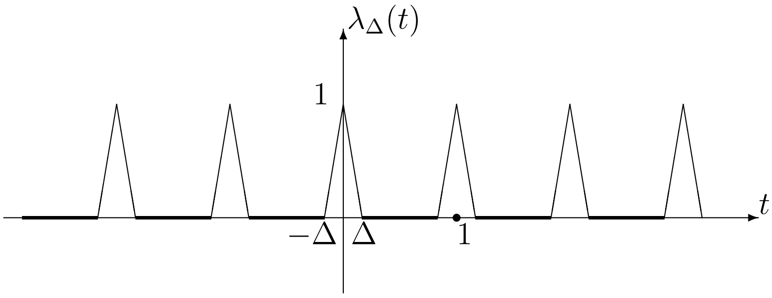
При това е в сила неравенството

$$|b_\Delta(m)| \le \min\left(\Delta, \frac{1}{m^2\Delta}\right) \qquad \text{при} \qquad m \ne 0. \tag{42}$$

Доказателство. Представимостта на $\lambda_\Delta(t)$ във вида (40) е следствие от теорията на редовете на Фурие. Проверката на равенствата (41), както и на неравенството (42), оставяме на читателя.

□

Графиката на функцията $\lambda_\Delta(t)$ е представена на следния чертеж:



2.3 Доказателство на Теорема 2.4

Да допуснем, че твърдението от теоремата не е вярно. Тогава за достатъчно големи стойности на n ще е изпълнено $\| f(n) \| \ge n^{-\theta}$. Следователно, ако $N \in \mathbb{N}$ е достатъчно голямо и ако $N < n \le 2N$, то като положим

$$\Delta = (2N)^{-\theta} \tag{43}$$

и като използуваме определението (39) на функцията $\lambda_\Delta(t)$, получаваме

$$\lambda_\Delta(f(n)) = 0 \qquad \text{при} \qquad N < n \le 2N.$$

От последната формула и от (40), (41) следва

$$0 = \sum_{N<n\le 2N} \lambda_\Delta\left(f(n)\right) = \sum_{N<n\le 2N}\left(\Delta + \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\ne 0}} b_\Delta(m)\, e\left(mf(n)\right)\right)$$

$$= \Delta N + \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\ne 0}} b_\Delta(m)\, \mathcal{K}_m(N), \tag{44}$$

където

$$\mathcal{K}_m = \mathcal{K}_m(N) = K_m(2N) - K_m(N), \qquad K_m(H) = \sum_{n\le H} e\left(mf(n)\right) \tag{45}$$

От (42) и (44) получаваме

$$\Delta N \le \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\ne 0}} |b_\Delta(m)|\, |\mathcal{K}_m| \le \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\ne 0}} \min\left(\Delta, \frac{1}{m^2\Delta}\right) |\mathcal{K}_m| \le 2\sum_{m=1}^{\infty} \min\left(\Delta, \frac{1}{m^2\Delta}\right) |\mathcal{K}_m|$$

$$\le 2\Delta \sum_{1\le m\le \Delta^{-1}} |\mathcal{K}_m| + 2\Delta^{-1} \sum_{\Delta^{-1}<m\le M} \frac{|\mathcal{K}_m|}{m^2} + 2\Delta^{-1} \sum_{M<m} \frac{|\mathcal{K}_m|}{m^2}, \tag{46}$$

където M е параметър, който ще изберем по подходящ начин.

Като оценим тривиално сумата $\mathcal{K}_m$, определена чрез (45), намираме

$$|\mathcal{K}_m| \le N.$$

Сега използуваме Лема 2.6 (2) (УАТЧ-1) и получаваме

$$\sum_{M<m} \frac{|\mathcal{K}_m|}{m^2} \le N \sum_{M<m} \frac{1}{m^2} \ll \frac{N}{M}.$$

Тогава, ако положим

$$M = \Delta^{-2}\log N, \tag{47}$$

виждаме, че последното събираемо в дясната страна на (46) е равно на $O\left(\frac{\Delta N}{\log N}\right)$, следователно при достатъчно големи стойности на N това събираемо не надхвърля $\frac{1}{2}\Delta N$. Заместваме тази оценка в (46) и получаваме

$$\Delta N \le 4\Delta \sum_{1\le m\le \Delta^{-1}} |\mathcal{K}_m| + 4\Delta^{-1}\, T, \tag{48}$$

където

$$T = \sum_{\Delta^{-1}<m\le M} \frac{|\mathcal{K}_m|}{m^2}.$$

Избираме естествено число j_0 така, че $\frac{M}{2^{j_0+1}} < \Delta^{-1} \le \frac{M}{2^{j_0}}$. Очевидно имаме

$$j_0 \le \frac{\log M}{\log 2} \ll \log N,$$

следователно

$$T \le \sum_{0\le j\le j_0} \sum_{\frac{M}{2^{j+1}}<m\le\frac{M}{2^j}} \frac{|\mathcal{K}_m|}{m^2} \le \sum_{0\le j\le j_0} \left(\frac{M}{2^{j+1}}\right)^{-2} \sum_{\frac{M}{2^{j+1}}<m\le\frac{M}{2^j}} |\mathcal{K}_m|$$

$$\le 4 \sum_{0\le j\le j_0} \left(\frac{M}{2^j}\right)^{-2} \sum_{m\le\frac{M}{2^j}} |\mathcal{K}_m| \le 4(j_0+1) \max_{0\le j\le j_0} \left(\left(\frac{M}{2^j}\right)^{-2} \sum_{m\le\frac{M}{2^j}} |\mathcal{K}_m| \right)$$

$$\ll (\log N) \max_{\Delta^{-1}\le Y\le M} \left(Y^{-2}\mathcal{F}(Y)\right), \tag{49}$$

където

$$\mathcal{F}(Y) = \sum_{m\le Y} |\mathcal{K}_m|. \tag{50}$$

От (48) – (50) следва

$$\Delta N \ll N^{\varepsilon}\, \Delta^{-1} \max_{\Delta^{-1}\le Y\le M} \left(Y^{-2}\mathcal{F}(Y)\right). \tag{51}$$

Сега ще се възползуваме от условието, че числото α е иразионално. Според Теорема 2.1 съществуват несъкратими дроби $\frac{a}{q}$ с произволно големи знаменатели, за които е изпълнено (1). Взимаме такава дроб, като считаме, че q е достатъчно голямо. Тогава от (45), (47), (49) и Лема 2.6 получаваме

$$\mathcal{F}(Y) \le \sum_{m\le Y} \left(|K_m(2N)| + |K_m(N)|\right) \ll YN \left(\frac{1}{q^{\frac12}} + \frac{1}{N^{\frac12}} + \frac{q^{\frac12}}{Y^{\frac12}N} \right) (qN)^{\varepsilon}.$$

От последната оценка следва, че

$$Y^{-2}\mathcal{F}(Y) \ll Y^{-1}N \left(\frac{1}{q^{\frac12}} + \frac{1}{N^{\frac12}} + \frac{q^{\frac12}}{Y^{\frac12}N} \right) (qN)^{\varepsilon}. \tag{52}$$

Тъй като изразът в дясната страна на горното неравенство е намаляваща функция на Y, то максимумът в (51) се достига при $Y = \Delta^{-1}$. Тогава от (51) и (52) следва

$$\Delta N \ll (qN)^{\varepsilon}\, N \left(\frac{1}{q^{\frac12}} + \frac{1}{N^{\frac12}} + \frac{q^{\frac12}\Delta^{\frac12}}{N} \right). \tag{53}$$

До този момент за N считахме само, че е достатъчно голямо естествено число, но оттук нататък ще го изберем в зависимост от q, а именно полагаме

$$N = q. \tag{54}$$

От (43), (53) и (54) следва

$$q^{-\theta} \ll q^{\varepsilon}\left(q^{-\frac{1}{2}} + q^{-\frac{\theta+1}{2}}\right) \ll q^{\varepsilon-\frac{1}{2}}. \tag{55}$$

Да отбележим, че константата в знака $\ll$ в последното неравенство зависи от ε, но не и от q, а числото q може да приема произволно големи стойности. Следователно оценката (55) е възможна само, ако е изпълнено $-\theta \le \varepsilon - \frac{1}{2}$. При достатъчно малко $\varepsilon > 0$, обаче, последното неравенство противоречи на условието $0 < \theta < \frac{1}{2}$.

И така, ако допуснем, че съществуват само краен брой $n \in \mathbb{N}$, за които е в сила (11), получаваме противоречие. С това Теорема 2.4 е доказана.

$\square$

3 Едно диофантово неравенство

3.1 Увод и формулировка на теоремата

Основна задача в теорията на числата е изучаването на диофантовите уравнения

$$F(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 0,$$

където F е зададена функция, като се интересуваме от разрешимост в цели числа $n_1, \ldots, n_k$. Наред с диофантовите уравнения интерес представляват и *диофантовите неравенства*, т.е неравенстава от вида

$$u < F(n_1, n_2, \ldots, n_k) < v,$$

където отново считаме, че променливите $n_1, \ldots, n_k$ са цели, а параметрите u, v са дадени реални числа. Тук също възникват задачите за изследване на разрешимостта, оценяване на броя на решенията и т.н. Например, задачите на Гаус и на Дирихле, които изучавахме в Глава 4 от УАТЧ-1, могат да се разглеждат като задачи за намиране на приближени формули за броя на решенията на диофантови неравенства. Подробно изложение на теорията на диофантовите неравенства може да бъде намерено в монографията [15] на Р. Бейкър. Няколко важни теореми са представени също в книгата [29] на Вон.

В настоящата глава ще разгледаме диофантово неравенство, което, в известен смисъл, е близко до уравнението на Лагранж

$$n_1^2 + n_2^2 + n_2^2 + n_4^2 = N,$$

разгледано в Глава 3 от УАТЧ-1.

В сила е следната

Теорема 3.1 (Девънпорт, Хейлброн)**.** *Нека $\lambda_1, \ldots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ са числа различни от нула, като някои две от тях са с различни знаци, и нека $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$. Тогава за всяко $\eta > 0$ съществуват $n_1, \ldots, n_5 \in \mathbb{N}$ такива, че*

$$\left|\lambda_1 n_1^2 + \cdots + \lambda_5 n_5^2\right| < \eta. \tag{56}$$

Теорема 3.1 е доказана от Девънпорт и Хейлброн през 1946 г. и по-късно е била значително обобщена (виж монографиите [15] и [29]). Да отбележим, че естественият аналог на уравнението на Лагранж е неравенство от вида (56), но само с четири променливи. В настоящия момент е известен даже много по-силен резултат, получен през 1988 г. от Маргулис [25]. С помощта на алгебрични методи този математик установява разрешимостта на неравенство от типа (56), но за квадратична форма само на три променливи. Този резултат на Маргулис е едно от най-значимите постижения на съвремената математика!

В настоящите записки ще се задоволим само с излагането на доказателството на Теорема 3.1, която е по-слаба от теоремата на Маргулис, но все пак е един от класическите резултати от теорията на числата. Освен това, с помощта на методите, развити настоящата глава, могат да бъдат получени обобщения на Теорема 3.1 отнасящи се до форми от произволна степен. За тях теорията на Маргулис вече не може да бъде използувана.

3.2 Спомагателни резултати

Първата лема ни дава интегрално представяне за функцията

$$h(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{ако} \quad |t| < 1, \\ 0 & \text{ако} \quad |t| \geq 1. \end{cases} \tag{57}$$

Имаме

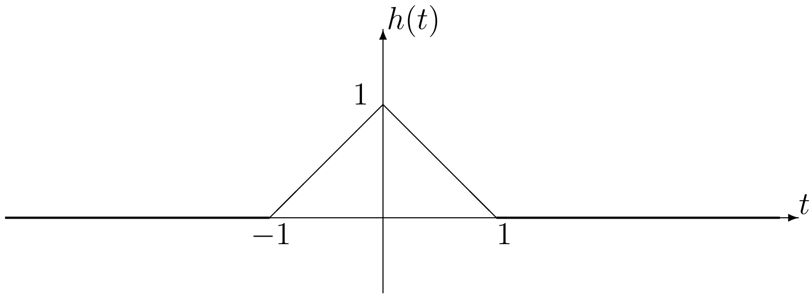
Лема 3.2. *Функцията $h(t)$, зададена с (57) може да се представи във вида*

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \right)^2 e(\alpha t)\, d\alpha. \tag{58}$$

Доказателство. Следва от теорията на преобразованието на Фурие. Да отбележим, че доказателство на (58) може да се получи и без прибягване до тази теория. Изчисленията предоставяме на чистателя.

□

Графиката на функцията $h(t)$ е дадена на следния чертеж:



В следващата лема се оценява експоненциален интеграл, който възниква при решаването на нашата задача.

Лема 3.3. *При $\alpha, P \in \mathbb{R}$, $P > 0$ определяме*

$$I(\alpha) = I_P(\alpha) = \int_0^P e\left(\alpha x^2\right)\, dx. \tag{59}$$

Тогава е сила оценката

$$I(\alpha) \ll \min\left(P, |\alpha|^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{60}$$

Доказателство. Ясно е, че $I(\alpha) \ll P$. По-нататък, очевидно имаме

$$|I(\alpha)| = |I(-\alpha)|,$$

следователно остава да докажем, че при $\alpha > 0$ е изпълнено

$$I(\alpha) \ll \alpha^{-\frac{1}{2}}.$$

Последната оценка е следствие от равенството

$$I(\alpha) = \alpha^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^{P\alpha^{\frac{1}{2}}} e\left(y^2\right) \, dy$$

и от това, че интегралът $\int_0^\infty e\left(y^2\right) dy$ е сходящ (простата проверка оставяме на читателя).

□

Следващата лема ни дава приближена формула за експоненциална сума, която се появява при изследването на задачата.

Лема 3.4. *При $\alpha, P \in \mathbb{R}$, $P > 1$ определяме*

$$S(\alpha) = S_P(\alpha) = \sum_{n \le P} e\left(\alpha n^2\right), \tag{61}$$

Тогава, ако $I(\alpha)$ се определя от (59), *то е в сила асимптотичната формула*

$$S(\alpha) = I(\alpha) + O\left(1 + |\alpha| P^2\right), \tag{62}$$

Доказателство. Като използваме (61) и сумационната формула на Ойлер, дадена в Лема 2.4 (УАТЧ-1), получаваме

$$S(\alpha) = I(\alpha) + O\left(1\right) + O\left(\int\limits_0^P \left| \frac{d}{dx} e\left(\alpha x^2\right) \right| \, dx\right) = I(\alpha) + O\left(1 + |\alpha| P^2\right).$$

□

3.3 Начало на доказателство на Теорема 3.1

Ще използваме вариант на кръговия метод на Харди–Литлууд. Да припомним, че $\varepsilon > 0$ е произволно малко число и ще считаме, че константите в знаците $\ll$ и O са абсолютни или зависят от ε и от числата $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$, участващи във формулировката на теоремата.

Без ограничение на общостта можем да считаме, че $\eta = 1$, тъй като, ако сме доказали теоремата в този случай, установяваме и общия, като вземем числата $\lambda_j \, \eta^{-1}$ вместо λ_j. Можем да считаме също, че $\lambda_1 > 0$. Тогава някое от числата $\lambda_2, \ldots, \lambda_5$ е отрицателно и нека имаме, например, $\lambda_5 < 0$ (в останалите случаи се разсъждава по аналогичен начин).

И така, вместо (56), ще разглеждаме неравенството

$$\left|\lambda_1 n_1^2 + \cdots + \lambda_5 n_5^2\right| < 1. \tag{63}$$

За да докажем, че то притежава решение в естествени числа, взимаме достатъчно голямо $P > 0$ и определяме

$$G(P) = \#\left\{\langle n_, \ldots, n_5\rangle \in \mathbb{N}^5 \ : \ \ n_1 \le P, \ldots, n_5 \le P; \quad \left|\lambda_1 n_1^2 + \cdots + \lambda_5 n_5^2\right| < 1 \ \right\}. \tag{64}$$

Тази величина е тясно свързана с интеграла

$$H(P) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_P\left(\lambda_1 \alpha\right) \ldots S_P\left(\lambda_5 \alpha\right) \left(\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha, \tag{65}$$

където $S(\alpha) = S_P(\alpha)$ е експоненциалната сума, определена чрез (61). По-точно, ще проверим, че е изпълнено неравенството

$$H(P) \le G(P). \tag{66}$$

Наистина, от (61) и (65) следва

$$H(P) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n_1 \le P} e\left(\lambda_1 \alpha n_1^2\right)\right) \ldots \left(\sum_{n_5 \le P} e\left(\lambda_5 \alpha n_1^2\right)\right) \left(\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha$$

$$= \sum_{n_1, \ldots, n_5 \le P} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e\left(\lambda_1 n_1^2 + \cdots + \lambda_5 n_5^2\right) \left(\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha.$$

Сега, като се възползуваме от (57) и Лема 3.2, получаваме

$$H(P) = \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_5 \le P \\ (63)}} \left(1 - \left|\lambda_1 n_1^2 + \cdots + \lambda_5 n_5^2\right|\right),$$

където сумирането е по числата $n_1, \ldots, n_5 \le P$, които удовлетворят (63). От последната формула и от (64) следва неравенството (66).

За да докажем теоремата е достатъчно да установим, че съществуват произволно големи стойности на P, за които

$$H(P) \gg P^3. \tag{67}$$

Наистина, тогава от (66) следва, че за същите P ще е налице и оценката $G(P) \gg P^3$, и като вземем предвид (64), ще установим, че неравенството (63) притежава решение в естествени числа $n_1, \ldots, n_5$.

3.4 Подготовка за изследването на $H(P)$

В този параграф започваме да изучаваме интеграла $H(P)$, определен чрез (65). Разделяме го на три части, както следва:

$$H(P) = H_0(P) + H_1(P) + H_2(P), \tag{68}$$

където в H_0 се интегрира по α от „малка” околност на нулата, в H_2 — по множеството от тези α, за които $|\alpha|$ е „голямо”, и накрая, в H_1 — по останалите стойности на α. По-точно, полагаме

$$H_0(P) = \int\limits_{|\alpha|<\Delta} S(\lambda_1\alpha)\dots S(\lambda_5\alpha) \left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha, \tag{69}$$

$$H_1(P) = \int\limits_{\Delta<|\alpha|<L} S(\lambda_1\alpha)\dots S(\lambda_5\alpha) \left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha, \tag{70}$$

$$H_2(P) = \int\limits_{|\alpha|>L} S(\lambda_1\alpha)\dots S(\lambda_5\alpha) \left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha, \tag{71}$$

като величините $\Delta = \Delta(P) > 0$ и $L = L(P) > 0$ ще определим по-късно.

Първо ще изследваме $H_0(P)$ и ще установим, че при подходящ избор на Δ е изпълнено

$$|H_0(P)| \gg P^3. \tag{72}$$

След това ще разгледаме интеграла $H_2(P)$, определен чрез (71) и ще определим L така, че за някое $\varepsilon > 0$ да имаме

$$H_2(P) \ll P^{3-\varepsilon}. \tag{73}$$

Най-трудно е изследването на $H_1(P)$. Поради това е целесъобразно оценката отдолу (72) за $|H_0(P)|$ да бъде доказана при възможно най-голяма стойност на Δ, а оценката (73) за $H_2(P)$ — за колкото се може по-малка стойност на L. Тогава множеството, по което се интегрира в (70) ще бъде възможно най-малко и това значително ще улесни нашата работа. В крайна сметка, ще видим, че съществуват произволно големи стойности на P, за които е изпълнено

$$H_1(P) \ll P^{3-\varepsilon}. \tag{74}$$

От (68), (72) – (74) следва, че съществуват произволно големи числа P, за които е изпълнено (67) и оттук следва верността на теоремата.

3.5 Приближена формула за $H_0(P)$

Да започнем с изследването на величината $H_0(P)$, определена чрез (69). За тази цел ще използуваме приближената формула (62) за $S(\alpha)$, дадена в Лема 3.4. Полагаме

$$\Delta = P^{-2+\delta}, \tag{75}$$

където $\delta > 0$ е константа, която ще определим по-късно. Тогава от (62) следва

$$S(\lambda_j\alpha) = I(\lambda_j\alpha) + O\left(P^\delta\right) \qquad \text{при} \qquad 1 \le j \le 5 \qquad \text{и} \qquad |\alpha| \le \Delta.$$

От горната формула и от оценката (60) за $I(\alpha)$, дадена в Лема 3.3 лесно се получава, че при $|\alpha| \le \Delta$ е изпълнено

$$S(\lambda_1\alpha)\dots S(\lambda_5\alpha) - I(\lambda_1\alpha)\dots I(\lambda_5\alpha) \ll P^\delta \min\left(P^4, |\alpha|^{-2}\right) + P^{5\delta}. \tag{76}$$

Проверката на (76) оставяме на читателя.

Тогава, ако определим

$$J_0(P) = \int\limits_{|\alpha|<\Delta} I\left(\lambda_1\alpha\right)\dots I\left(\lambda_5\alpha\right) \left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha, \tag{77}$$

и използуваме (69), (75) – (77) и познатото неравенство $|\sin t| \le |t|$, получаваме

$$\begin{aligned} H_0(P) - J_0(P) &\ll \int\limits_{|\alpha|<\Delta} \left(P^\delta \min\left(P^4, |\alpha|^{-2}\right) + P^{5\delta}\right) d\alpha \\ &\ll P^\delta \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \min\left(P^4, |\alpha|^{-2}\right) d\alpha\right) + P^{5\delta}\Delta \\ &\ll P^{2+\delta} + P^{-2+6\delta}. \end{aligned} \tag{78}$$

Сега ще видим, че интегралът $J_0(P)$ е приближено равен на

$$J(P) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I\left(\lambda_1\alpha\right)\dots I\left(\lambda_5\alpha\right) \left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha, \tag{79}$$

Наистина, от (60), (75), (77) и (79) следва

$$\begin{aligned} J_0(P) - J(P) &\ll \int\limits_{|\alpha|>\Delta} \left|I\left(\lambda_1\alpha\right)\right|\dots\left|I\left(\lambda_5\alpha\right)\right| \left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha \\ &\ll \int\limits_{|\alpha|>\Delta} \left(|\alpha|^{-\frac{1}{2}}\right)^5 d\alpha \ll \Delta^{-\frac{3}{2}} \\ &\ll P^{3-\frac{3\delta}{2}}. \end{aligned} \tag{80}$$

Тогава от (78) и (80) следва

$$H_0(P) = J(P) + O\left(P^{2+\delta} + P^{-2+6\delta} + P^{3-\frac{3\delta}{2}}\right). \tag{81}$$

3.6 Оценки отдолу за $J(P)$ и $H_0(P)$

Сега ще довършим доказателството на (72), като за целта ще установим неравенството

$$J(P) \gg P^3. \tag{82}$$

За да получим тази оценка, използваме (58), (59), (79) и намираме

$$J(P) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_0^P \dots \int\limits_0^P e\left(\alpha\left(\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_5 x_5^2\right)\right)\, dx_1 \dots dx_5 \right) \left(\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha$$

$$= \int\limits_0^P \dots \int\limits_0^P \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e\left(\alpha\left(\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_5 x_5^2\right)\right) \left(\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha \right) dx_1 \dots dx_5$$

$$= \int\limits_0^P \dots \int\limits_0^P h\left(\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_5 x_5^2\right)\, dx_1 \dots dx_5.$$

Сменяме променливите

$$x_j^2 = P^2 \left|\lambda_j\right|^{-1} z_j, \qquad 1 \le j \le 5$$

и, като вземем предвид допускането, че $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_5 < 0$ и положим

$$\eta_j = \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|}, \qquad j = 2, 3, 4, \tag{83}$$

получаваме

$$J(P) = \frac{P^5}{32\sqrt{|\lambda_1 \dots \lambda_5|}} \int\limits_0^{|\lambda_1|} \dots \int\limits_0^{|\lambda_5|} h\left(P^2 \mathcal{L}\right) \frac{dz_1 \dots dz_5}{\sqrt{z_1 \dots z_5}}, \tag{84}$$

където

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(z_1, \dots, z_5) = z_1 + \eta_2 z_2 + \eta_3 z_3 + \eta_4 z_4 - z_5. \tag{85}$$

Полагаме

$$\rho = \min\left(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_5|\right) \tag{86}$$

и, като използваме (57) и (84), получаваме

$$J(P) \gg P^5\, K(P), \tag{87}$$

където

$$K(P) = \int \underset{\mathfrak{M}}{\dots} \int \left(1 - P^2 |\mathcal{L}|\right) \frac{dz_1 \dots dz_5}{\sqrt{z_1 \dots z_5}}, \tag{88}$$

а интегрирането е по множеството $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^5$, състоящо се от точките $\langle z_1, \dots, z_5 \rangle$, удовлетворяващи

$$|\mathcal{L}| < P^{-2} \; ; \qquad 0 < z_1, \dots, z_5 < \rho.$$

Сега разглеждаме множеството $\mathfrak{M}_1 \subset \mathbb{R}^5$, за елементите $\langle z_1, \dots, z_5 \rangle$, на което са изпълнени условията

$$\frac{\rho}{3} < z_1 < \frac{2\rho}{3}, \qquad 0 < z_2, z_3, z_4 < \frac{\rho}{100}, \tag{89}$$

$$0 < z_5 < \rho, \qquad |\mathcal{L}| < \frac{1}{2} P^{-2}. \tag{90}$$

Очевидно имаме $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$, следователно за интеграла $K(P)$, определен чрез (88), е изпълнено

$$K(P) \geq \int \underset{\mathfrak{M}_1}{\dots} \int \left(1 - P^2 |\mathcal{L}|\right) \frac{dz_1 \dots dz_5}{\sqrt{z_1 \dots z_5}},$$

Но от второто от условията в (90) следва, че за точките от $\mathfrak{M}_1$ е налице неравенството

$$1 - P^2 |\mathcal{L}| \geq \frac{1}{2},$$

следователно

$$K(P) \geq \frac{1}{2} K_1(P), \qquad K_1(P) = \int \underset{\mathfrak{M}_1}{\dots} \int \frac{dz_1 \dots dz_5}{\sqrt{z_1 \dots z_5}}. \tag{91}$$

Използваме определението на множеството $\mathfrak{M}_1$, дадено чрез (89) и (90), както и горната формула за $K_1(P)$, и получаваме

$$K_1(P) = \int \underset{\mathfrak{N}}{\dots} \int \frac{dz_1 \dots dz_4}{\sqrt{z_1 \dots z_4}} \int_{\mathcal{T}} \frac{dz_5}{\sqrt{z_5}}, \tag{92}$$

където $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^4$ се състои от точките $\langle z_1, \dots, z_4 \rangle$, удовлетворяващи (89), а $\mathcal{T}$ е интервалът, съставен от числата z_5, за които е изпълнено (90).

Сега взимаме предвид определението (85) на $\mathcal{L}$, условията (89) и равенството $|\eta_j| = 1$, което следва от (83). Виждаме, че при достатъчно голямо P първото от двете условия в (90) е следствие от второто, следователно

$$\mathcal{T} = \left(\mathcal{Q} - \frac{1}{2} P^{-2}, \mathcal{Q} + \frac{1}{2} P^{-2} \right),$$

където

$$\mathcal{Q} = z_1 + \eta_2 z_2 + \eta_3 z_3 + \eta_4 z_4 \in \left(\frac{1}{10}\rho \, , \, \frac{9}{10}\rho \right).$$

Оттук веднага следва, че

$$\int\limits_{\mathcal{T}} \frac{dz_5}{\sqrt{z_5}} \gg P^{-2}$$

и, като заместим последния израз в (92), получаваме

$$K_1(P) \gg P^{-2} \int\limits_{\mathfrak{N}}\!\!\dots\!\!\int \frac{dz_1 \dots dz_4}{\sqrt{z_1 \dots z_4}} \gg P^{-2}.$$

От последното неравенство и от (87), (91) следва (82). (Вследствие на (86), константите в знаците $\gg$ в горните формули зависят само от $\lambda_1, \dots, \lambda_5$).

Определяме δ така, че

$$\frac{1}{2} < \delta < \frac{5}{6}. \tag{93}$$

Тогава остатъчният член във формула (81) ще бъде $O\left(P^{3-\varepsilon}\right)$ за някое $\varepsilon > 0$ и, като използуваме (82), получаваме оценката (72).

3.7 Оценяване на $H_2(P)$

Сега ще оценим интеграла $H_2(P)$, определен чрез (71), като нашата цел е да получим оценката (73) при възможно по-малка стойност на параметъра L .

Първото, за което бихме могли да се сетим, е да използуваме тривиалната оценка $S(\alpha) \ll P$ и тогава ще получим

$$H_2(P) \ll P^5 \int\limits_{|\alpha|>L} \left(\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}\right)^2 d\alpha \ll P^5 \int\limits_L^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} \ll P^5 L^{-1}.$$

Оттук следва, че за да е изпълнено (73) трябва да вземем $L \geq P^{2+\varepsilon}$. Тази долна граница за L, обаче, е твърде голяма по тази причина оценяването на $H_1(P)$ ще бъде трудно. Поради това ще работим по друг начин и ще успеем да докажем (73) при значително по-малки стойности на L.

От (71) и от тривиалната оценка за $S\left(\lambda_5\alpha\right)$ следва

$$H_2(P) \ll P \int\limits_L^\infty |\, S\left(\lambda_1\alpha\right) \dots S\left(\lambda_4\alpha\right) |\; \frac{d\alpha}{\alpha^2}.$$

Използуваме познатото неравенство

$$|a_1 \dots a_4| \leq a_1^4 + \dots + a_4^4 \tag{94}$$

и получаваме

$$H_2(P) \ll P \sum_{j=1}^4 V_j, \qquad V_j = \int\limits_L^\infty |\, S\left(\lambda_j\alpha\right)|^4 \; \frac{d\alpha}{\alpha^2}. \tag{95}$$

В интеграла, определящ V_j, извършваме смяна на променливата $|\lambda_j|\alpha = \beta$, след което го разделяме части. Използуваме също, че $|S(\beta)| = |S(-\beta)|$ и получаваме

$$V_j \ll \int\limits_{|\lambda_j|L}^{\infty} |\, S\,(\beta)\,|^4\ \frac{d\beta}{\beta^2} \ll \sum_{m \geq |\lambda_j|L}\ \int\limits_{m-1}^{m} |\, S\,(\beta)\,|^4\ \frac{d\beta}{\beta^2} \ll \sum_{m \geq |\lambda_j|L} m^{-2}\, G_m, \tag{96}$$

където

$$G_m = \int\limits_{m-1}^{m} |\, S\,(\beta)\,|^4\ d\beta. \tag{97}$$

Да отбележим, че последният интеграл всъщност не зависи от m, тъй като от определението (61) за $S(\alpha)$ следва, че подинтегралната функция в (97) е периодична с период 1. Като използуваме (61), (97) и елементарните свойства на функцията $e(t)$, дадени в Лема 4.9 (УАТЧ-1), получаваме

$$G_m = G_1 = \int\limits_0^1 |S\,(\beta)\,|^4\ d\beta = \int\limits_0^1 S\,(\beta)^2\, S\,(-\beta)^2\ d\beta$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\sum_{n_1 \leq P} e\left(\beta n_1^2\right)\right)\left(\sum_{n_2 \leq P} e\left(\beta n_2^2\right)\right)\left(\sum_{n_3 \leq P} e\left(-\beta n_3^2\right)\right)\left(\sum_{n_4 \leq P} e\left(-\beta n_4^2\right)\right)\ d\beta.$$

$$= \sum_{n_1,n_2,n_3,n_4 \leq P}\ \int\limits_0^1 e\left(\beta\left(n_1^2 + n_2^2 - n_3^2 - n_4^2\right)\right)\ d\beta.$$

Сега използуваме отново Лема 4.9 (УАТЧ-1) и виждаме, че G_1 е равно на броя на решенията на уравнението

$$n_1^2 + n_2^2 = n_3^2 + n_4^2 \tag{98}$$

в естествени числа $n_1, n_2, n_3, n_4 \leq P$. Ясно е също, че (98) е еквивалентно на

$$(n_1 - n_3)(n_1 + n_3) = (n_4 - n_2)(n_4 + n_2). \tag{99}$$

Очевидно, броят на решенията, за които $n_2 = n_4$ е равен на $O\,(P^2)$.

Сега да оценим броя на решенията, за които $n_2 \neq n_4$. Да отбележим, че броят на двойките n_2, n_4 е $O\,(P^2)$. За всяка такава двойка числата $n_1 - n_3$ и $n_1 + n_3$ са делители на числото в дясната страна на (99), като това число е различно от 0. Следователно, като се възползуваме от Лема 3.33 (УАТЧ-1), виждаме, че има $O\,(P^\varepsilon)$ възможни двойки n_1, n_3. От горните разсъждения се убеждаваме, че за всяко m е изпълнено

$$G_m \ll P^{2+\varepsilon}. \tag{100}$$

Тогава от (96), (100) и Лема 2.6 (2) (УАТЧ-1) следва

$$V_j \ll P^{2+\varepsilon} L^{-1}$$

и, като заместим в (95), получаваме

$$H_2(P) \ll P^{3+\varepsilon} L^{-1}.$$

Последната оценка ни убеждава, че ако изберем

$$L = P^{\theta}, \qquad \text{където} \qquad 0 < \theta < \frac{1}{100}, \tag{101}$$

ще е в сила оценката (73).

3.8 Оценяване на $H_1(P)$ — начало

Остана да изследваме интеграла $H_1(P)$, определен чрез (70), като ще считаме, че Δ и L удовлетворяват условията (75), (93) и (101). Ясно е, че

$$H_1(P) \ll \int_{\Delta}^{L} |\, S(\lambda_1 \alpha) \ldots S(\lambda_5 \alpha) \,| \; d\alpha. \tag{102}$$

До този момент за параметъра P използувахме само, че е достатъчко голямо число. Сега обаче ще наложим върху него допълнително условие. Тъй като числото $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ е ирационално, според Теорема 2.1, съществуват дроби $\frac{a_0}{q_0}$ с произволно големи знаменатели, удовлетворяващи

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{a_0}{q_0} \right| < \frac{1}{q_0^2}, \qquad (a_0, q_0) = 1. \tag{103}$$

Взимаме такава дроб, като считаме, че q_0 е достатъчно голямо, и оттук нататък ще предполагаме, че

$$P = q_0^2. \tag{104}$$

Ще установим, че при по-горе указания избор за Δ и L, за всяко $\alpha \in [\Delta, L]$ поне една от сумите $S(\lambda_j \alpha)$, $j = 1, 2$ е малка по модул.

И така, да вземем произволно α, което удовлетворява

$$\Delta \le \alpha \le L. \tag{105}$$

Първо ще докажем, че съществуват $a_1, q_1 \in \mathbb{Z}$ такива, че

$$\left| \lambda_1 \alpha - \frac{a_1}{q_1} \right| < \frac{1}{q_1 P^{\frac{3}{2}}}, \qquad (a_1, q_1) = 1, \qquad 1 \le q_1 \le P^{\frac{3}{2}}, \qquad a_1 \ne 0. \tag{106}$$

Съществуването на a_1, q_1, удовлетворяващи първите три условия в (106), е следствие от Теорема 3.63 (УАТЧ-1). Да допуснем, че $a_1 = 0$. Като използуваме (75), (105) и (106), получаваме

$$\lambda_1 P^{-2+\delta} \le |\lambda_1 \alpha| < \frac{1}{q_1 P^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{P^{\frac{3}{2}}},$$

откъдето

$$P^{\delta-\frac{1}{2}} \leq \lambda_1^{-1}.$$

Но тогава от (93) следва, че горното неравенство е невъзможно при достатъчно голямо P. Следователно изпълнено е и четвъртото от условията в (106).

Да допуснем, че имаме

$$P^{5\theta} \leq q_1. \tag{107}$$

Използуваме Лема 2.6, като полагаме $Y = 1$ и считаме, че $f(t) = \alpha t^2$. Също така, взимаме предвид условията (101), (106), (107) и получаваме

$$S(\lambda_1\alpha) \ll P^{1+\varepsilon}\left(q_1^{-\frac{1}{2}} + P^{-\frac{1}{2}} + q_1^{\frac{1}{2}}P^{-1}\right) \ll P^{1-\frac{5}{2}\theta+\varepsilon} + P^{\frac{3}{4}+\varepsilon} \ll P^{1-2\theta}. \tag{108}$$

Като разсъждаваме по същия начин се убеждаваме, че съществуват $a_2, q_2 \in \mathbb{Z}$ такива, че

$$\left|\lambda_2\alpha - \frac{a_2}{q_2}\right| < \frac{1}{q_2P^{\frac{3}{2}}}, \qquad (a_2, q_2) = 1, \qquad 1 \leq q_2 \leq P^{\frac{3}{2}}, \qquad a_2 \neq 0. \tag{109}$$

При това, ако

$$P^{5\theta} \leq q_2,$$

то е в сила оценката

$$S(\lambda_2\alpha) \ll P^{1-2\theta}. \tag{110}$$

Сега да допуснем, че едновременно са изпълнени неравенствата

$$q_1 < P^{5\theta}, \qquad q_2 < P^{5\theta}. \tag{111}$$

От (101), (105), (106), (109) и (111) следва

$$1 \leq |a_j| \leq P^{-\frac{3}{2}} + q_j|\lambda_j\alpha| \leq 1 + q_j|\lambda_j|L \ll P^{6\theta}, \qquad j = 1, 2. \tag{112}$$

Тогава

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1\alpha}{\lambda_2\alpha} = \frac{\frac{a_1}{q_1} + \left(\lambda_1\alpha - \frac{a_1}{q_1}\right)}{\frac{a_2}{q_2} + \left(\lambda_2\alpha - \frac{a_2}{q_2}\right)} = \frac{a_1q_2}{a_2q_1} \cdot \frac{1+\Xi_1}{1+\Xi_2}, \tag{113}$$

където

$$\Xi_i = \frac{q_j}{a_j}\left(\lambda_j\alpha - \frac{a_j}{q_j}\right), \qquad j = 1, 2.$$

От (106) и (109) следва, че

$$|\Xi_i| \leq |a_j|^{-1}P^{-\frac{3}{2}} \leq P^{-\frac{3}{2}}, \qquad j = 1, 2$$

и, като вземем предвид (113), получаваме

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a_1q_2}{a_2q_1}\left(1 + O\left(P^{-\frac{3}{2}}\right)\right). \tag{114}$$

От последното равенство в частност следва, че

$$\frac{a_1 q_2}{a_2 q_1} = O(1)$$

и тогава от (114) получаваме

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a_1 q_2}{a_2 q_1} + O\left(P^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{115}$$

Разглеждаме дробите

$$\frac{a_0}{q_0} \qquad \text{и} \qquad \frac{a_1 q_2}{a_2 q_1}.$$

От (101), (104), (111) и (112) следва, че

$$|a_2| q_1 \ll P^{11\theta} < P^{\frac{1}{2}} = q_0 \tag{116}$$

и, освен това, дробта $\frac{a_0}{q_0}$ е несъкратима. Тогава имаме

$$\frac{a_0}{q_0} \neq \frac{a_1 q_2}{a_2 q_1}.$$

Оттук и от (104), (116) следва

$$\left| \frac{a_0}{q_0} - \frac{a_1 q_2}{a_2 q_1} \right| = \frac{|a_0 a_2 q_1 - a_1 q_2 q_0|}{|a_2| q_0 q_1} \geq \frac{1}{|a_2| q_0 q_1} \gg P^{-\frac{1}{2} - 11\theta}. \tag{117}$$

От друга страна, като изпозлуваме (103), (104) и (115) получаваме

$$\left| \frac{a_0}{q_0} - \frac{a_1 q_2}{a_2 q_1} \right| \leq \left| \frac{a_0}{q_0} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| + \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{a_1 q_2}{a_2 q_1} \right| \ll \frac{1}{q_0^2} + \frac{1}{P^{\frac{3}{2}}} \ll P^{-1}. \tag{118}$$

От (117) и (118) следва

$$P^{-\frac{1}{2} - 11\theta} \ll P^{-1},$$

но последното не е възможно при ограничението (101) за параметъра θ.

От изложените разсъждения следва, че не е възможно едновременно да се изпълняват условията (111) за q_1 и q_2. Следователно, за всяко $\alpha \in [\Delta, L]$ е вярна поне една от оценките (108), (110). Получихме

$$\min\Big(|S(\lambda_1 \alpha)|, |S(\lambda_2 \alpha)| \Big) \ll P^{1-2\theta} \qquad \text{равномерно по} \qquad \alpha \in [\Delta, L]. \tag{119}$$

3.9 Завършване на оценяването на $H_1(P)$ и край на доказателството

Сега ще довършим доказателството на теоремата. Представяме интервала, по който интегрираме в дясната страна на (102), във вида

$$[\Delta, L] = \mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2, \tag{120}$$

където

$$\mathfrak{I}_1 = \{\alpha \in [\Delta, L] \ : \ |S(\lambda_1\alpha)| \leq |S(\lambda_2\alpha)|\}, \qquad \mathfrak{I}_2 = [\Delta, L] \setminus \mathfrak{I}_1. \tag{121}$$

Тогава от (102) следва

$$H_1(P) \ll H^{(1)} + H^{(2)}, \tag{122}$$

където

$$H^{(j)} = \int\limits_{\mathfrak{I}_j} |\, S\left(\lambda_1\alpha\right) \dots S\left(\lambda_5\alpha\right) |\ d\alpha, \qquad j = 1, 2. \tag{123}$$

Разглеждаме $H^{(1)}$. От (119) и (121) се вижда, че при $\alpha \in \mathfrak{I}_1$ имаме

$$|S(\lambda_1\alpha)| = \min\Big(|S(\lambda_1\alpha)|\,, |S(\lambda_2\alpha)| \Big) \ll P^{1-2\theta}.$$

Следователно

$$H^{(1)} \ll P^{1-2\theta} H', \qquad H' = \int\limits_{\mathfrak{I}_1} |\, S\left(\lambda_2\alpha\right) \dots S\left(\lambda_5\alpha\right) |\ d\alpha. \tag{124}$$

По-нататък от (94), (120) и (124) получаваме

$$H' \ll \int\limits_0^L |\, S\left(\lambda_2\alpha\right) \dots S\left(\lambda_5\alpha\right) |\ d\alpha \ll \sum_{j=2}^{5} \int\limits_0^L |\, S\left(\lambda_j\alpha\right)|^4\ d\alpha. \tag{125}$$

В последния интеграл сменяме промениливата $|\lambda_j|\alpha = \beta$, след което го разделяме на части. Получаваме

$$\int\limits_0^L |\, S\left(\lambda_j\alpha\right)|^4\ d\alpha = |\lambda_j|^{-1} \int\limits_0^{|\lambda_j|L} |\, S\left(\beta\right)|^4\ d\beta \ll \sum_{0 \leq m \leq |\lambda_j|L} \int\limits_m^{m+1} |\, S\left(\beta\right)|^4\ d\beta. \tag{126}$$

Интегралът в дясната страна на (126) съвпада с интеграла G_m, определен чрез (97), а за него вече сме получили оценката (100). Тогава, като използуваме определението на L, дадено в (101) и също (124) – (126), виждаме, че

$$H^{(1)} \ll P^{1-2\theta}\, L\, P^{2+\varepsilon} \ll P^{3-\theta+\varepsilon} \ll P^{3-\varepsilon}. \tag{127}$$

По същия начин оценяваме и интеграла $H^{(2)}$, определен от (123), и получаваме

$$H^{(2)} \ll P^{3-\varepsilon}. \tag{128}$$

От (122), (127), (128) и от избора на P, даден в (104), следва, че за произволно големи стойности на този параметър е изпълнено неравенството (74). С това теоремата е доказана.

□

4 Прости числа на Пятецкий-Шапиро

4.1 Увод и формулировка на теоремата

Според класическия резултат на Дирихле, изложена като Теорема 5.51 (УАТЧ-1), ако $a, q \in \mathbb{N}$, $(a, q) = 1$, то аритметичната прогресия

$$qn + a, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{129}$$

съдържа безбройно много прости числа. Предполага се, че безбройно прости числа има и в редицата

$$n^2 + 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{130}$$

но тази хипотеза в настоящия момент не е доказана. Поради това интерес представлява следната задача. Дадена е редица от естествени числа $F(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, която расте по-бързо от аритметичната прогресия (129), но по-бавно от редицата (130). Въпросът е дали съществуват безбройно много прости числа от вида $F(n)$. Естествен пример на редица от този тип е

$$[n^c], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{131}$$

където $[t]$ означава цялата част на t, а c е константа, удовлетворяваща $1 < c < 2$. Тази задача е разгледана през 1953 г. от Пятецкий-Шапиро [10], който доказва, че ако $1 < c < \frac{12}{11}$, то в редицата (131) има безбойно много прости числа. По-точно, имаме

Теорема 4.1 (Пятецкий-Шапиро)**.** *Нека $\pi_c(x)$ означава броя на естествените числа $n \leq x$, за които $[n^c]$ е просто число. Тогава при*

$$1 < c < \frac{12}{11} \tag{132}$$

е в сила асимптотичната формула

$$\pi_c(x) \sim \frac{x}{c \log x} \qquad \textit{при} \qquad x \to \infty. \tag{133}$$

Горната граница за константата c в тази теорема е подобрявана многократно, като до настоящия момент най-силният резултат от този тип принадлежи на Риват и Ву [26]. През 2001 г. тези математици доказват, че редицата (131) съдържа безбройно много прости числа при $1 < c < \frac{243}{205}$.

В настоящите записки излагаме доказателството на Теорема 4.1, като следваме изложението в известната монография [19] на Греъм и Колесник. От нея читателят може да се запознае със значително по-усъвършенствани методи за оценяване на експоненциални суми, с помощта на които, в крайна сметка, се получава и гореспоменатия резултат на Риват и Ву.

4.2 Метод на И. М. Виноградов за оценяване на суми по прости числа

В доказателсвтото на Теорема 4.1 централна роля играе оценяването на експоненциални суми по прости числа. Първо ще обясним накратко метода на Виноградов за оценяване на подобни суми. По-подробна информация може да бъде намерена в монографиите на Виноградов [3], Карацуба [6] и Вон [29].

Да разгледаме сумата

$$\sum_{p\le x} f(p),$$

където f е „осцилираща” комплекснозначна функция. Виноградов е показал, че тази сума може да се представи като линейна комбинация на няколко суми от два типа.

Сумите от първи тип са двойни суми от вида

$$\sum_{\substack{dl\le x\\ d\le u}}\sum \gamma_d\, f(dl).$$

Тук параметърът u нараства заедно с x, но доста по-бавно от x, а числата γ_d са „малки“. Тъй като няма коефициенти, зависещи от l, то тези суми се оценяват добре, ако се използва осцилацията на f.

Сумите от втори тип са двойни суми от вида

$$\sum_{\substack{dl\le x\\ d>u\\ l>u}}\sum \gamma_d\,\delta_l\, f(dl).$$

Тук коефициентите γ_d, δ_l са „малки“, но това не ни дава възможност да използваме директно осцилационното свойство на f. Това обаче може да се извърши по друг начин. За да илюстрираме метода нека разгледаме по-простата сума от втори тип

$$\mathcal{H}=\sum_{\substack{D<d\le 2D\\ L<l\le 2L}}\sum \gamma_d\,\delta_l\, f(dl),$$

където $DL\le x, D\ge u, L\ge u$ и нека считаме, че $|\gamma_d|\le 1, |\delta_l|\le 1$. Като използваме неравенството на триъгълника получаваме

$$|\mathcal{H}|\le \sum_{D<d\le 2D}\left|\sum_{L<l\le 2L}\delta_l\, f(dl)\right|.$$

По този начин се освободихме от изразите γ_d. Сега прилагаме неравенството на Коши и използваме тъждеството $|z|^2=z\overline{z}$, където $\overline{z}$ е комплексното спрегнато на z. След това сменяме реда на сумиране и получаваме

$$|\mathcal{H}|^2 \le D \sum_{D<d\le 2D} \left| \sum_{L<l\le 2L} \delta_l\, f(dl) \right|^2$$

$$= \sum_{D<d\le 2D} \sum_{L<l_1\le 2L} \delta_{l_1}\, f(dl) \sum_{L<l_2\le 2L} \overline{\delta_{l_2}}\, \overline{f(dl)}$$

$$= \sum_{L<l_1\le 2L} \sum_{L<l_2\le 2L} \delta_{l_1}\, \overline{\delta_{l_2}} \sum_{D<d\le 2D} f(dl)\, \overline{f(dl)}.$$

Оттук следва

$$|\mathcal{H}|^2 \le \sum_{L<l_1\le 2L} \sum_{L<l_2\le 2L} \left| \sum_{D<d\le 2D} f(dl)\, \overline{f(dl)} \right|.$$

По този начин се освободихме и от δ_l. Сега, ако използваме осцилационните свойства на f, в редица случаи сме в състояние да получим нетривиална оценка за сумата по d, а оттам и за сумата $\mathcal{H}$.

Оригиналният метод на Виноградов е технически доста сложен и впоследствие са намерени по-прости начини за изразяване на сума по прости числа чрез суми от първи и от втори тип. Един от най-простите варианти на метода на Виноградов се основава на следната

Лема 4.2 (Тъждество на Вон). *Нека $u, N, N_1 \in \mathbb{R}$, $1 < u \le N < N_1$, нека $f(n)$ е произволна функция, дефинирана за $n \in \mathbb{N}, n \in (N, N_1]$. Тогава, ако $\Lambda(n)$, $\mu(n)$, $\tau(n)$ са съответно функцията на Манголд, функцията на Мьобиус и броя на положителните делители на n, то е в сила тъждеството*

$$\sum_{N<n\le N_1} \Lambda(n) f(n) = W_1 - W_2 - W_3, \tag{134}$$

където

$$W_1 = \sum_{d\le u} \mu(d) \sum_{\frac{N}{d}<l\le \frac{N_1}{d}} (\log l)\, f(dl), \tag{135}$$

$$W_2 = \sum_{d\le u^2} c(d) \sum_{\frac{N}{d}<l\le \frac{N_1}{d}} f(dl), \tag{136}$$

$$W_3 = \sum\sum_{\substack{N<dl\le N_1 \\ d>u,\ l>u}} a(d)\, \Lambda(l)\, f(dl), \tag{137}$$

и където

$$a(d) = \sum_{\substack{k|d \\ k\le u}} \mu(k), \qquad c(d) = \sum_{\substack{kh=d \\ k\le u \\ h\le u}} \mu(k)\, \Lambda(h). \tag{138}$$

При това, изпълнени са неравенствата

$$|a(d)| \le \tau(d), \qquad |c(d)| \le \log d. \tag{139}$$

Доказателство. Нека $N < n$. Използваме Лема 3.43 (УАТЧ-1) и записваме

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = \sum_{dl=n} \mu(d) \log l = I(n) + I'(n), \tag{140}$$

където

$$I(n) = \sum_{\substack{dl=n \\ d\le u}} \mu(d) \log l, \qquad I'(n) = \sum_{\substack{dl=n \\ d>u}} \mu(d) \log l. \tag{141}$$

Да разгледаме $I'(n)$. Като използваме Лема 3.42 (УАТЧ-1) записваме

$$I'(n) = \sum_{\substack{dl=n \\ d>u}} \mu(d) \sum_{k|l} \Lambda(k) = \sum_{\substack{dl=n \\ d>u}} \mu(d) \sum_{kr=l} \Lambda(k) = \sum_{\substack{dkr=n \\ d>u}} \mu(d)\Lambda(k).$$

Разделяме последната сума на две части съобразно големината на k и получаваме

$$I'(n) = I''(n) + I^*(n), \tag{142}$$

където

$$I''(n) = \sum_{\substack{dkr=n \\ d>u \\ k\le u}} \mu(d)\Lambda(k), \qquad I^*(n) = \sum_{\substack{dkr=n \\ d>u \\ k>u}} \mu(d)\Lambda(k). \tag{143}$$

Да разгледаме $I''(n)$. Имаме

$$I''(n) = I'''(n) - J(n), \tag{144}$$

където

$$I'''(n) = \sum_{\substack{dkr=n \\ k\le u}} \mu(d)\Lambda(k), \qquad J(n) = \sum_{\substack{dkr=n \\ d\le u \\ k\le u}} \mu(d)\Lambda(k). \tag{145}$$

Но

$$I'''(n) = \sum_{\substack{sk=n \\ k\le u}} \Lambda(k) \sum_{dr=s} \mu(d) = 0, \tag{146}$$

тъй като вътрешната сума в горния израз е равна на $\sum_{d|s} \mu(d) = 0$ (тук използуваме Лема 3.34 (УАТЧ-1)). По-нататък, очевидно можем да запишем сумата $J(n)$ като

$$J(n) = \sum_{\substack{mr=n \\ m\le u^2}} \left(\sum_{\substack{dk=m \\ d\le u \\ k\le u}} \mu(d)\Lambda(k) \right) = \sum_{\substack{mr=n \\ m\le u^2}} c(m), \qquad c(m) = \sum_{\substack{dk=m \\ d\le u \\ k\le u}} \mu(d)\Lambda(k). \tag{147}$$

Сега да разгледаме $I^*(n)$, определено чрез (143). Използуваме отново Лема 3.34 (УАТЧ-1) и записваме

$$I^*(n) = \sum_{\substack{tk=n \\ t>u \\ k>u}} \left(\sum_{\substack{dr=t \\ d>u}} \mu(d) \right) \Lambda(k) = \sum_{\substack{tk=n \\ t>u \\ k>u}} \left(\sum_{dr=t} \mu(d) - \sum_{\substack{dr=t \\ d\le u}} \mu(d) \right) \Lambda(k) = -K(n), \quad (148)$$

където

$$K(n) = \sum_{\substack{tk=n \\ t>u \\ k>u}} \left(\sum_{\substack{dr=t \\ d\le u}} \mu(d) \right) \Lambda(k) = \sum_{\substack{tk=n \\ t>u \\ k>u}} a(t)\,\Lambda(k), \qquad a(t) = \sum_{\substack{dr=t \\ d\le u}} \mu(d). \quad (149)$$

Като използваме (140), (142), (144), (146) и (148), записваме

$$\Lambda(n) = I(n) - J(n) - K(n) \qquad \text{при} \qquad N < n, \quad (150)$$

където събираемите в дясната част на последното равенство се определят чрез (141), (147) и (149). След като сменим, за удобство, сумационните променливи, можем да запишем

$$I(n) = \sum_{\substack{dl=n \\ d\le u}} \mu(d) \log l, \qquad J(n) = \sum_{\substack{dl=n \\ d\le u^2}} c(d), \qquad K(n) = \sum_{\substack{dl=n \\ d>u \\ l>u}} a(d)\,\Lambda(l), \quad (151)$$

където $a(d)$, $c(d)$ се задават чрез (138).

Умножаваме двете страни на (150) с $f(n)$ и сумираме по целите числа $n \in (N, N_1]$. Като използваме (135) – (137) и (151) получаваме

$$\sum_{N<n\le N_1} \Lambda(n) f(n) = W_1' - W_2' - W_3',$$

където

$$W_1' = \sum_{N<n\le N_1} I(n) f(n) = \sum_{\substack{N<dl\le N_1 \\ d\le u}} \sum \mu(d)\,(\log l)\,f(dl) = W_1,$$

$$W_2' = \sum_{N<n\le N_1} J(n) f(n) = \sum_{\substack{N<dl\le N_1 \\ d\le u^2}} \sum c(d)\,f(dl) = W_2,$$

$$W_3' = \sum_{N<n\le N_1} K(n) f(n) = \sum_{\substack{N<dl\le N_1 \\ d>u \\ l>u}} \sum a(d)\,\Lambda(l)\,f(dl) = W_3.$$

С това равенството (134) е доказано.

Остава да проверим (139). От Лема 3.42 (УАТЧ-1) следва

$$|c(d)| \leq \sum_{kh=d} \Lambda(h) = \sum_{h|d} \Lambda(h) = \log d$$

и очевидно

$$|a(d)| \leq \sum_{k|d} 1 = \tau(d).$$

С това лемата е доказана.

$\square$

Идеята за оценяването на сумите от втори тип е изложена в началото на настоящия параграф, но на практика често се извършват малко по-сложни изчисления, които се основават на следната

Лема 4.3. *Нека $H \in \mathbb{N}$; $a, b \in \mathbb{R}$; $1 \leq b - a$ и нека $\xi(n)$ е комплекснозначна функция, дефинирана за целите числа от интервала $(a, b]$. Тогава е в сила неравенството*

$$\left| \sum_{a<n\leq b} \xi(n) \right|^2 \leq \frac{b-a+H}{H} \sum_{|h|<H} \left(1 - \frac{|h|}{H}\right) \sum_{n \in I_h} \xi(n)\, \overline{\xi(n+h)}, \tag{152}$$

където $I_h = (a, b] \cap (a - h, b - h]$.

Доказателство. За улеснение, определяме $\xi(n) = 0$ при $n \notin (a, b]$ и нека положим

$$\mathfrak{X} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi(n) \tag{153}$$

Тогава за всяко $k \in \mathbb{Z}$ имаме

$$\mathfrak{X} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi(n+k),$$

откъдето

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{H} \sum_{1\leq k\leq H} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi(n+k) = \frac{1}{H} \sum_{a-H<n\leq b-1} \sum_{1\leq k\leq H} \xi(n+k).$$

Тогава, като приложим неравенството на Коши, получаваме

$$|\mathfrak{X}|^2 \leq \frac{b-a+H}{H^2}\, \mathfrak{X}_1, \qquad \mathfrak{X}_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{1\leq k\leq H} \xi(n+k) \right|^2. \tag{154}$$

Оттук и от познатото равенство $|z|^2 = z\overline{z}$ следва

$$\mathfrak{X}_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{1\leq k,l\leq H} \xi(n+k)\, \overline{\xi(n+l)} = \sum_{1\leq k,l\leq H} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi(n+k)\, \overline{\xi(n+l)}$$

$$= \sum_{1\leq k,l\leq H} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi(n)\, \overline{\xi(n+l-k)}.$$

Разделяме последната сума на части съобразно стойността на $l-k$ и получаваме

$$\mathfrak{X}_1 = \sum_{|h|<H} \sum_{\substack{1\le k,l\le H\\ l-k=h}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi(n)\,\overline{\xi(n+l-k)} = \sum_{|h|<H} \left(\sum_{\substack{1\le k,l\le H\\ l-k=h}} 1 \right) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi(n)\,\overline{\xi(n+h)}$$

$$= \sum_{|h|<H} (H-|h|) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi(n)\,\overline{\xi(n+h)}$$

От горната формула и (153), (154) следва (152).

□

4.3 Начало на доказателството на Теорема 4.1

Да положим

$$\gamma = \frac{1}{c}. \tag{155}$$

Засега ще считаме, че константата c удовлетворява по-слабо условие от това в (132). Предполагаме, че

$$1 < c < 2 \qquad \text{и съответно} \qquad \frac{1}{2} < \gamma < 1, \tag{156}$$

като ще отбележим мястото, от което нататък ще използваме условието (132).

Очевидно имаме

$$\pi_c(x) = \sum_{\substack{n\le x\\ [n^c]\,-\,\text{просто}}} 1 \;=\; \sum_{p\le x^c} \sum_{\substack{n\le x\\ [n^c]=p}} 1,$$

където, както обикновено, с буквата p означаваме прости числа. Условието $[n^c]=p$ е еквивалентно на неравенствата $p \le n^c < p+1$ или, все едно, на

$$p^\gamma \le n < (p+1)^\gamma. \tag{157}$$

Тогава

$$\pi_c(x) = \sum_{p\le x^c} \sum_{\substack{n\le x\\ p^\gamma\le n<(p+1)^\gamma}} 1 = \sum_{p\le x^c} \sum_{p^\gamma\le n<(p+1)^\gamma} 1 + O(1), \tag{158}$$

тъй като съществува най-много една двойка числа p,n, удовлетворяващи (157) и за която $n>x$. По-нататък, ясно е, че при реални числа a,b, за които $a<b$, броят на целите числа $n\in[a,b)$ е равен на

$$[-a]-[-b] = -a+b+\rho(-a)-\rho(-b),$$

където $\rho(t)=\frac{1}{2}-\{t\}$, а с $\{t\}$ е означена дробната част на t. От това съображение и от (158) виждаме, че

$$\pi_c(x) = \sum_{p\le x^c} \big([-p^\gamma] - [-(p+1)^\gamma] \big) + O(1) = \Gamma + \Sigma + O(1), \tag{159}$$

където

$$\Gamma = \sum_{p \le x^c} \big((p+1)^\gamma - p^\gamma \big), \tag{160}$$

$$\Sigma = \sum_{p \le x^c} \big(\rho\left(-p^\gamma\right) - \rho\left(-(p+1)^\gamma\right) \big). \tag{161}$$

4.4 Асимптотична формула за сумата Γ

В настоящия параграф ще намерим асимптотична формула за сумата Γ, определена чрез (160). Като използваме формулата на Тейлор и очевидното неравенство $2 - \gamma > 1$, получаваме

$$\Gamma = \sum_{p \le x^c} p^\gamma \, \Big(\left(1 + p^{-1}\right)^\gamma - 1 \Big) = \sum_{p \le x^c} p^\gamma \, \Big(\gamma p^{-1} + O\left(p^{-2}\right) \Big)$$

$$= \gamma \Gamma_1 + O(1), \tag{162}$$

където

$$\Gamma_1 = \sum_{p \le x^c} p^{\gamma - 1}.$$

За да изследваме Γ_1 прилагаме преобразованието на Абел (Лема 2.1 (УАТЧ-1)). Ако $\pi(t)$ означава, както обикновено, броят на простите числа, ненадминаващи t, имаме

$$\Gamma_1 = \pi(x^c)\,(x^c)^{\gamma-1} - \int\limits_2^{x^c} \pi(t) \left(t^{\gamma-1}\right)' \, dt = \pi(x^c)\, x^{1-c} - (\gamma - 1) \int\limits_2^{x^c} \pi(t)\, t^{\gamma-2}\, dt. \tag{163}$$

Според Асимптоточния закон за разпределение на простите числа, формулиран в Теорема 5.34 (УАТЧ-1), имаме

$$\pi(t) = \frac{t}{\log t} + \delta(t), \qquad \delta(t) = o\left(\frac{t}{\log t}\right) \qquad \text{при} \qquad t \to \infty \tag{164}$$

(както обикновено, $f = o(g)$ означава, че $\frac{f}{g} \to 0$). Оттук и от (163) следва

$$\Gamma_1 = \Gamma' + \Gamma'', \tag{165}$$

където Γ' е приносът към Γ_1, който се получава от главния член в асимптотичната формула (164), а Γ'' е приносът на остатъчния член. Имаме

$$\Gamma' = \frac{x^c}{\log x^c}\, x^{1-c} - (\gamma - 1) \int\limits_2^{x^c} \frac{t}{\log t}\, t^{\gamma-2}\, dt = \frac{\gamma x}{\log x} - (\gamma - 1) \int\limits_2^{x^c} \frac{t^{\gamma-1}}{\log t}\, dt.$$

Тъй като

$$\int_2^{x^c} \frac{t^{\gamma-1}}{\log t}\,dt = \int_2^{x^c} \frac{d\,t^\gamma}{\log t^\gamma} = \int_{2^\gamma}^{x} \frac{du}{\log u} = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \tag{166}$$

(проверката на последното равенство предоставяме на читателя), получаваме

$$\Gamma' = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right). \tag{167}$$

Сега ще установим, че

$$\Gamma'' = o\left(\frac{x}{\log x}\right). \tag{168}$$

От определението на Γ'' и от (156) имаме

$$|\Gamma''| = \left|\delta(x^c)\ x^{1-c} - (\gamma-1)\int_2^{x^c} \delta(t)\,t^{\gamma-2}\,dt\right| \le |\delta(x^c)|\ \ x^{1-c} + \int_2^{x^c} |\delta(t)|\,t^{\gamma-2}\,dt.$$

Избираме произволно $\varepsilon > 0$ и нека $x_0 = x_0(\varepsilon) > 2$ е такова, че

$$|\delta(t)| \le \varepsilon\frac{t}{\log t} \qquad \text{при} \qquad t \ge x_0.$$

Тогава ако положим

$$A(\varepsilon) = \int_2^{x_0} |\delta(t)|\,t^{\gamma-2}\,dt,$$

то при $x^c > x_0$ имаме

$$|\Gamma''| \le A(\varepsilon) + \int_{x_0}^{x^c} |\delta(t)|\,t^{\gamma-2}\,dt + |\delta(x^c)|\ \ x^{1-c}$$

$$\le A(\varepsilon) + \int_{x_0}^{x^c} \varepsilon\frac{t}{\log t}\,t^{\gamma-2}\,dt + \varepsilon\frac{x^c}{\log x^c}\ x^{1-c}$$

$$\le A(\varepsilon) + \varepsilon\left(\int_2^{x^c} \frac{t^{\gamma-1}}{\log t}\ dt + \frac{x}{c\log x}\right).$$

От (166) следва, че при достатъчно големи x изразът в скобите в последния ред на горната формула не надхвърля $\frac{2x}{\log x}$. Ясно е също, че $A(\varepsilon) \le \varepsilon\frac{x}{\log x}$, стига x да е достатъчно голямо. Тогава съществува $x_1 = x_1(\varepsilon)$ такова, че

$$|\Gamma''| \le 3\varepsilon\frac{x}{\log x} \qquad \text{при} \qquad x \ge x_1,$$

с което (168) е доказано.

От (165), (167) и (168) следва

$$\Gamma_1 \sim \frac{x}{\log x} \qquad \text{при} \qquad x \to \infty$$

и, като използуваме също (155) и (162) получаваме

$$\Gamma \sim \frac{x}{c \log x} \qquad \text{при} \qquad x \to \infty. \tag{169}$$

4.5 Подготовка за оценяването на сумата Σ

Основната задача, която ни предстои, е оценяването на сумата Σ, определена чрез (161). В настоящия параграф ще видим, че оценяването на Σ се свежда до оценяване на експоненциални суми, в които сумационата променлива пробягва прости числа.

За произволно $n \in \mathbb{N}$ определяме

$$\varkappa_n = \rho\left(-n^\gamma\right) - \rho\left(-(n+1)^\gamma\right) \tag{170}$$

и нека

$$\Sigma_1(t) = \sum_{p \le t} (\log p)\, \varkappa_p. \tag{171}$$

Като използуваме преобразованието на Абел, дадено в Лема 2.1 (УАТЧ-1), получаваме

$$\Sigma = \sum_{p \le x^c} \varkappa_p = \sum_{p \le x^c} (\log p)\, \varkappa_p \, \frac{1}{\log p} = \frac{\Sigma_1\left(x^c\right)}{\log x^c} - \int\limits_2^{x^c} \Sigma_1(t) \, \left(\frac{1}{\log t}\right)' \, dt.$$

Оттук следва

$$\Sigma \ll \frac{\left|\Sigma_1\left(x^c\right)\right|}{\log x} + \int\limits_2^{x^c} \left|\Sigma_1(t)\right| \, \frac{dt}{t \log^2 t} \ll \left(1 + \int\limits_2^{x^c} \frac{dt}{t \log^2 t}\right) \max_{t \in [2, x^c]} \left|\Sigma_1(t)\right|$$

$$\ll \max_{t \in [2, x^c]} \left|\Sigma_1(t)\right|. \tag{172}$$

Сега ще сравним $\Sigma_1(t)$ със сумата

$$\Sigma_2(t) = \sum_{n \le t} \Lambda(n)\, \varkappa_n. \tag{173}$$

където $\Lambda(n)$ е функцията на Манголд, зададена чрез Определение 3.22 (УАТЧ-1). Ясно е, че

$$\Sigma_2(t) = \Sigma_1(t) + \sum_{\substack{p^k \le t \\ k \ge 2}} (\log p)\, \varkappa_{p^k}.$$

От тази формула и от (156) следва, че при $t \leq x^c$ имаме

$$\Sigma_2(t) - \Sigma_1(t) \ll (\log x) \sum_{\substack{p^k \leq x^c \\ k \geq 2}} 1 \ll x^{\frac{c}{2}} \log^2 x \ll \frac{x}{\log^2 x}.$$

Тогава, като вземем предвид (172), получаваме

$$\Sigma \ll \frac{x}{\log^2 x} + \max_{t \in [2, x^c]} |\Sigma_2(t)| \,. \tag{174}$$

Разглеждаме сумата $\Sigma_2(t)$ при $t \leq x^c$. Разделяме интервала на сумиране в нея на подинтервали посредством точките $\frac{t}{2^j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ и по този начин $\Sigma_2(t)$ се разделя на $O(\log x)$ суми от вида

$$\Sigma_3(N) = \sum_{N < n \leq 2N} \Lambda(n)\, \varkappa_n, \qquad \text{където} \qquad 1 \leq N \leq \frac{t}{2}. \tag{175}$$

При $N \leq \frac{x}{\log^4 x}$ използуваме тривиалната оценка $\Sigma_3(N) \ll N \log N$ и, като вземем предвид (174), виждаме, че

$$\Sigma \ll \frac{x}{\log^2 x} + (\log x) \max_{\frac{x}{\log^4 x} \leq N \leq x^c} |\Sigma_3(N)| \,. \tag{176}$$

Ясно е, че за да продължим по-нататък, трябва да намерим нетривиална оценка за сумата $\Sigma_3(N)$ при стойности на N, указани във формула (176). За тази цел ще изследваме величината $\varkappa_n$, определена чрез (170).

Нека $M \geq 2$ е параметър, който ще изберем по-късно в зависимост от N. Прилагаме приближената формула за функцията $\rho(t)$, дадена в Лема 4.11 (УАТЧ-1) и намираме

$$\varkappa_n = \sum_{1 \leq |h| \leq M} \frac{\theta(n,h)}{2\pi i h} + O(\theta'_n) + O(\theta''_n) \,, \tag{177}$$

където

$$\theta(n,h) = e(-h n^\gamma) - e(-h(n+1)^\gamma) \,, \tag{178}$$

$$\theta'_n = \min\left(1, \frac{1}{M \parallel -n^\gamma \parallel}\right), \qquad \theta''_n = \min\left(1, \frac{1}{M \parallel -(n+1)^\gamma \parallel}\right).$$

Заместваме получения израз за $\varkappa_n$ в (175) и получаваме.

$$\Sigma_3(N) \ll |\Sigma_4(N, M)| + \Theta' + \Theta'', \tag{179}$$

където

$$\Sigma_4(N, M) = \sum_{1 \leq |h| \leq M} \frac{1}{h} \sum_{N < n \leq 2N} \Lambda(n)\, \theta(n,h), \tag{180}$$

а Θ' и Θ'' са приносите на остатъчните членове в (177).

Да отбележим, че изразите Θ' и Θ'' са еднотипни и можем да ги мажорираме с една и съща величина. Използуваме също, че функцията $\| \, t \, \|$ е четна и получаваме

$$\Theta', \; \Theta'' \ll (\log x) \, \Theta^*, \tag{181}$$

където

$$\Theta^* = \sum_{N < n \le 2N+1} \min \left(1, \frac{1}{M \, \| \, n^\gamma \, \|} \right) \tag{182}$$

4.6 Оценяване на сумата Θ^*

За да оценим сумата Θ^*, определена чрез (182), използуваме Лема 4.12 (УАТЧ-1) и получаваме

$$\Theta^* = \sum_{N < n \le 2N+1} \; \sum_{h \in \mathbb{Z}} b_M(h) \, e\left(h n^\gamma\right), \tag{183}$$

където

$$b_M(h) \ll \begin{cases} \frac{\log M}{M} & \text{за всяко } h, \\ \frac{M}{h^2} & \text{при } h \neq 0. \end{cases} \tag{184}$$

Сменяме реда на сумирането в (183) и виждаме, че

$$\Theta^* = \sum_{h \in \mathbb{Z}} b_M(h) \; H(h), \qquad H(h) = \sum_{N < n \le 2N+1} e\left(h n^\gamma\right)$$

Сега прилагаме (184) и намираме

$$\Theta^* \ll \frac{N \log M}{M} + \frac{\log M}{M} \sum_{1 \le |h| \le M} |H(h)| + M \sum_{|h| > M} \frac{|H(h)|}{h^2}. \tag{185}$$

При $h \neq 0$ оценяваме експоненциалната сума $H(h)$ с помощта на теоремата на Ван-дер-Корпут (Теорема 4.16 (УАТЧ-1)). Полагаме $f(u) = h u^\gamma$ и, тъй като

$$|f''(u)| = |\gamma(\gamma - 1) h u^{\gamma - 2}| \asymp |h| N^{\gamma - 2} \qquad \text{при} \qquad u \in [N, 2N+1],$$

получаваме

$$H(h) \ll N \left(|h| \, N^{\gamma-2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(|h| \, N^{\gamma-2} \right)^{-\frac{1}{2}} \ll |h|^{\frac{1}{2}} \, N^{\frac{\gamma}{2}} + |h|^{-\frac{1}{2}} \, N^{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

Сега заместваме получения израз в (185) и, като използуваме Лема 2.6 (УАТЧ-1), намираме

$$\Theta^* \ll \frac{N \log M}{M} + \frac{\log M}{M} \sum_{1 \le h \le M} \left(h^{\frac{1}{2}} \, N^{\frac{\gamma}{2}} + h^{-\frac{1}{2}} \, N^{1 - \frac{\gamma}{2}} \right) + M \sum_{h > M} \left(h^{-\frac{3}{2}} \, N^{\frac{\gamma}{2}} + h^{-\frac{5}{2}} \, N^{1 - \frac{\gamma}{2}} \right)$$

$$\ll (\log M) \left(N M^{-1} + N^{\frac{\gamma}{2}} M^{\frac{1}{2}} + N^{1 - \frac{\gamma}{2}} M^{-\frac{1}{2}} \right). \tag{186}$$

Ще изберем M колкото се може по-малко (за да бъде сумата $\Sigma_4(N, M)$ с по-малко събираеми), но в същото време M трябва да е такова, че величината Θ^* да има пренебрежимо малък принос към Σ. Подходящ избор е

$$M = N^{1-\gamma} \log^5 x. \tag{187}$$

Заместваме последният израз в (186) и, като използваме (156), намираме

$$\Theta^* \ll (\log x) \left(\frac{N^\gamma}{\log^5 x} + N^{\frac{1}{2}} \log^5 x \right) \ll \frac{N^\gamma}{\log^4 x}. \tag{188}$$

От (179), (181), (187) и (188) следва, че при $\frac{x}{\log^4 x} \le N \le x^c$ имаме

$$\Sigma_3(N) \ll |\Sigma_4(N, M)| + \frac{x}{\log^3 x}.$$

Като използваме (176), получаваме

$$\Sigma \ll \frac{x}{\log^2 x} + (\log x) \max_{\frac{x}{\log^4 x} \le N \le x^c} |\Sigma_4(N, M)|, \tag{189}$$

като M се определеля чрез (187).

4.7 Нова оценка за сумата Σ

Сега ще разгледаме сумата $\Sigma_4(N, M)$, зададена с (180). Записваме величината $\theta(n, h)$, определена чрез (178), във вида

$$\theta(n, h) = e(-hn^\gamma)\lambda_h(n), \tag{190}$$

където за всяко реално $t > 0$ сме положили

$$\lambda_h(t) = 1 - e\left(h\left(t^\gamma - (t+1)^\gamma\right)\right). \tag{191}$$

Прилагаме преобразованието на Абел (Лема 2.1 (УАТЧ-1)) и, като вземем предвид (190) получаваме

$$\sum_{N<n\le 2N} \Lambda(n)\, \theta(n, h) = \lambda_h(2N) \sum_{N<n\le 2N} \Lambda(n)\, e(-hn^\gamma) - \int\limits_N^{2N} \left(\sum_{N<n\le t} \Lambda(n)\, e(-hn^\gamma) \right) \lambda_h'(t)\, dt.$$

$$\ll \left(|\lambda_h(2N)| + \int\limits_N^{2N} |\lambda_h'(t)|\, dt \right) \max_{N_1 \in [N, 2N]} |S_h(N, N_1)|, \tag{192}$$

където

$$S_h(N, N_1) = \sum_{N<n\le N_1} \Lambda(n)\, e\left(hn^\gamma\right). \tag{193}$$

Да оценим $\lambda_h(2N)$. От (191) и от теоремата за средните стойности следва

$$|\lambda_h(2N)| \leq 2 \left| \sin\left(\pi h\left((2N)^\gamma - (2N+1)^\gamma\right)\right) \right| \ll |h| \left|(2N)^\gamma - (2N+1)^\gamma\right| \ll |h|\, N^{\gamma-1}. \tag{194}$$

Имаме също

$$\lambda_h'(t) = -2\pi i\, h\, \gamma\, \left(t^{\gamma-1} - (t+1)^{\gamma-1}\right)\, e\big(h\left(t^\gamma - (t+1)^\gamma\right)\big)$$

откъдето

$$\lambda_h'(t) \ll |h|\, N^{\gamma-2} \qquad \text{при} \qquad t \in [N, 2N]. \tag{195}$$

От (192) – (195) следва

$$\sum_{N<n\leq 2N} \Lambda(n)\, \theta(n,h) \ll |h|\, N^{\gamma-1} \max_{N_1\in[N,2N]} |S_h(N,N_1)|\,.$$

Заместваме последната оценка в (180), след което използваме (189) и получаваме

$$\Sigma \ll \frac{x}{\log^2 x} \;+\; (\log x) \max_{\frac{x}{\log^4 x}\leq N\leq x^c} \left(N^{\gamma-1}\, \Sigma_5(N,N_1)\,\right), \tag{196}$$

където

$$\Sigma_5(N,N_1) = \sum_{1\leq h\leq M} \max_{N_1\in[N,2N]} |S_h(N,N_1)|\,, \tag{197}$$

а M е определено чрез (187).

4.8 Прилагане на тъждеството на Вон

Започва най-важната част от доказателството на теоремата, а именно оценката на сумата $\Sigma_5(N,N_1)$. Оттук нататък вече ще предполагаме, че константата c удовлетворява условието (132) и тогава за $\gamma = \frac{1}{c}$ ще е изпълнено

$$\frac{11}{12} < \gamma < 1. \tag{198}$$

Нека $u \in \left(1, N^{\frac{1}{2}}\right)$ е параметър, който ще определим по-късно. За сумата (193) прилагаме тъждеството на Вон, дадено в Лема 4.2, и получаваме

$$S_h(N,N_1) = W_1 - W_2 - W_3, \tag{199}$$

където

$$W_1 = \sum_{d\leq u} \mu(d) \sum_{\frac{N}{d}<l\leq\frac{N_1}{d}} (\log l)\, e\left(h(dl)^\gamma\right), \tag{200}$$

$$W_2 = \sum_{d\leq u^2} c(d) \sum_{\frac{N}{d}<l\leq\frac{N_1}{d}} e\left(h(dl)^\gamma\right), \tag{201}$$

$$W_3 = \sum_{d>u,} \sum_{\substack{N<dl\leq N_1\\ l>u}} a(d)\, \Lambda(l)\, e\left(h(dl)^\gamma\right), \tag{202}$$

като $c(d)$ и $a(d)$ са реални величини, за които

$$|c(d)| \leq \log d, \qquad |a(d)| \leq \tau(d). \tag{203}$$

Ясно е, че W_2, според класификацията от параграф 4.2, е сума от първи тип. Можем да разглеждаме и W_1 като сума от първи тип, тъй като множителят $\log l$ се отстранява посредством преобразование на Абел. Що се отнася до W_3 — очевидно това е сума от втори тип.

В сумата W_2, зададена чрез (201), сумационната променлива d пробягва интервал значително по-дълъг отколкото в W_1 и това причинява известни неудобства. Затова е по-удачно да разделим W_2 на две части, както следва:

$$W_2 = W_2' + W_2'', \tag{204}$$

където

$$W_2' = \sum_{d \leq u} c(d) \sum_{\frac{N}{d} < l \leq \frac{N_1}{d}} e\left(h(dl)^\gamma\right), \tag{205}$$

$$W_2'' = \sum_{u < d \leq u^2} c(d) \sum_{\frac{N}{d} < l \leq \frac{N_1}{d}} e\left(h(dl)^\gamma\right). \tag{206}$$

Сега W_2' ще разглеждаме като сума от първи тип, а W_2'' — като сума от втори тип.

От (197), (199) и (204) следва

$$\Sigma_5(N, N_1) \leq \sum_{\nu=1}^{4} \mathcal{T}_\nu(N), \tag{207}$$

където $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ са приносите на W_1 и W_2', а $\mathcal{T}_3$ и $\mathcal{T}_4$ — съответно на W_2'' и W_3. По-точно, имаме

$$\mathcal{T}_1(N) = \sum_{h \leq M} \max_{N_1 \in [N, 2N]} |W_1|, \qquad \mathcal{T}_2(N) = \sum_{h \leq M} \max_{N_1 \in [N, 2N]} |W_2'|, \tag{208}$$

$$\mathcal{T}_3(N) = \sum_{h \leq M} \max_{N_1 \in [N, 2N]} |W_2''|, \qquad \mathcal{T}_4(N) = \sum_{h \leq M} \max_{N_1 \in [N, 2N]} |W_3|, \tag{209}$$

където M е определено с (187). Оттук и от (196) получаваме

$$\Sigma \ll \frac{x}{\log^2 x} + (\log x) \sum_{\nu=1}^{4} \mathcal{R}_\nu, \tag{210}$$

където

$$\mathcal{R}_\nu = \max_{\frac{x}{\log^4 x} \leq N \leq x^c} \left(N^{\gamma - 1} \mathcal{T}_\nu(N)\right), \qquad \nu = 1, 2, 3, 4. \tag{211}$$

4.9 Оценяване на сумите от първи тип

Да разгледаме сумата W_1, определена чрез (200). За да се освободим от множителя $\log l$ извършваме преобразование на Абел (Лема 2.1 (УАТЧ-1)). Тогава, ако положим

$$V(t) = \sum_{\frac{N}{d} < l \leq t} e\left(h(dl)^\gamma\right), \tag{212}$$

получаваме

$$W_1 = \sum_{d \leq u} \mu(d) \left(V\left(\frac{N_1}{d}\right) \log\ \left(\frac{N_1}{d}\right) - \int_{\frac{N}{d}}^{\frac{N_1}{d}} V(t)\ \frac{dt}{t} \right)$$

$$\ll \sum_{d \leq u}\ \left(\left| V\left(\frac{N_1}{d}\right)\right| (\log N)\ +\ \int_{\frac{N}{d}}^{\frac{N_1}{d}} |V(t)|\ \frac{dt}{t} \right)$$

$$\ll (\log x) \sum_{d \leq u}\ \max_{\frac{N}{d} \leq t \leq \frac{N_1}{d}} |V(t)|. \tag{213}$$

Аналогично, като използуваме (203) и (205) виждаме, че и сумата W_2' се оценява посредством израза в последния ред на горната формула.

Да оценим сумата $V(t)$, определена чрез (212), при условието $\frac{N}{d} \leq t \leq \frac{N_1}{d}$. Ако $t - \frac{N}{d} \geq 10$ използуваме теоремата на Ван-дер-Корпут (Теорема 4.16 (УАТЧ-1)). Ако означим

$$g(u) = h\, d^\gamma\, u^\gamma,$$

то имаме

$$g''(u) = \gamma(\gamma - 1) h\, d^\gamma\, u^{\gamma-2}$$

и при $\frac{N}{d} \leq u \leq t$ е изпълнено

$$|g''(u)| \asymp h\, d^\gamma (N/d)^{\gamma-2} = h\, d^2\, N^{\gamma-2}.$$

Следователно

$$V(t) \ll \frac{N}{d} \left(h\, d^2\, N^{\gamma-2}\right)^{\frac{1}{2}}\ +\ \left(h\, d^2\, N^{\gamma-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\ll N^{\frac{\gamma}{2}}\, h^{\frac{1}{2}}\ +\ N^{1-\frac{\gamma}{2}}\, h^{-\frac{1}{2}}\, d^{-1}. \tag{214}$$

Очевидно тази оценка е вярна и при $t - \frac{N}{d} < 10$.

От (213) и (214) получаваме оценка за W_1. По аналогичен начин оценяваме и W_2' и получаваме

$$W_1,\, W_2' \ll (\log x)^2\ \left(N^{\frac{\gamma}{2}}\, h^{\frac{1}{2}}\, u +\ N^{1-\frac{\gamma}{2}}\, h^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Тогава, като вземем предвид (208) виждаме, че

$$\mathcal{T}_1(N),\, \mathcal{T}_2(N) \ll (\log x)^2 \, \left(N^{\frac{\gamma}{2}} \, M^{\frac{3}{2}} \, u + \, N^{1-\frac{\gamma}{2}} \, M^{\frac{1}{2}} \right). \tag{215}$$

Избираме

$$u = N^{\eta}, \tag{216}$$

където

$$\frac{1}{3} < \eta < \gamma - \frac{1}{2}. \tag{217}$$

Да отбележим, че от (198) следва неравенството $\frac{1}{3} < \gamma - \frac{1}{2}$, откъдето виждаме, че е възможно числото η да бъде избрано по указания начин. Тогава, като използуваме (187), (211), (215) – (217), получаваме

$$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \ll \frac{x}{\log^3 x}. \tag{218}$$

4.10 Оценяване на сумите от втори тип и завършване на доказателството

Сега ще разгледаме сумите от втори тип W_3 и W_2'', определени съответно чрез (202) и (206). Всяка от тях се разделя на $O\,(\log N)$ суми от вида

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(D, D_1, L, L_1) = \sum_{\substack{D<d\leq D_1 \\ N<dl\leq N_1}} \sum_{L<l\leq L_1} \alpha(d)\, \beta(l)\, e\left(h(dl)^{\gamma}\right), \tag{219}$$

където

$$D < D_1 \leq 2D, \qquad L < L_1 \leq 2L, \tag{220}$$

като за сумите, получени от W_3, имаме $\alpha(d) = \tau(d)$, $\beta(l) = \Lambda(l)$, а за сумите получени от W_2'' съответно $\alpha(d) = c(d)$, $\beta(l) = 1$. Да отбележим, че и в двата случая величините $\alpha(d), \beta(l)$ са реални и удовлетворяват

$$\alpha(d) \ll d^{\varepsilon}, \quad \beta(l) \ll l^{\varepsilon}, \tag{221}$$

където $\varepsilon > 0$ е произволно малко.

По-нататък, като използуваме (219) и (220) виждаме, че в сумите $\mathcal{W}$, получени от W_3, величините D и L удовлетворяват

$$\frac{N}{4} \leq DL \leq 2N, \qquad \frac{u}{2} \leq D \leq \frac{2N}{u}, \tag{222}$$

докато за сумите $\mathcal{W}$, получени при разделянето на W_2'', имаме

$$\frac{N}{4} \leq DL \leq 2N, \qquad \frac{u}{2} \leq D \leq u^2. \tag{223}$$

От избора на u, определен чрез (216) и (217), следва, че $2Nu^{-1} \leq u^2$, следователно условията (222) са по-ограничителни от тези в (223). Така че, достатъчно е да оценим сумите $\mathcal{W}$, за които е изпълнено (223). Можем да считаме даже, че

$$\frac{N}{4} \leq DL \leq 2N, \qquad \frac{N^{\frac{1}{2}}}{2} \leq D \leq u^2. \tag{224}$$

Наистина, ако имаме сума $\mathcal{W}$, за която е изпълнено

$$\frac{N}{4} \leq DL \leq 2N, \qquad \frac{u}{2} \leq D < \frac{N^{\frac{1}{2}}}{2},$$

то, вследствие на (216) и (217), ще имаме

$$\frac{N^{\frac{1}{2}}}{2} < \frac{N}{4D} \leq L \leq \frac{2N}{D} \leq \frac{4N}{u} \leq u^2.$$

Отбелязваме също, че условията (221) за $\alpha(d)$ и $\beta(l)$ са еднотипни. Тогава ако разменим местата на сумационните променливи d и l, на параметрите D и L и съответно на D_1 и L_1 и, накрая, на коефициентите α и β, виждаме, че отново се получава сума $\mathcal{W}$ от вида (219), за параметрите D, D_1, L, L_1 на която са налице условията (220), (224), а величините $\alpha(d)$, $\beta(l)$ удовлетворяват (221). И така, оттук нататък ще оценяваме сумата $\mathcal{W}$, определена чрез (219), за която имаме (220), (221) и (224).

От (219) – (221) следва

$$\mathcal{W} \ll N^{\varepsilon} \sum_{D<d\leq 2D} \left| \sum_{L'<l\leq L''} \beta(l)\, e\left(h(dl)^{\gamma}\right) \right|,$$

където

$$L' = \max\left(L, \frac{N}{d}\right), \qquad L'' = \min\left(L_1, \frac{N_1}{d}\right). \tag{225}$$

Прилагаме неравенството на Коши и получаваме

$$|\mathcal{W}|^2 \ll N^{\varepsilon} D \sum_{D<d\leq 2D} \left| \sum_{L'<l\leq L''} \beta(l)\, e\left(h(dl)^{\gamma}\right) \right|^2. \tag{226}$$

Към вътрешната сума в горния израз прилагаме неравенството от Лема 4.3. Нека $H \in \mathbb{N}$ е параметър, за който ще считаме, че

$$H \leq \frac{L}{2}. \tag{227}$$

Намираме, че

$$\left| \sum_{L'<l\leq L''} \beta(l)\, e\left(h(dl)^{\gamma}\right) \right|^2 \leq \frac{2L}{H} \sum_{|r|<H} \left(1 - \frac{|r|}{H}\right) \sum_{L^*<l\leq L^{**}} \beta(l)\, \beta(l+r)\, e\left(h\, d^{\gamma} \left(l^{\gamma} - (l+r)^{\gamma}\right)\right),$$

където
$$L^* = \max\left(L', L'-r\right), \qquad L^{**} = \min\left(L'', L''-r\right).$$
Заместваме получената горна граница в (226), след което сменяме реда на сумирането. Като вземем също предвид (225) получаваме

$$|\mathcal{W}|^2 \ll N^\varepsilon \, \frac{DL}{H} \sum_{|r|<H} \left(1 - \frac{|r|}{H}\right) \sum_{\underline{L}<l\le\overline{L}} \beta(l)\,\beta(l+r) \sum_{\underline{D}<d\le\overline{D}} e\left(\varphi(d)\right), \tag{228}$$

където

$$\varphi(y) = h\, y^\gamma \left(l^\gamma - (l+r)^\gamma\right), \tag{229}$$

$$\underline{L} = \max\left(L, L-r\right), \qquad \overline{L} = \min\left(L_1, L_1-r\right), \tag{230}$$

$$\underline{D} = \max\left(D, \frac{N}{l}, \frac{N}{l+r}\right), \qquad \overline{D} = \min\left(2D, \frac{N_1}{l}, \frac{N_1}{l+r}\right). \tag{231}$$

В израза от дясната страна на (228) отделяме събираемите, за които $r = 0$ и, като вземем предвид (221), (230) и (231), получаваме

$$|\mathcal{W}|^2 \ll N^\varepsilon \, \frac{D^2L^2}{H} + N^\varepsilon \, \frac{DL}{H} \sum_{1\le|r|<H} \; \sum_{L<l\le2L} \left| \sum_{\underline{D}<d\le\overline{D}} e\left(\varphi(d)\right) \right|. \tag{232}$$

Ако $\overline{D} - \underline{D} \geq 10$ оценяваме сумата по d в последната формула с помощта на теоремата на Ван-дер-Корпут, дадена в Теорема 4.16 (УАТЧ-1). Тъй като за функцията от (229) имаме
$$\varphi''(y) = \gamma(\gamma-1)\, h\, y^{\gamma-2} \left(l^\gamma - (l+r)^\gamma\right),$$
то, като използуваме (227) и теоремата за средните стойности виждаме, че

$$|\varphi''(y)| \asymp h\, D^{\gamma-2}\, |r|\, L^{\gamma-1} \qquad \text{при} \qquad y \in [D, 2D].$$

Тогава имаме

$$\sum_{\underline{D}<d\le\overline{D}} e\left(\varphi(d)\right) \ll D\, \left(h\, D^{\gamma-2}\, |r|\, L^{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(h\, D^{\gamma-2}\, |r|\, L^{\gamma-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\ll h^{\frac{1}{2}}\, |r|^{\frac{1}{2}}\, D^{\frac{\gamma}{2}}\, L^{\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}} + h^{-\frac{1}{2}}\, |r|^{-\frac{1}{2}}\, D^{1-\frac{\gamma}{2}}\, L^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}. \tag{233}$$

Очевидно, последната оценка е вярна и при $\overline{D} - \underline{D} < 10$.

Заместваме израза от (233) в (232) и получаваме

$$|\mathcal{W}|^2 \ll N^\varepsilon \left(H^{-1}\, D^2\, L^2 \,+\, h^{\frac{1}{2}}\, H^{\frac{1}{2}}\, D^{1+\frac{\gamma}{2}}\, L^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{2}} \,+\, h^{-\frac{1}{2}}\, H^{-\frac{1}{2}}\, D^{2-\frac{\gamma}{2}}\, L^{\frac{5}{2}-\frac{\gamma}{2}}\right). \tag{234}$$

Трябва да изберем естественото число H така, че да е изпълнено (227), а изразът в скобите в горната формула да е колкото се може по-малък. Известна е обща лема, която помага в подобни случаи (виж Глава 2 от книгата [19]), но тук ще си послужим със следните елементарни съображения.

Обикновено при оценяването на експоненциални суми чрез теоремата на Ван-дер-Корпут (Теорема 4.16 от (УАТЧ-1)), второто събираемо от дясната страна на формула (252) от (УАТЧ-1) играе второстепенна роля. Поради това в настоящия случай ще изберем H така, че да минимизираме сумата от първите две събираеми в скобите във формула (234). Тъй като първото събираемо намалява, а второто расте при нарастването на H, то е желателно да изберем параметъра така, че тези събираеми да са приблизително равни. Да отбележим, че

$$t^{-1}\, D^2\, L^2 \, = \, t^{\frac{1}{2}}\, h^{\frac{1}{2}}\, D^{1+\frac{\gamma}{2}}\, L^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{2}} \tag{235}$$

при $t = t_0$, където

$$t_0 = h^{-\frac{1}{3}}\, D^{\frac{2}{3}-\frac{\gamma}{3}}\, L^{\frac{1}{3}-\frac{\gamma}{3}} \tag{236}$$

и тогава общата стойност на изразите от (235) е равна на $h^{\frac{1}{3}}\, D^{\frac{4}{3}+\frac{\gamma}{3}}\, L^{\frac{5}{3}+\frac{\gamma}{3}}$.

Използуваме, че $h \le M$, където M се определя от (187). Тогава, като вземем също предвид (216), (217) и (224), намираме

$$t_0 \ge M^{-\frac{1}{3}}\, (DL)^{\frac{1}{3}-\frac{\gamma}{3}}\, D^{\frac{1}{3}} \ge N^{\frac{1}{100}}.$$

От друга страна, ако изберем $H = [t_0]$, не е ясно дали ще е изпълнено условието (227). Поради това определяме

$$H = \min\left([L/4], [t_0]\right). \tag{237}$$

Тъй като при $\alpha, \beta > 0$ е изпълнено

$$\frac{1}{\min(\alpha,\beta)} = \max\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) \le \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \tag{238}$$

то като използуваме (236) и (237) намираме

$$H^{-1} D^2\, L^2 + h^{\frac{1}{2}}\, H^{\frac{1}{2}}\, D^{1+\frac{\gamma}{2}}\, L^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{2}} \ll L^{-1}\, D^2\, L^2 + \, t_0^{-1} D^2 L^2 + h^{\frac{1}{2}}\, t_0^{\frac{1}{2}}\, D^{1+\frac{\gamma}{2}}\, L^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{2}}$$

$$\ll D^2 L + h^{\frac{1}{3}}\, D^{\frac{4}{3}+\frac{\gamma}{3}}\, L^{\frac{5}{3}+\frac{\gamma}{3}}.$$

Ако H удовлетворява (237), то като вземем предвид (236) и (238) виждаме, че третото събираемо от израза в скобите в (234) е

$$\ll \frac{h^{-\frac{1}{2}}\, D^{2-\frac{\gamma}{2}}\, L^{\frac{5}{2}-\frac{\gamma}{2}}}{\left(\min(L, t_0)\right)^{\frac{1}{2}}} \ll h^{-\frac{1}{2}}\, D^{2-\frac{\gamma}{2}}\, L^{\frac{5}{2}-\frac{\gamma}{2}} \left(L^{-\frac{1}{2}} + t_0^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\ll h^{-\frac{1}{2}}\, D^{2-\frac{\gamma}{2}}\, L^{2-\frac{\gamma}{2}} + h^{-\frac{1}{3}}\, D^{\frac{5}{3}-\frac{\gamma}{3}}\, L^{\frac{7}{3}-\frac{\gamma}{3}}.$$

От горните формули и от (234) следва, че ако H е определено чрез (237), то

$$|\mathcal{W}|^2 \ll N^{\varepsilon}\left(D^2L + h^{\frac13}\,D^{\frac43+\frac{\gamma}{3}}\,L^{\frac53+\frac{\gamma}{3}} + h^{-\frac12}\,D^{2-\frac{\gamma}{2}}\,L^{2-\frac{\gamma}{2}} + h^{-\frac13}\,D^{\frac53-\frac{\gamma}{3}}\,L^{\frac73-\frac{\gamma}{3}}\right).$$

Сега използуваме (224) и, тъй като от тези формули следва също неравенството $L \ll N^{\frac12}$, то получаваме

$$\begin{aligned}|\mathcal{W}|^2 &\ll N^{\varepsilon}\left((DL)D + h^{\frac13}(DL)^{\frac43+\frac{\gamma}{3}}L^{\frac13} + h^{-\frac12}(DL)^{2-\frac{\gamma}{2}} + h^{-\frac13}(DL)^{\frac53-\frac{\gamma}{3}}L^{\frac23}\right)\\ &\ll N^{\varepsilon}\left(Nu^2 + h^{\frac13}\,N^{\frac43+\frac{\gamma}{3}+\frac16} + h^{-\frac12}\,N^{2-\frac{\gamma}{2}} + h^{-\frac13}\,N^{2-\frac{\gamma}{3}}\right)\\ &\ll N^{\varepsilon}\left(Nu^2 + h^{\frac13}\,N^{\frac32+\frac{\gamma}{3}}\right).\end{aligned}$$

Тогава при $h \le M$ имаме

$$\mathcal{W} \ll N^{\varepsilon}\left(N^{\frac12}\,u + M^{\frac16}\,N^{\frac34+\frac{\gamma}{6}}\right)$$

и, като използуваме (187) и (216), получаваме

$$\mathcal{W} \ll N^{\varepsilon}\left(N^{\frac12+\eta} + N^{\frac{11}{12}}\right).$$

Видяхме, че всяка от сумите от втори тип W_2'' и W_3 се разлага на $O(\log N)$ суми от вида $\mathcal{W}$. Тогава от горната оценка следва

$$W_2'',\ W_3 \ll N^{\varepsilon}\left(N^{\frac12+\eta} + N^{\frac{11}{12}}\right).$$

Остава да се възползуваме от горните оценки и от (132), (187), (209), (211) и (217) и виждаме, че

$$\mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4 \ll \frac{x}{\log^3 x}. \tag{239}$$

От (210), (218) и (239) следва

$$\Sigma \ll \frac{x}{\log^2 x}.$$

Като вземем предвид (159) и (169), получаваме асимптотичната формула (133), с което Теорема 4.1 е доказана.

$\square$

5 Теорема на Хули за делителите за квадратичен полином

5.1 Увод и формулировка на теоремата

Проблемът на Дирихле за делителите се състои в намиране на (колкото се може по-точна) асимптотична формула за сумата

$$L(x) = \sum_{n \le x} \tau(n),$$

където $\tau(n)$ е броя на делителите на n. Както видяхме в четвърта глава на УАТЧ-1, чрез елементарни разсъждения се вижда, че

$$L(x) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \Delta_L(x),$$

където γ е константата на Ойлер, а $\Delta_L(x) = O\left(\sqrt{x}\right)$. Използването на нетривиални оценки за експоненциални суми, като теоремата на Ван-дер-Корпут (Теорема 4.16 (УАТЧ-1)), води до намирането на по-добри оценки за остатъчния член. Например, според теоремата на Вороной и Серпински (Теорема 4.5 (УАТЧ-1)) е вярна оценката $\Delta_L(x) = O\big(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\big)$ за произволно $\varepsilon > 0$. Известни са и по-точни оценки за $\Delta_L(x)$.

Естествено обобщение задачата на Дирихле е изследването и, евентуално, намирането на асимптотична формула за сума от вида

$$\sum_{n \le x} \tau(a_n), \tag{240}$$

където

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \dots$$

е дадена редица от естествени числа. Оказва се, че дори за просто устроени редици тази задача е трудна.

В настоящата глава ще считаме, че $a_n = n^2 + 1$ и ще получим асимптотична формула за сума от вида (240), при това със сравнително добра оценка за остатъчния член. С помощта на подобен метод може да се получи аналогичен резултат и за редица от вида $a_n = f(n)$, където $f \in \mathbb{Z}[x]$ е неразложим над $\mathbb{Q}$ полином от втора степен с положителен старши коефициент. Ще отбележим обаче, че ако f е полином от трета или по-висока степен, то в настоящия момент съществуването на подобна асимптотична формула за съответната сума (240) не е доказано.

Означаваме

$$S(x) = \sum_{n \le x} \tau\left(n^2 + 1\right). \tag{241}$$

Както ще се убедим по-нататък, чрез елементарен метод се установява следната асимптотичната формула

$$S(x) = \frac{3}{\pi} x \log x + O\left(x\right). \tag{242}$$

Нашата цел е да установим по-точен резултат, като докажем следната

Теорема 5.1 (К. Хули). *В сила е асимптотичната формула*

$$S(x) = \frac{3}{\pi} x \log x + cx + O\left(x^{\frac{7}{8}+\varepsilon}\right), \tag{243}$$

където c е константа, а числото $\varepsilon > 0$ е произволно малко.

Тази теорема е доказана в по-общ случай (за редицата $n^2 + a$, където $a \in \mathbb{N}$ е константа) от К. Хули [22] през 1963 г. и методът за нейното доказателство е използуван за решаването на много други задачи от аналитичната теория на числата. С помощта на по-сложни методи оценката за остатъчния член в (243) може да бъде подобрена. Най-добрия резултат в това направление е получен през 1984 г. от Биковски [1] — с константа в показателя $\frac{2}{3}$ вместо $\frac{7}{8}$.

5.2 Суми на Клостерман

Основен момент в доказателството на Теорема 5.1 е използуването на нетривиална оценка за *сумата на Клостерман* $K(q; a, b)$, която се определя чрез равенството

$$K(q; a, b) = \sum_{\substack{1 \le n \le q \\ (n,q)=1}} e\left(\frac{an + b\overline{n}}{q}\right). \tag{244}$$

Тук считаме, че $q \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ и, че $\overline{n}$ е обратният елемент на n по модул q, т.е. решение на сравнението $\overline{n}n \equiv 1 \pmod q$. (Да отбележим, че при $(n, q) = 1$ това сравнение е разрешимо вследствие на Лема 3.57 (УАТЧ-1)).

Сумата (244) е въведена от Клостерман [24] през 1926 г. и по-късно е изследвана от много математици. Един от най-важните резултати, отнасящи се до нея, е следната

Теорема 5.2 (А. Вейл). *Нека $q \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогава е изпълнено неравенството*

$$|K(q; a, b)| \le \tau(q)\, q^{\frac{1}{2}}\, (q, a, b)^{\frac{1}{2}}, \tag{245}$$

където (q, a, b) е най-големият общ делител на q, a, b.

В най-трудния сличай (когато q е просто число) тази теорема е доказана през 1948 г. от А. Вейл [30] чрез използуването на методите на алгебричната геометрия. Доказателството в общия случай е завършено от Естерман [17] през 1961 г. с помощта на елементарни средства. Напълно елементарно доказателство на Теорема 5.2 е намерено през 1969 г. от Степанов [12].

За да придобием представа за силата на оценката (245) ще отбележим, че от определението (244) и от неравенството на триъгълника следва

$$|K(q; a, b)| \le \varphi(q), \tag{246}$$

където $\varphi(q)$ е функцията на Ойлер. Като вземем предвид оценките за $\tau(q)$ и $\varphi(q)$, приведени съответно в Лема 3.33 и Лема 5.15 (УАТЧ-1), виждаме че оценката (245) е по-силна от тривиалната оценка (246), ако (q, a, b) е малко в сравнение с q.

Теорема 5.2 играе основна роля и при решаването на много други задачи се счита, че е един от основните резултати в съвремената теория на числата. В настоящите записки няма да привеждаме доказателство на тези теорема, но в Глава 7 ще изложим някои елементарни, но нетривиални, резултати, отнасящи се до сумата (244) и до подобни суми.

В доказателството на теоремата ще видим, че извеждането на асимптотична формула за $S(x)$, по-точна от тази в (242), се свежда до задачата за оценяване на така наречените *непълни суми на Клостерман*, т.е. суми от вида

$$S_{\xi_1,\xi_2}(q;b)=\sideset{}{^*}\sum_{\xi_1<n\le\xi_2} e\left(\frac{b\,\overline{n}}{q}\right), \tag{247}$$

където

$$q\in\mathbb{N},\qquad b\in\mathbb{Z},\qquad \xi_1,\xi_2\in\mathbb{R},\qquad 0<\xi_1<\xi_2<q, \tag{248}$$

а $\sum^*$ означава, че сумирането е по числа взаимно продти с q.

Ще проверим, че от Теорема 5.2 лесно се получава следната

Лема 5.3. *За сумата* (247)*, параметрите на която удовлетворяват* (248)*, е изпълнено*

$$S_{\xi_1,\xi_2}(q;b)\ll q^{\frac12+\varepsilon}(q,b)^{\frac12}, \tag{249}$$

където (q,b) *е най-големият общ делител на* q *и* b*,* $\varepsilon>0$ *е произволно малко и константата в знака* $\ll$ *зависи само от* ε*.*

Доказателство. При $q=1$ твърдението е очевидно. Нека разгледаме случая $q>1$. Означаваме с S сумата от (247) и я записваме във вида

$$S=\sideset{}{^*}\sum_{1\le n\le q} e\left(\frac{b\overline{n}}{q}\right)\sum_{\substack{\xi_1<m\le\xi_2\\ m\equiv n\ (q)}}1.$$

(Да припомним, че за улеснение пишем $m\equiv n\ (q)$ вместо $m\equiv n\pmod q$).

Тогава, като използваме Лема 4.9 (6) (УАТЧ-1), виждаме, че

$$S=\sideset{}{^*}\sum_{1\le n\le q} e\left(\frac{b\overline{n}}{q}\right)\sum_{\xi_1<m\le\xi_2}\frac1q\sum_{-\frac q2<k\le\frac q2} e\left(\frac{k(n-m)}{q}\right).$$

Сменяме реда на сумиране и получаваме

$$S=\frac1q\sum_{-\frac q2<k\le\frac q2}\left(\sum_{\xi_1<m\le\xi_2} e\left(-\frac{km}{q}\right)\right)\sideset{}{^*}\sum_{1\le n\le q} e\left(\frac{kn+b\overline{n}}{q}\right). \tag{250}$$

Оценяваме сумата по m в дясната страна на равенство (250), като използваме Лема 4.10 (УАТЧ-1) и виждаме, че

$$\left|\sum_{\xi_1<m\le\xi_2} e\left(-\frac{km}{q}\right)\right|\ll\min\left(q,\frac{1}{\parallel\frac kq\parallel}\right)\ll\begin{cases} q & \text{ако}\quad k=0,\\ q\,|k|^{-1} & \text{ако}\quad 1\le|k|\le\frac q2.\end{cases} \tag{251}$$

Ясно е, че сумата по n в дясната страна на (250) съвпада със сумата на Клостерман $K(q;k,b)$. Като използуваме неравенството (245) от Теорема 5.2, получаваме

$$|K(q;k,b)| \ll \tau(q)\, q^{\frac{1}{2}} (q,b)^{\frac{1}{2}}. \tag{252}$$

От (250) – (252) и от Леми 2.6 (3) и 3.33 (УАТЧ-1) следва

$$S \ll \tau(q)\, q^{\frac{1}{2}}\, (q,b)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{1\le |k| \le \frac{q}{2}} \frac{1}{q}\right) \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\, (q,b)^{\frac{1}{2}}.$$

Получихме (249), с което лемата е доказана.

□

5.3 Начало на доказателството на Теорема 5.1

Очевидно за всяко $m \in \mathbb{N}$ имаме

$$\tau(m) = 2 \sum_{\substack{d|m \\ d<\sqrt{m}}} 1 + \delta_n, \qquad \delta_n = \begin{cases} 1 & \text{ако} \quad m = k^2, \quad k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases} \tag{253}$$

Тогава, като използуваме (241) и като забележим, че n^2+1 не е точен квадрат на цяло число при $n \in \mathbb{N}$, получаваме

$$S(x) = 2 \sum_{n \le x} \sum_{\substack{d|n^2+1 \\ d<\sqrt{n^2+1}}} 1 = 2 \sum_{d<\sqrt{x^2+1}} \sum_{\substack{\sqrt{d^2-1}<n\le x \\ n^2+1\equiv 0\ (d)}} 1. \tag{254}$$

Лесно се вижда, че $\sqrt{x^2+1} - x \le \frac{1}{2x}$, следователно интервалът $\left(x, \sqrt{x^2+1}\right)$ съдържа най-много едно цяло число d. За тази изключителна стойност на d, ако съществува такава, има най-много едно n, удовлетворяващо условията на вътрешната сума в дясната страна на (254). Тогава в сумата по d в дясната страна на (254) условието $d < \sqrt{x^2+1}$ може да бъде заменено с $d \le x$, като грешката, която се появява, е ограничена. След тази процедура в сумата по n заменяме условието $\sqrt{d^2-1} < n$ с условието $d < n$ и получаваме

$$S(x) = 2 \sum_{d \le x} \sum_{\substack{d<n\le x \\ n^2+1\equiv 0\ (d)}} 1 + O(1). \tag{255}$$

Наистина, ако $d > 1$, то при тази замяна вътрешната сума не се променя, тъй като d е единственото цяло число в интервала $\left(\sqrt{d^2-1}, d\right]$, а при $n = d > 1$ не е изпълнено сравнението $n^2+1 \equiv 0 \pmod d$. Ако пък $d = 1$ то вътрешната сума се променя с 1.

За всяко $d \in \mathbb{N}$ въвеждаме множеството

$$\mathcal{L}_d = \left\{\; l \in \mathbb{N} \;:\; 1 \le l \le d, \;\; l^2+1 \equiv 0 \pmod d \;\right\} \tag{256}$$

и означаваме с $\beta(d)$ мощността му:

$$\beta(d) = \#\mathcal{L}_d. \tag{257}$$

Тогава от (255) следва

$$S(x) = 2\sum_{d\le x}\left(\sum_{\substack{n\le x\\ n^2+1\equiv 0\ (d)}} 1 - \beta(d)\right) + O(1) = 2S_1 - 2S_2 + O(1), \tag{258}$$

където

$$S_1 = \sum_{d\le x}\sum_{\substack{n\le x\\ n^2+1\equiv 0\ (d)}} 1, \tag{259}$$

$$S_2 = \sum_{d\le x}\beta(d). \tag{260}$$

Да разгледаме S_1. Разделяме сумата по n в дясната страна на (259) на части съобразно остатъка на n по модул d. Като вземем предвид (256) виждаме, че

$$S_1 = \sum_{d\le x}\sum_{l\in\mathcal{L}_d}\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l\ (d)}} 1.$$

Сега използуваме очевидните равенства

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l\ (d)}} 1 = \left[\frac{x-l}{d}\right] - \left[\frac{-l}{d}\right] = \frac{x}{d} + \rho\left(\frac{x-l}{d}\right) - \rho\left(\frac{-l}{d}\right), \tag{261}$$

където $[t]$ е цялата част на t и $\rho(t) = \frac{1}{2} - \{t\}$ и, като имаме предвид (257), получаваме

$$S_1 = \sum_{d\le x}\left(\frac{\beta(d)}{d}x + \sum_{l\in\mathcal{L}_d}\rho\left(\frac{x-l}{d}\right) - \sum_{l\in\mathcal{L}_d}\rho\left(\frac{-l}{d}\right)\right). \tag{262}$$

Ще установим, че

$$\sum_{l\in\mathcal{L}_d}\rho\left(\frac{-l}{d}\right) = 0 \qquad \text{при} \qquad d > 2. \tag{263}$$

За да се убедим в това, първо използуваме определението (256) и проверяваме, че при $d > 2$ в сумата по $l \in \mathcal{L}_d$ в (263) няма събираеми, отговарящи на $l = d$ и $l = \frac{d}{2}$. Тогава получаваме

$$\sum_{l\in\mathcal{L}_d}\rho\left(\frac{-l}{d}\right) = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2,$$

където

$$\mathcal{U}_1 = \sum_{\substack{1\le l<\frac{d}{2} \\ l^2+1\equiv 0\ (d)}} \rho\left(\frac{-l}{d}\right), \qquad \mathcal{U}_2 = \sum_{\substack{\frac{d}{2}<l\le d-1 \\ l^2+1\equiv 0\ (d)}} \rho\left(\frac{-l}{d}\right).$$

Но при $1 \le l < \frac{d}{2}$ имаме $-\frac{1}{2} < -\frac{l}{d} < 0$, следователно

$$\rho\left(\frac{-l}{d}\right) = \frac{1}{2} - \left\{\frac{-l}{d}\right\} = -\frac{1}{2} + \frac{l}{d},$$

откъдето

$$\mathcal{U}_1 = \sum_{\substack{1\le l<\frac{d}{2} \\ l^2+1\equiv 0\ (d)}} \left(\frac{l}{d} - \frac{1}{2}\right).$$

От друга страна, имаме

$$\mathcal{U}_2 = \sum_{\substack{1\le m<\frac{d}{2} \\ (d-m)^2+1\equiv 0\ (d)}} \rho\left(\frac{-(d-m)}{d}\right) = \sum_{\substack{1\le m<\frac{d}{2} \\ m^2+1\equiv 0\ (d)}} \rho\left(\frac{m}{d}\right) = \sum_{\substack{1\le l<\frac{d}{2} \\ l^2+1\equiv 0\ (d)}} \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{d}\right).$$

Следователно $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = 0$, с което доказателството на (263) е завършено.

От (262) и (263) следва

$$S_1 = xS_3 + \Sigma + O(1), \tag{264}$$

където

$$S_3 = \sum_{d\le x} \frac{\beta(d)}{d}, \tag{265}$$

$$\Sigma = \sum_{d\le x} \sum_{l\in\mathcal{L}_d} \rho\left(\frac{x-l}{d}\right). \tag{266}$$

Сега, като използваме (258) и (264), получаваме

$$S(x) = 2xS_3 - 2S_2 + 2\Sigma + O(1). \tag{267}$$

5.4 Асимптотични формули за S_2 и S_3

В настоящия параграф ще намерим асимптотични формули за сумите S_2 и S_3, определени чрез (260) и съответно (265).

Разглеждаме първо S_2. Ще използваме Лема 3.64 (УАТЧ-1), според която за величината $\beta(d)$, определена от (257) е изпълнено

$$\beta(d) = \sum_{\substack{u^2+v^2=d \\ u,v\in\mathbb{N} \\ (u,v)=1}} 1 \qquad \text{при} \qquad d > 1.$$

Тогава имаме

$$S_2 = \sum_{1<d\le x} \beta(d) + O(1) = \frac{1}{4}\, K^*(x) + O(1), \tag{268}$$

където

$$K^*(x) = \#\left\{ \langle u, v\rangle \in \mathbb{Z}^2 \ :\ 0 < u^2+v^2 \le x,\ (u,v)=1 \right\}.$$

Ще изразим $K^*(x)$ посредством величината

$$K(x) = \#\left\{ \langle u, v\rangle \in \mathbb{Z}^2 \ :\ u^2+v^2 \le x,\ \right\}, \tag{269}$$

която е изследвана в Глава 4 (УАТЧ-1). Според Теорема 4.1 (УАТЧ-1) имаме

$$K(x) = \pi x + O\left(\sqrt{x}\,\right). \tag{270}$$

Използуваме основното свойство на функцията на Мьобиус $\mu(n)$, формулирано в Лема 3.34 (УАТЧ-1), и намираме

$$K^*(x) = \sum_{0<u^2+v^2\le x} \ \sum_{t|(u,v)} \mu(t) = \sum_{t\le\sqrt{x}} \mu(t) \sum_{\substack{0<u^2+v^2\le x \\ u\equiv 0\ (t) \\ v\equiv 0\ (t)}} 1 = \sum_{t\le\sqrt{x}} \mu(t) \sum_{0<u^2+v^2\le \frac{x}{t^2}} 1.$$

Тогава от (269), (270), както и от разсъжденията, приведени в доказателството на Лема 3.61 (УАТЧ-1), получаваме

$$K^*(x) = \sum_{t\le\sqrt{x}} \mu(t) \left(K\left(\frac{x}{t^2}\right) + O(1) \right) = \sum_{t\le\sqrt{x}} \mu(t) \left(\pi\, \frac{x}{t^2} + O\left(\sqrt{\frac{x}{t^2}}\, \right) \right)$$

$$= \pi x \sum_{t\le\sqrt{x}} \frac{\mu(t)}{t^2} + O\left(\sqrt{x}\,\log x\right) = \pi x \left(\frac{6}{\pi^2} + O\left(x^{-\frac{1}{2}} \right) \right) + O\left(\sqrt{x}\,\log x\right)$$

$$= \frac{6}{\pi} x + O\left(\sqrt{x}\,\log x\right). \tag{271}$$

Тук ще отбележим, че използването на по-точен вариант на асимптотичната формула (270), например този от Теорема 4.2 (УАТЧ-1), води само до оценка $O\left(\sqrt{x}\,\right)$ за остатъчния член във формула (271) за $K^*(x)$. Проверката на този факт оставяме на читателя.

От (268) и (271) получаваме

$$S_2 = \frac{3}{2\pi} x + \Theta(x), \qquad \Theta(x) = O\left(\sqrt{x}\,\log x\right). \tag{272}$$

Сега да разгледаме сумата S_3, определена чрез (265). Използуваме асимптотичната формула (272) и преобразованието на Абел (Лема 2.1 (УАТЧ-1)) и получаваме

$$S_3 = \frac{1}{x}\sum_{d\le x}\beta(d) + \int\limits_1^x \sum_{d\le u}\beta(d)\,\frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{3}{2\pi} + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log x\right) + \int\limits_1^x \left(\frac{3}{2\pi}u + \Theta(u)\right)\frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{3}{2\pi}\log x + \frac{3}{2\pi} + c_0 + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log x\right) - \int\limits_x^\infty \frac{\Theta(u)}{u^2}\,du,$$

където

$$c_0 = \int\limits_1^\infty \frac{\Theta(u)}{u^2}\,du. \tag{273}$$

Като се използува оценката $\Theta(x)$, дадена в (272), лесно се вижда, че

$$\int\limits_x^\infty \frac{\Theta(u)}{u^2}\,du \ll x^{-\frac{1}{2}}\log x$$

(проверката оставяме на читателя). Тогава имаме

$$S_3 = \frac{3}{2\pi}\log x + \frac{3}{2\pi} + c_0 + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log x\right). \tag{274}$$

От (267), (272) и (274) следва

$$S(x) = \frac{3}{\pi}x\log x + 2c_0\,x + 2\Sigma + O\left(\sqrt{x}\,\log x\right). \tag{275}$$

Да отбележим, че ако за сумата Σ, определена чрез (266), използуваме тривиалната оценка

$$\Sigma \ll \sum_{d\le x}\beta(d) \ll x,$$

то от (275) следва асимптотичната формула (242). За да установим по-силната асимптотична формула (243) остава да проверим, че е в сила оценката

$$\Sigma \ll x^{\frac{7}{8}+\varepsilon}. \tag{276}$$

Това е най-съществената част от доказателството на Теорема 5.1.

5.5 Нова приближена формула за $\rho(t)$

Когато изследваме изрази, съдържащи функцията $\rho(t)$, често използваме Леми 4.11 и 4.12 (УАТЧ-1). Да отбележи, че функцията $\min\left(1, \frac{1}{M\|t\|}\right)$, която развиваме в ред на Фурие в Лема 4.12 (УАТЧ-1), не е навсякъде диференцируема и затова съответният ѝ ред на Фурие не е много бързо сходящ.

Тази пречка не беше съществена, когато в предишните глави изследвахме изрази, съдържащи $\rho(t)$, но в настоящия случай тя ще причинява по-сериозни неудобства. Затова тук вместо Лема 4.12 (УАТЧ-1) ще се възползуваме от лема от статията на автора [27]. В нея остатъчният член във формулата за $\rho(t)$ се изразява с помощта на достатъчно гладка функция и поради това нейният ред на Фурие вече е бързо сходящ.

Лема 5.4. *Нека $M \in \mathbb{R}$, $M \geq 2$. Съществува функция $g_M(t)$, дефинирана за всяко $t \in \mathbb{R}$, която притежава следните свойства.*

(1) *$g_M(t)$ е периодична с период 1 по отношение на t,*

(2) *$g_M(t)$ е положителна и безбройно много пъти диференцируема по отношение на t,*

(3) *$g_M(t)$ се развива в ред на Фурие*

$$g_M(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_M(n) e(nt), \tag{277}$$

като коефициентите удовлетворяват условията

$$(i) \qquad |c_M(n)| \leq 8 \, \frac{\log M}{M} \qquad \textit{за всяко} \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{278}$$

$$(ii) \qquad \sum_{|n| > M^{1+\varepsilon}} |c_M(n)| \ll_{A,\varepsilon} M^{-A} \qquad \textit{за всеки} \quad A > 1, \ \varepsilon \in (0,1). \tag{279}$$

(4) *В сила е формулата*

$$\rho(t) = \sum_{0 < |n| \leq M} \frac{e(nt)}{2\pi i n} + O\left(g_M(t)\right), \tag{280}$$

като константата в знака O е абсолютна.

Да отбележим, че в приложенията на тази лема числото A се избира много голямо, а за ε се счита, че е близко до нулата. Тогава редът на Фурие на функцията $g_M(t)$ е толкова бързо сходящ, че практически не се отличава от крайна сума.

Доказателство. Да вземем функция $\omega(t)$, която е дефинирана и безбройно много пъти диференцируема за всяко t и която притежава свойствата

$$\omega(t) > 0 \ \text{ при } \ t \in (-1,1), \qquad \omega(t) = 0 \ \text{ при } \ t \notin (-1,1), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(t)\, dt = 1.$$

Съществуването на такава функция е добре известен факт от анализа.

За произволно $\lambda > 0$ полагаме

$$\omega_\lambda(t) = \lambda^{-1}\omega\left(\lambda^{-1}t\right). \tag{281}$$

Непосредствено се проверява, че $\omega_\lambda(t)$ е безбройно много пъти диференцируема за всяко t, като е изпълнено

$$\omega_\lambda(t) > 0 \ \text{ при } \ t \in (-\lambda,\lambda), \qquad \omega_\lambda(t) = 0 \ \text{ при } \ t \notin (-\lambda,\lambda), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_\lambda(t)\, dt = 1. \tag{282}$$

При $M \geq 2$, $\lambda > 0$ определяме функцията

$$G_{M,\lambda}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \min\left(1, \frac{1}{M||u||}\right) \omega_\lambda(t-u)\, du. \tag{283}$$

Очевидно тя приема положителна стойност и е безбройно много пъти диференцируема за всяко t. Посредством смяна на променливата тази функция може да се представи във вида

$$G_{M,\lambda}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \min\left(1, \frac{1}{M||t-u||}\right) \omega_\lambda(u)\, du. \tag{284}$$

Оттук следва, че $G_{M,\lambda}(t)$ е периодична с период 1 по отношение на t.

От горните съображения виждаме, че за всяко t нашата функция се развива в ред на Фурие

$$G_{M,\lambda}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{M,\lambda}(n)\, e(nt)$$

с коефициенти

$$\delta_{M,\lambda}(n) = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_{M,\lambda}(t)\, e(-nt)\, dt. \tag{285}$$

От (284), (285) и от познатите теореми от теорията на интегрирането следва

$$\delta_{M,\lambda}(n) = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e(-nt) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \min\left(1, \frac{1}{M||t-u||}\right) \omega_\lambda(u)\, du\, dt$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_\lambda(u)\, e(-nu) \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \min\left(1, \frac{1}{M||t-u||}\right) e(-n(t-u))\, dt\, du. \tag{286}$$

Да разгледаме вътрешния интеграл от последната формула. Извършваме смяна на променливата $t_1 = t - u$ и виждаме, че той е равен на

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}-u}^{\frac{1}{2}-u} \min\left(1, \frac{1}{M||t_1||}\right) e(-nt_1)\, dt_1. \tag{287}$$

Тъй като подинтегралната функция в (287) е периодична с период 1, интегрирането може да се вземе по кой да е интервал с дължина единица, например по $t_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Тогава, като вземем предвид разлагането на функцията $\min\left(1, \frac{1}{M||t||}\right)$ в ред на Фурие (виж Лема 4.12 (УАТЧ-1)), виждаме, че интегралът (287) съвпада с коефициента на Фурие $b_M(n)$ на тази функция. От тези съображения и от (286) следва, че

$$\delta_{M,\lambda}(n) = b_M(n) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_\lambda(u)\, e(-nu)\, du. \tag{288}$$

Както е известно от Лема 4.12 (УАТЧ-1), имаме

$$|b_M(n)| \le \begin{cases} \frac{4\log M}{M} & \text{при} \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{M}{n^2} & \text{при} \quad n \in \mathbb{Z},\ n \ne 0. \end{cases} \tag{289}$$

Тогава от (282), (288) и (289) получаваме

$$|\delta_{M,\lambda}(n)| \le |b_M(n)| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_\lambda(u)\, du \le \frac{4\log M}{M}. \tag{290}$$

Нека $n \ne 0$. Да разгледаме интеграла от формула (288). Като вземем предвид (281) и направим смяна на променливата, получаваме

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_\lambda(u)\, e(-nu)\, du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^{-1}\, \omega(\lambda^{-1}u)\, e(-nu)\, du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(v) e(-n\lambda v)\, dv.$$

Сега, като внесем експонентата под знака на диференциала и интегрираме по части, виждаме, че нашият интеграл е равен на

$$-(2\pi i n\lambda)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega(v)\,de(-n\lambda v)=(2\pi i n\lambda)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega'(v)e(-n\lambda v)\,dv.$$

Повтаряме описаната процедура k пъти, където $k\in\mathbb{N}$ е произволно, и получаваме

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_\lambda(u)\,e(-nu)\,du=(2\pi i n\lambda)^{-k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega^{(k)}(v)e(-n\lambda v)\,dv.$$

Оттук следва, че за всеки $k\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$ имаме

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_\lambda(u)\,e(-nu)\,du\right|\le(2\pi|n|\lambda)^{-k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\omega^{(k)}(v)\right|\,dv\ll_k|n|^{-k}\lambda^{-k}. \tag{291}$$

Като използваме (288), (289) и (291), намираме, че

$$\delta_{M,\lambda}(n)\ll_k\frac{\log M}{M}\,|n|^{-k}\,\lambda^{-k}\ll_k|n|^{-k}\,\lambda^{-k}\qquad\text{при}\quad n\neq 0. \tag{292}$$

Да предположим, че $k\ge 2$ и $D\ge 2$. Тогава от Лема 2.6 (2) (УАТЧ-1) и от (292) следва

$$\sum_{|n|>D}|\delta_{M,\lambda}(n)|\ll_k\lambda^{-k}\,D^{1-k}.$$

Сега прилагаме горната оценка при $D=M^{1+\varepsilon}$ и получаваме

$$\sum_{|n|>M^{1+\varepsilon}}|\delta_{M,\lambda}(n)|\ll_k\lambda^{-k}\,M^{(1+\varepsilon)(1-k)}. \tag{293}$$

Ще изберем параметрите λ и k по подходящ начин като функции на $M\ge 2$, $\varepsilon\in(0,1)$ и $A>1$. Оттук нататък считаме, че

$$\lambda=\frac{1}{10M}\,,\qquad k=\left[\frac{A+10}{\varepsilon}\right] \tag{294}$$

и полагаме

$$g_M(t)=2\,G_{M,\lambda}(t). \tag{295}$$

Ще проверим, че тази функция удовлетворява условията на лемата

Вече разбрахме, че свойства (1) и (2) са изпълнени.

Да проверим, че е изпълнено (3). Ясно е, че $g_M(t)$ се развива в ред на Фурие (277) с коефициенти

$$c_M(t)=2\delta_{M,\lambda}(n), \tag{296}$$

където λ е зададено чрез (294). Тогава (278) е следствие от (290) и (296). Вярна е и оценката (279), тъй като от (293) – (296) следва

$$\sum_{|n|>M^{1+\varepsilon}} |c_M(n)| \le 2 \sum_{|n|>M^{1+\varepsilon}} |\delta_{M,\lambda}(n)| \ll_{A,\varepsilon} M^k \, M^{(1+\varepsilon)(1-k)} \ll_{A,\varepsilon} M^{2-\varepsilon k} \ll_{A,\varepsilon} M^{-A}.$$

Остава да проверим и свойство (4). От Лема 4.11 (УАТЧ-1) виждаме, че за да установим (280) е достатъчно да докажем неравенството

$$\min\left(1, \frac{1}{M||t||}\right) \le g_M(t). \tag{297}$$

Вследствие на (284) и (295) формула (297) е еквивалентна на

$$\min\left(1, \frac{1}{M||t||}\right) \le 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \min\left(1, \frac{1}{M||t-u||}\right) \omega_\lambda(u)\, du. \tag{298}$$

Но от третата формула в (282) следва

$$\min\left(1, \frac{1}{M||t||}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \min\left(1, \frac{1}{M||t||}\right) \omega_\lambda(u)\, du,$$

тъй че (298) е еквивалентно на

$$0 \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(2 \min\left(1, \frac{1}{M||t-u||}\right) - \min\left(1, \frac{1}{M||t||}\right)\right) \omega_\lambda(u)\, du. \tag{299}$$

От втората формула в (282) следва, че интегрирането в (299) може да бъде взето само по множеството $u \in [-\lambda, \lambda]$. Сега, като вземем предвид определенивто на λ дадено в (294), виждаме, че за да докажем (299) е достатъчно да проверим, че за произволно t е изпълнено

$$\min\left(1, \frac{1}{M||t||}\right) \le 2 \min\left(1, \frac{1}{M||t-u||}\right) \qquad \text{при} \qquad |u| \le (10M)^{-1}. \tag{300}$$

Доказателството на (300) се извършва, като се разглеждат няколко случая. Стандартната проверка предоставяме на читателя.

$\square$

5.6 Подготовка за оценяването на Σ

Започваме оценяването на сумата Σ. Използуваме определението и́ (266) и я разделяме на $O(\log x)$ подсуми от вида

$$\Sigma_1(D) = \sum_{D<d\le 2D} \sum_{l \in \mathcal{L}_d} \rho\left(\frac{x-l}{d}\right). \tag{301}$$

Тези от тях, за които $D \leq x^{\frac{7}{8}}$, оценяваме тривиално, т.е.

$$\Sigma_1(D) \ll \sum_{D<d\leq 2D} \beta(d) \ll D$$

(тук използувахме (257), (260) и (272)). Получаваме

$$\Sigma \ll (\log x) \left(x^{\frac{7}{8}} + \max_{x^{\frac{7}{8}} \leq D \leq x} |\, \Sigma_1(D)\, | \right). \tag{302}$$

Сега ще търсим нетривиална оценка за $\Sigma_1(D)$ при $x^{\frac{7}{8}} \leq D \leq x$. Нека M е параметър, който ще изберем по-късно. Засега считаме само, че

$$2 \leq M \leq x. \tag{303}$$

Прилагаме Лема 5.4 (4) и получаваме

$$\Sigma_1(D) = \sum_{D<d\leq 2D} \sum_{l\in\mathcal{L}_d} \left(\sum_{1\leq |n|\leq M} \frac{e\left(\frac{x-l}{d}n\right)}{2\pi i n} + O\left(g_M\left(\frac{x-l}{d}\right)\right)\right)$$

$$= \Sigma_2(D,M) + O\left(R(D,M)\right), \tag{304}$$

където

$$\Sigma_2(D,M) = \sum_{1\leq |n|\leq M} \frac{\Xi_n(D)}{2\pi i n}, \tag{305}$$

$$\Xi_n(D) = \sum_{D<d\leq 2D} e\left(\frac{xn}{d}\right) \sum_{l\in\mathcal{L}_d} e\left(-\frac{ln}{d}\right), \tag{306}$$

$$R(D,M) = \sum_{D<d\leq 2D} \sum_{l\in\mathcal{L}_d} g_M\left(\frac{x-l}{d}\right).$$

Разглеждаме първо $R(D,M)$. Прилагаме Лема 5.4 (3), както и определението (306) на $\Xi_n(D)$, и получаваме

$$R(D,M) = \sum_{D<d\leq 2D} \sum_{l\in\mathcal{L}_d} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_M(n)\, e\left(\frac{x-l}{d}n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_M(n)\, \Xi_n(D). \tag{307}$$

Да отбележим, че за всяко $n \in \mathbb{Z}$ е в сила тривиалната оценка

$$\Xi_n(D) \ll \sum_{D<d\leq 2D} \beta(d) \ll D \tag{308}$$

(отново използувахме (257), (260) и (272)). Нека

$$M_1 = M^{1+\varepsilon}, \tag{309}$$

където $\varepsilon > 0$ е произволно малко. Тогава от (278), (307) и (308) следва

$$R(D,M) \ll \frac{\log M}{M}|\Xi_0(D)| + \sum_{1\le|n|\le M_1} \frac{\log M}{M}|\Xi_n(D)| + \sum_{|n|>M_1} |c_M(n)||\Xi_n(D)|$$

$$\ll \frac{D\log M}{M} + \frac{\log M}{M} \sum_{1\le|n|\le M_1} |\Xi_n(D)| + D\sum_{|n|>M_1} |c_M(n)|$$

От (279) и (309) следва, че последното събираемо в горната формула е $\ll \frac{D}{M}$. Като използуваме също равенството $|\Xi_n(D)| = |\Xi_{-n}(D)|$ получаваме

$$R(D,M) \ll \frac{D\log M}{M} + \frac{\log M}{M} \sum_{1\le n\le M_1} |\Xi_n(D)|. \tag{310}$$

По-нататък, от (305) следва

$$\Sigma_2(D,M) \ll \sum_{1\le n\le M} \frac{|\Xi_n(D)|}{n}. \tag{311}$$

От (304) и (309) – (311) получаваме

$$\Sigma_1(D) \ll M^{2\varepsilon}\left(\frac{D}{M} + \sum_{1\le n\le M^{1+\varepsilon}} \frac{|\Xi_n(D)|}{n}\right). \tag{312}$$

5.7 Оценяване на $\Xi_n(D)$ и завършване на доказателството

Според Лема 3.64 (УАТЧ-1) при $d > 1$ съществува биекция σ между множеството

$$\mathcal{H}_d = \left\{\langle u,v\rangle \in \mathbb{N}^2 \ : \ u^2+v^2 = d,\ (u,v) = 1\right\}. \tag{313}$$

и множеството $\mathcal{L}_d$, определено чрез (256). При това, от доказателството на същата лема става ясно, че $\sigma : \mathcal{H}_d \to \mathcal{L}_d$ се определя като на елемента $\langle u,v\rangle \in \mathcal{H}_d$ съпоставим това $l \in \mathcal{L}_d$, за което

$$u \equiv lv \pmod d. \tag{314}$$

За да продължим по-нататък се нуждаем от следващата лема. При $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ въвеждаме означението $\alpha \equiv \beta \pmod 1$, ако е изпълнено $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$. Имаме

Лема 5.5. *Дадени са числата $A, B \in \mathbb{N}$, като $(A,B) = 1$. Нека $\overline{A_{(B)}}$ е обратният елемент на A по модул B, т.е. решение на $Ax \equiv 1 \pmod B$, и съответно нека $\overline{B_{(A)}}$ е обратният елемент на B по модул A. Тогава*

$$\frac{\overline{A_{(B)}}}{B} + \frac{\overline{B_{(A)}}}{A} \equiv \frac{1}{AB} \pmod 1. \tag{315}$$

Доказателство. Твърдението от формула (315) е еквивалентно на

$$A\,\overline{A_{(B)}} + B\,\overline{B_{(A)}} \equiv 1 \pmod{AB},$$

което, поради условието $(A, B) = 1$, е еквивалентно на системата

$$A\,\overline{A_{(B)}} + B\,\overline{B_{(A)}} \equiv 1 \pmod{A}, \qquad A\,\overline{A_{(B)}} + B\,\overline{B_{(A)}} \equiv 1 \pmod{B},$$

или, все едно, на системата

$$B\,\overline{B_{(A)}} \equiv 1 \pmod{A}, \qquad A\,\overline{A_{(B)}} \equiv 1 \pmod{B}.$$

Очевидно последните две сравнения са изпълнени, с което доказателството на (315) е завършено.

□

Лема 5.5 ни дава възможност да намерим удобен начин за изразяване на израза $\frac{l}{d}$, който участвува във формулата (306), определяща $\Xi_n(D)$. Така ние ще сведем оценяването на тази сума до оценяване на друга, по-проста от нея.

Нека при зададената по-горе биекция на $\langle u, v\rangle \in \mathcal{H}_d$ съответства $l = l_{u,v} \in \mathcal{L}_d$. Тогава от (306) следва

$$\Xi_n(D) = \sum_{D<d\le 2D} e\left(\frac{xn}{d}\right) \sum_{\langle u,v\rangle\in\mathcal{H}_d} e\left(-\frac{l_{u,v}}{d}n\right). \tag{316}$$

Тъй като е изпълнено сравнението (314), то имаме

$$l_{u,v} \equiv u\,\overline{v_{(d)}} \pmod{d}$$

и, като вземем предвид равенството $u^2 + v^2 = d$, получаваме

$$\frac{l_{u,v}}{d} \equiv u\,\frac{\overline{v_{(u^2+v^2)}}}{u^2+v^2} \pmod{1}. \tag{317}$$

Сега прилагаме Лема 5.5 и установяваме, че

$$\frac{\overline{v_{(u^2+v^2)}}}{u^2+v^2} \equiv \frac{1}{v(u^2+v^2)} - \frac{\overline{(u^2+v^2)_{(v)}}}{v} \equiv \frac{1}{v(u^2+v^2)} - \frac{\overline{(u^2)_{(v)}}}{v} \pmod{1}. \tag{318}$$

От (317) и (318) следва

$$\frac{l_{u,v}}{d} \equiv \frac{u}{v(u^2+v^2)} - \frac{u\,\overline{(u^2)_{(v)}}}{v} \pmod{1}$$

и, тъй като $u\,\overline{u_{(v)}} \equiv 1 \pmod{v}$, получаваме

$$\frac{l_{u,v}}{d} \equiv \frac{u}{v(u^2+v^2)} - \frac{\overline{u_{(v)}}}{v} \pmod{1}. \tag{319}$$

Прилагаме отново Лема 5.5 и намираме

$$\frac{\overline{u_{(v)}}}{v} \equiv \frac{1}{uv} - \frac{\overline{v_{(u)}}}{u} \pmod 1,$$

което заедно с (319) ни дава

$$\frac{l_{u,v}}{d} \equiv -\frac{v}{u(u^2+v^2)} + \frac{\overline{v_{(u)}}}{u} \pmod 1. \tag{320}$$

От (319) следва, че

$$e\left(-\frac{l_{u,v}}{d}\,n\right) = e\left(-\frac{n\,u}{v(u^2+v^2)} + \frac{n\,\overline{u_{(v)}}}{v}\right), \tag{321}$$

а от (320) получаваме

$$e\left(-\frac{l_{u,v}}{d}\,n\right) = e\left(\frac{n\,v}{u(u^2+v^2)} - \frac{n\,\overline{v_{(u)}}}{u}\right). \tag{322}$$

Използуваме (316) и разделяме сумата $\Xi_n(D)$, на две части, както следва:

$$\Xi_n(D) = \Xi_n'(D) + \Xi_n''(D). \tag{323}$$

Тук в $\Xi_n'(D)$ участват събираемите, за които $u < v$, а в $\Xi_n''(D)$ — събираемите, за които $u > v$. (Да отбележим, че при $d > 2$ няма събираеми, за които $u = v$).

За да изследваме сумата $\Xi_n'(D)$ прилагаме (321) и получаваме

$$\Xi_n'(D) = \sum_{D<d\le 2D} e\left(\frac{nx}{d}\right) \sum_{\substack{\langle u,v\rangle\in\mathcal{H}_d\\ u<v}} e\left(-\frac{nu}{v(u^2+v^2)} + \frac{n\,\overline{u_{(v)}}}{v}\right).$$

Сега, като вземем предвид определението (313) на $\mathcal{H}_d$, намираме

$$\Xi_n'(D) = \sum_{\substack{D<u^2+v^2\le 2D\\ 0<u<v\\ (u,v)=1}} e\left(\frac{nx}{u^2+v^2} - \frac{nu}{v(u^2+v^2)} + \frac{n\,\overline{u_{(v)}}}{v}\right) \tag{324}$$

Аналогично, ако използуваме (322), виждаме, че

$$\Xi_n''(D) = \sum_{\substack{D<u^2+v^2\le 2D\\ 0<v<u\\ (u,v)=1}} e\left(\frac{nx}{u^2+v^2} + \frac{nv}{u(u^2+v^2)} - \frac{n\,\overline{v_{(u)}}}{u}\right). \tag{325}$$

Да разгледаме $\Xi_n'(D)$. От (324) следва, че тази сума може да се запише във вида

$$\Xi_n'(D) = \sum_{\sqrt{\frac{D}{2}}<v\le\sqrt{2D}} \sum_{\substack{\xi_1(v)<u\le\xi_2(v)\\ (u,v)=1}} \lambda_{n,v}(u)\, e\left(\frac{n\,\overline{u_{(v)}}}{v}\right), \tag{326}$$

където

$$\xi_1(v) = \sqrt{\max\left(0, D - v^2\right)}, \qquad \xi_2(v) = \sqrt{\min\left(v^2, 2D - v^2\right)} \tag{327}$$

и

$$\lambda_{n,v}(u) = e\left(\frac{nx}{u^2+v^2} - \frac{nu}{v(u^2+v^2)}\right). \tag{328}$$

Сега ще оценим вътрешната сума в дясната страна на (326). За целта ще приложим преобразованието на Абел (Лема 2.1 (УАТЧ-1)) и ще изразим тази сума посредством непълни суми на Клостерман, определени чрез (247).

Полагаме

$$V_{n,v}(t) = \sum_{\substack{\xi_1(v) < u \le t \\ (u,v)=1}} e\left(\frac{n\,\overline{u_{(v)}}}{v}\right). \tag{329}$$

От (328) очевидно следва

$$\lambda_{n,v}(u) \ll 1. \tag{330}$$

Лесно се вижда също, че при $0 < u \le v$ е изпълнено

$$\frac{d}{du}\lambda_{n,v}(u) = \lambda_{n,v}(u)\,2\pi i n\left(\frac{-2ux}{\left(u^2+v^2\right)^2} - \frac{v^2-u^2}{v\left(u^2+v^2\right)^2}\right) \ll \frac{nx}{v^3} \tag{331}$$

От (327) следва, че $0 \le \xi_1(v) \le \xi_2(v) \le v$ и, като вземем предвид (329) – (331) и извършим преобразованието на Абел, получаваме

$$\Xi_n'(D) = \sum_{\sqrt{\frac{D}{2}} < v \le \sqrt{2D}} \left(\lambda_{n,v}\left(\xi_2(v)\right) V_{n,v}(\xi_2(v)) - \int\limits_{\xi_1(v)}^{\xi_2(v)} V_{n,v}(t)\left(\frac{d}{dt}\lambda_{n,v}(t)\right) dt\right)$$

$$\ll \sum_{\sqrt{\frac{D}{2}} < v \le \sqrt{2D}} \left(1 + \frac{nx}{v^2}\right) \max_{\xi_1(v) \le t \le \xi_2(v)} |V_{n,v}(t)|. \tag{332}$$

Сумата $V_{n,v}(t)$, определена чрез (329) е непълна сума на Клостерман и, като приложим Лема 5.3 получаваме

$$V_{n,v}(t) \ll v^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(v,n)^{\frac{1}{2}}.$$

Заместваме тази оценка в (332) и виждаме, че

$$\Xi_n'(D) \ll \sum_{\sqrt{\frac{D}{2}} < v \le \sqrt{2D}} \left(1 + \frac{nx}{v^2}\right) v^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(v,n)^{\frac{1}{2}} \ll x^{\varepsilon}\left(D^{\frac{1}{4}} + nxD^{-\frac{3}{4}}\right) \sum_{v \le \sqrt{2D}} (v,n)^{\frac{1}{2}}.$$

От (303) и от неравенството

$$\sum_{v \le \sqrt{2D}} (v,n)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{\delta \mid n} \delta^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{v \le \sqrt{2D} \\ v \equiv 0\ (\delta)}} 1 \ll D^{\frac{1}{2}} \sum_{\delta \mid n} \delta^{-\frac{1}{2}} \ll D^{\frac{1}{2}}\tau(n) \ll D^{\frac{1}{2}} x^{\varepsilon}$$

получаваме

$$\Xi'_n(D) \ll x^{\varepsilon}\left(D^{\frac{3}{4}} + nxD^{-\frac{1}{4}}\right). \tag{333}$$

За да оценим сумата $\Xi''_n(D)$ използуваме равенството (325) и я записваме във вида

$$\Xi''_n(D) = \sum_{\sqrt{\frac{D}{2}} < u \le \sqrt{2D}} \; \sum_{\substack{\xi_1^*(u) < v \le \xi_2^*(u) \\ (u,v)=1}} \lambda^*_{n,u}(v)\, e\left(-\frac{n\,\overline{v_{(u)}}}{u}\right),$$

където

$$\xi_1^*(u) = \sqrt{\max\left(0, D - u^2\right)}, \qquad \xi_2^*(u) = \sqrt{\min\left(u^2, 2D - u^2\right)}$$

и

$$\lambda^*_{n,u}(v) = e\left(\frac{nx}{u^2+v^2} + \frac{nv}{u(u^2+v^2)}\right).$$

Като работим по същия начин, както при оценяването на $\Xi'_n(D)$, получаваме

$$\Xi''_n(D) \ll x^{\varepsilon}\left(D^{\frac{3}{4}} + nxD^{-\frac{1}{4}}\right). \tag{334}$$

Проверката оставяме на читателя.

От (323), (333) и (334) следва

$$\Xi_n(D) \ll x^{\varepsilon}\left(D^{\frac{3}{4}} + nxD^{-\frac{1}{4}}\right). \tag{335}$$

Заместваме тази оценка в (312), използуваме (303) и виждаме, че

$$\Sigma_1(D) \ll x^{3\varepsilon}\left(DM^{-1} + \sum_{n \le M^{1+\varepsilon}} \frac{1}{n}\left(D^{\frac{3}{4}} + nxD^{-\frac{1}{4}}\right)\right).$$

Оттук, след предефиниране на ε, получаваме

$$\Sigma_1(D) \ll x^{\varepsilon}\left(DM^{-1} + D^{\frac{3}{4}} + xMD^{-\frac{1}{4}}\right). \tag{336}$$

Избираме M така, че да е изпълнено

$$xMD^{-\frac{1}{4}} = DM^{-1}, \qquad \text{т.е.} \qquad M = D^{\frac{5}{8}}x^{-\frac{1}{2}}. \tag{337}$$

Тъй като разглеждаме само тези стойности на D, за които $x^{\frac{7}{8}} \le D \le x$, то при горния избор на M се удовлетворява условието (303).

От (336) и (337) следва

$$\Sigma_1(D) \ll x^{\varepsilon}\left(D^{\frac{3}{4}} + D^{\frac{3}{8}}x^{\frac{1}{2}}\right),$$

откъдето

$$\max_{x^{\frac{7}{8}} \le D \le x} |\Sigma_1(D)| \ll x^{\frac{7}{8}+\varepsilon}. \tag{338}$$

От (302) и (338) следва оценката (276), с което Теорема 5.1 е доказана.

□

6 Задача за делителите в аритметични прогресии

6.1 Увод и формулировка на теоремите

Естествено обобщение на задачата на Дирихле за делителите, която разглеждахме в Глава 4 на УАТЧ-1, е задачата за намирането на асимптотична формула за сумата

$$L_{q,a}(x) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv a\ (q)}} \tau(n). \tag{339}$$

Тук имаме $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ и, както и преди, вместо $n \equiv a \pmod q$ записваме за улеснение $n \equiv a\ (q)$.

При фиксирани стойности на a и q тази задача не се отличава твърде много от класическата задача за делителите. Нещата обаче се променят, ако предполагаме, че a и q могат да се изменят, заедно с x, като при това трудността нараства, ако q е бързо растяща функция на x.

В настоящата глава ще докажем следната

Теорема 6.1 (Селберг – Хули)**.** *Нека $(a, q) = 1$. Тогава за сумата $L_{q,a}(x)$, определена чрез* (339)*, е в сила асимптотичната формула*

$$L_{q,a}(x) = \frac{\varphi(q)}{q^2}\, x \left(\log x + 2\gamma - 1\right) - \frac{2x}{q} \sum_{d \mid q} \frac{\mu(d) \log d}{d} \;+\; O\left(\left(q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\right) x^{\varepsilon}\right), \tag{340}$$

където $\varphi(q)$ и $\mu(q)$ са съответно функциите на Ойлер и Мьобиус, γ е константата на Ойлер, $\varepsilon > 0$ е произволно малко, а константата в знака O зависи само от ε.

Тази резултат е получен от Селберг и (независимо) от Хули, но техните доказателства са останали непубликувани. По-късно същата формула е преоткрита и от други математици и в настоящия момент са известни няколко доказателства. Общото при всички тях е, че основна роля играе оценката на А. Вейл за сумата на Клостерман, приведена в Теорема 5.2. Кратко доказателство на (340), при което обаче се използуват свойства на някои специални функции, е достъпно в монографията [23] на Иванец и Ковалски. Докзателството на Теорема 6.1, което привеждаме в настоящите записки, е по-елементарно.

Да отбележим, че асимптотичната формула (340) е нетривиална когато $q < x^{\frac{2}{3} - \varepsilon}$ за произволно $\varepsilon > 0$. Съществува хипотеза, според която оценката за остатъчният член в (340) може да бъде подобрена така, че формулата да е нетривиална и при по-големи стойности на q. Тази хипотеза обаче все още не е доказана. Все пак, оценката за остатъчния член може да бъде малко подобрена, като вместо x^{ε} да съдържа $\tau^2(q) \log x$. Това усилване на резултата, обаче, е незначително и не играе съществена роля при решаването на други задачи.

Теорема 6.1 има многобройни приложения. В настоящите записки ще покажем как тя се прилага за намиране на асимптотична формула за сумата

$$I(x)=\sum_{n\leq x}\tau(n)\tau(n+1). \tag{341}$$

Тази задача е поставена през 1927 г. от Ингам, който доказва, че

$$I(x)\sim\frac{6}{\pi^2}x\log^2 x \qquad \text{при} \qquad x\to\infty.$$

С намирането на по-точна асимптотична формула за $I(x)$ и с изучаването на сходни суми са се занимавале редица математици. Тук ще формулираме и приведем скица на доказателството на резултат, получен през 1979 г. от Хийт-Браун [21]. В сила е следната

Теорема 6.2 (Хийт-Браун). *За сумата $I(n)$, определена чрез* (341)*, е в сила асимптотичната формула*

$$I(x)=\frac{6}{\pi^2}x\log^2 x+c_1x\log x+c_2x+O\left(x^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\right), \tag{342}$$

където c_1, c_2 са константи, $\varepsilon>0$ е произволно малко, а константата в знака O зависи само от ε.

Константите c_1 и c_2, участващи във формула (342), също се изразяват в явен вид, като се представят като суми на безкрайни редове. По-силна оценка за остатъчния член (с константа в показателя $\frac{2}{3}$ вместо $\frac{5}{6}$) е получена през 1982 г. от Дезуйе и Иванец [16]. Известни са и обобщения на Теорема 6.2, отнасящи се до величината

$$I_h(x)=\sum_{n\leq x}\tau(n)\tau(n+h),$$

където $h\in\mathbb{N}$. Ако h е фиксирано, то изучаването на $I_h(x)$ по същество не се отличава от това на $I(x)$. Ситуацията обаче се променя, ако h зависи от x. Тук няма да обсъждаме тези въпроси, а ще отбележим само, че тази, а и други подобни задачи, освен че представляват интерес сами по себе си, намират също приложения в различни дялове от аналитичната теория на числата — например в теорията на дзета-функцуята на Риман.

Накрая ще отбележим, че резултат, подобен на този от Теорема 6.1, може да бъде установен и за величината

$$R_{q,a}(x)=\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv a\ (q)}}r(n),$$

където $r(n)$ е броя на представянията на n като сума от два квадрата. Това е направено в неодавнащната статия [28] на автора, в която са подобрени резултати получени преди от други матетамтици.

6.2 Начало на доказателството на Теорема 6.1

При $q = 1$ формулата (340) е следствие от Теорема 4.5 (УАТЧ-1), а при $q \geq x^{\frac{2}{3}}$ тя е тривиална. Затова оттук нататък ще считаме, че

$$1 < q < x^{\frac{2}{3}}. \tag{343}$$

Записваме сумата от (339) във вида

$$L_{q,a}(x) = \sum_{\substack{uv \leq x \\ uv \equiv a\ (q)}} 1 = 2S_1 - S_2, \tag{344}$$

където

$$S_1 = \sum_{u \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{v \leq \frac{x}{u} \\ uv \equiv a\ (q)}} 1, \qquad S_2 = \sum_{u \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{v \leq \sqrt{x} \\ uv \equiv a\ (q)}} 1. \tag{345}$$

Да разгледаме S_1. Ясно е, че в сумата по u участват само събираеми, за които $(u, q) = 1$, тъй като в противен случай се получава противоречие с условието $(q, a) = 1$. Тогава, ако $\overline{u}$ означава обратният елемент на u по модул q, т.е. решение на сравнението $u\overline{u} \equiv 1\ (q)$, то като използваме елементарната формула (261), получаваме

$$S_1 = \sideset{}{^*}\sum_{u \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{v \leq \frac{x}{u} \\ v \equiv a\overline{u}\ (q)}} 1 = \sideset{}{^*}\sum_{u \leq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{uq} + \rho\left(\frac{xu^{-1} - a\overline{u}}{q} \right) - \rho\left(\frac{-a\overline{u}}{q} \right) \right),$$

където $\sum^*$ означава, че сумирането се извършва по стойности на сумационната променлива, които са взаимно прости с q. Оттук следва

$$S_1 = \frac{x}{q} S_1^{(0)} + S_1' - S_1'', \tag{346}$$

където

$$S_1^{(0)} = \sideset{}{^*}\sum_{u \leq \sqrt{x}} \frac{1}{u}, \qquad S_1' = \sideset{}{^*}\sum_{u \leq \sqrt{x}} \rho\left(\frac{xu^{-1} - a\overline{u}}{q} \right), \qquad S_1'' = \sideset{}{^*}\sum_{u \leq \sqrt{x}} \rho\left(\frac{-a\overline{u}}{q} \right). \tag{347}$$

Сега да разгледаме сумата S_2, определена чрез (345). Като използваме (345) и разсъждаваме както по-горе виждаме, че

$$S_2 = \sideset{}{^*}\sum_{u \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{v \leq \sqrt{x} \\ v \equiv a\overline{u}\ (q)}} 1 = \sideset{}{^*}\sum_{u \leq \sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{q} + \rho\left(\frac{\sqrt{x} - a\overline{u}}{q} \right) - \rho\left(\frac{-a\overline{u}}{q} \right) \right).$$

Оттук получаваме

$$S_2 = \frac{\sqrt{x}}{q} S_2^{(0)} + S_2' - S_1'', \tag{348}$$

където

$$S_2^{(0)} = \sideset{}{^*}\sum_{u \leq \sqrt{x}} 1, \qquad S_2' = \sideset{}{^*}\sum_{u \leq \sqrt{x}} \rho\left(\frac{\sqrt{x} - a\overline{u}}{q} \right), \tag{349}$$

а сумата S_1'' е определена чрез (347).

От (344), (346) и (348) следва

$$L_{q,a}(x) = \frac{2x}{q} S_1^{(0)} - \frac{\sqrt{x}}{q} S_2^{(0)} + 2S_1' - S_2' - S_1''. \tag{350}$$

6.3 Асимптотични формули за $S_1^{(0)}$ и $S_2^{(0)}$

Според Лема 2.11 (УАТЧ-1) имаме

$$\sum_{n \le y} \frac{1}{n} = \log y + \gamma + \frac{\rho(y)}{y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right) \tag{351}$$

при $y \ge 2$, но лесно се проверява, че горната формула е вярна даже за всяко $y > 0$. Сега използуваме (347), (351) и също основното свойство на функцията на Мьобиус, дадено в Лема 3.34 (УАТЧ-1) и намираме

$$S_1^{(0)} = \sum_{u \le \sqrt{x}} \frac{1}{u} \sum_{d|(u,q)} \mu(d) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{u \le \sqrt{x} \\ u \equiv 0\ (d)}} \frac{1}{u} = \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{u \le \frac{\sqrt{x}}{d}} \frac{1}{u}$$

$$= \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} \left(\log \frac{\sqrt{x}}{d} + \gamma + \rho\left(\frac{\sqrt{x}}{d}\right) \frac{d}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{d^2}{x}\right). \right)$$

Като разкрием скобите и приложим Лема 3.38 (УАТЧ-1), получаваме

$$S_1^{(0)} = \frac{\varphi(q)}{q} \left(\frac{1}{2} \log x + \gamma \right) - \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} \log d + \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{d|q} \mu(d) \rho\left(\frac{\sqrt{x}}{d}\right) + O\left(\frac{q\tau(q)}{x}\right). \tag{352}$$

Сега разглеждаме сумата $S_2^{(0)}$, определена чрез (349). Прилагаме отново Лема 3.34 (УАТЧ-1) и виждаме, че

$$S_2^{(0)} = \sum_{u \le \sqrt{x}} \sum_{d|(u,q)} \mu(d) = \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{u \le \sqrt{x} \\ u \equiv 0\ (d)}} 1 = \sum_{d|q} \mu(d) \left[\frac{\sqrt{x}}{d}\right] = \sum_{d|q} \mu(d) \left(\frac{\sqrt{x}}{d} - \left\{ \frac{\sqrt{x}}{d} \right\} \right).$$

Оттук и от Лема 3.38 (УАТЧ-1) следва

$$S_2^{(0)} = \frac{\varphi(q)}{q} \sqrt{x} - \sum_{d|q} \mu(d) \left\{ \frac{\sqrt{x}}{d} \right\}. \tag{353}$$

6.4 Оценяване на S_1'

Разглеждаме сумата S_1', определена чрез (347). Отделяме от нея $O(\log x)$ суми от вида

$$\Gamma(U) = \sum_{U<u\leq 2U}^{*} \rho\left(\frac{xu^{-1} - a\overline{u}}{q}\right), \tag{354}$$

където U приема стойности $2^{-j}\sqrt{x}$, $j = 1, 2, \ldots, j_0$, а числото j_0 определяме така, че

$$2x^{\frac{1}{3}} < 2^{-j_0}\sqrt{x} \leq 4x^{\frac{1}{3}}.$$

Очевидно имаме $j_0 \ll \log x$ и също $2x^{\frac{1}{3}} \leq U \leq \sqrt{x}$. За сумата от останалите събираеми на S_1' използуваме тривиалната оценка и получаваме

$$S_1' \ll x^{\frac{1}{3}} + (\log x) \max_{2x^{\frac{1}{3}} \leq U \leq x^{\frac{1}{2}}} |\Gamma(U)|. \tag{355}$$

Сега ще се занимаем със сумата $\Gamma(U)$, определена чрез (354). Прилагаме Лема 5.4 и получаваме

$$\Gamma(U) = \sum_{U<u\leq 2U}^{*} \left(\sum_{1\leq|n|\leq M} \frac{1}{2\pi i n} e\left(\frac{xu^{-1} - a\overline{u}}{q} n\right) + O\left(g_M\left(\frac{xu^{-1} - a\overline{u}}{q}\right)\right)\right), \tag{356}$$

където M е параметър, който ще изберем по-късно, а $g_M(t)$ е функцията от Лема 5.4. Засега считаме, че

$$2 \leq M \leq \sqrt{x}. \tag{357}$$

(Да отбележим, че вместо по-сложната Лема 5.4, може със същия успех да бъде използувана Лема 4.11 (УАТЧ-1), но тогава на някои места изчисленията ще бъдат малко по-дълги).

От (356) получаваме

$$\Gamma(U) = H(M, U) + O\left(G(M, U)\right), \tag{358}$$

където

$$H(M, U) = \sum_{1\leq|n|\leq M} \frac{K_n(U)}{2\pi i n}, \tag{359}$$

$$K_n(U) = \sum_{U<u\leq 2U}^{*} e\left(\frac{xu^{-1} - a\overline{u}}{q} n\right), \tag{360}$$

$$G(M, U) = \sum_{U<u\leq 2U}^{*} g_M\left(\frac{xu^{-1} - a\overline{u}}{q}\right).$$

Като приложим Лема 5.4 (3), получаваме

$$G(M,U)=\sum_{U<u\le 2U}{}^{*}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_M(n)\,e\left(\frac{xu^{-1}-a\overline{u}}{q}\,n\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_M(n)\,K_n(U).$$

Сега използваме тривиалната оценка $K_n(U)\ll U$, както и Лема 5.4 (3), и намираме, че за произволно $\varepsilon>0$ е в сила

$$G(M,U)\ll\frac{U\log M}{M}+\frac{\log M}{M}\sum_{1\le|n|\le M^{1+\varepsilon}}|K_n(U)|. \tag{361}$$

Тогава, като използваме (357) – (359), (361) и очевидното равенство $|K_n(U)|=|K_{-n}(U)|$, получаваме

$$\Gamma(U)\ll x^{2\varepsilon}\left(UM^{-1}+\sum_{n\le M^{1+\varepsilon}}\frac{|K_n(U)|}{n}\right) \tag{362}$$

(сумирането вече е само по естествени числа n).

Записваме сумата $K_n(U)$, зададена чрез (360), във вида

$$K_n(U)=\sum_{1\le l\le q}{}^{*}e\left(-\frac{an\overline{l}}{q}\right)\sum_{\substack{U<u\le 2U\\ u\equiv l\ (q)}}e\left(\frac{xn}{uq}\right).$$

Сега изразяваме условието $u\equiv l\ (q)$ от областта на сумиране на вътрешната сума, като използваме Лема 4.9 (6) (УАТЧ-1) и получаваме

$$K_n(U)=\sum_{1\le l\le q}{}^{*}e\left(-\frac{an\overline{l}}{q}\right)\sum_{U<u\le 2U}e\left(\frac{xn}{uq}\right)\frac{1}{q}\sum_{-\frac{q}{2}<h\le\frac{q}{2}}e\left(\frac{h(u-l)}{q}\right).$$

Сменяме реда на сумиране и намираме, че

$$K_n(U)=\frac{1}{q}\sum_{-\frac{q}{2}<h\le\frac{q}{2}}K(q;-h,-an)\,F_{n,h}(U). \tag{363}$$

В горната формула $K(q;a,b)$ е сумата на Клостерман, определена чрез (244), а

$$F_{n,h}(U)=\sum_{U<u\le 2U}e\left(f_{n,h}(u)\right), \tag{364}$$

където

$$f(u)=f_{n,h}(u)=\frac{xn}{qu}+\frac{hu}{q}. \tag{365}$$

Като използваме оценката на А. Вейл (Теорема 5.2), както и условието $(q,a)=1$, намираме

$$K(q;-h,-an)\ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\,(q,n)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{366}$$

Сега ще оценим $F_{n,h}(U)$. За функцията $f(u)$, определена чрез (365), имаме

$$f'(u) = -\frac{xn}{qu^2} + \frac{h}{q}, \qquad f''(u) = \frac{2xn}{qu^3}. \tag{367}$$

Ще оценяваме по два различни начина в зависимост от големината на $|h|$. Нека е изпълнено

$$\frac{2xn}{U^2} \le |h| \le \frac{q}{2}. \tag{368}$$

От първата формула в (367) и от (368) следва, че при $U \le u \le 2U$ имаме

$$|f'(u)| \le \frac{xn}{qU^2} + \frac{|h|}{q} \le \frac{|h|}{2q} + \frac{|h|}{q} \le \frac{3}{4}.$$

Сега ще използваме леко модифициран вариант на Лема 4.13 (УАТЧ-1) — със сумиране по $n \in \big[f'(a) - \theta, f'(b) + \theta\big]$, където $\theta \in (0, 1]$. Както е отбелязано в забележката след формулировката на Лема 4.13 (УАТЧ-1), при това положение в остатъчния член трябва да бъде добавено събираемо $O\left(\theta^{-1}\right)$. Доказателството на горния вариант на Лема 4.13 (УАТЧ-1) не се отличава от това, което е изложено в първата част на записките. Оставяме проверката на читателя.

Както видяхме по-горе, имаме $|f'(u)| \le \frac{3}{4}$ при $U \le u \le 2U$. Това означава, че като приложим по-горе споменатия вариант на Лема 4.13 (УАТЧ-1) с параметър $\theta = \frac{1}{8}$, ще видим, че в сумата по n в дясната страна на формула (215) (УАТЧ-1) има само едно събираемо, отговарящо на $n = 0$. Това означава, че експоненциалната сума $F_{n,h}(U)$ се апроксимира само чрез съответния експоненциален интеграл, т.е.

$$F_{n,h}(U) = \int_U^{2U} e\left(f(u)\right)\, du + O(1).$$

Ще оценим този интеграл. Прилагаме отново (367) и (368) и виждаме, че

$$|f'(u)| \ge \frac{|h|}{q} - \frac{xn}{qU^2} \ge \frac{|h|}{2q}.$$

Сега използваме Лема 4.14 (УАТЧ-1) и намираме

$$\int_U^{2U} e\left(f(u)\right)\, du \ll \frac{q}{|h|}.$$

И така, за сумата (364) получихме

$$F_{n,h}(U) \ll \frac{q}{|h|} \qquad \text{при} \qquad \frac{2xn}{U^2} \le |h| \le \frac{q}{2}. \tag{369}$$

Нека сега имаме

$$|h| \le \frac{2xn}{U^2}.$$

От втората формула в (367) намираме, че за $U \leq u \leq 2U$ е изпълнено

$$\frac{xn}{4qU^3} \leq f''(u) \leq \frac{2xn}{qU^3}$$

и, като приложим оценката на Ван-дер-Корпут (Теорема 4.16 от УАТЧ-1), получаваме

$$F_{n,h}(U) \ll U \left(\frac{xn}{qU^3}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{xn}{qU^3}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

И така, виждаме, че за сумата (364) е изпълнено

$$F_{n,h}(U) \ll \left(\frac{xn}{qU}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{qU^3}{xn}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{при} \qquad |h| \leq \frac{2xn}{U^2}. \tag{370}$$

Сега вече можем да оценим сумата $K_n(U)$, определена чрез (360). Използуваме представянето (363) и оценката (366) и получаваме

$$K_n(U) \ll q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} (q,n)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{K}_n, \qquad \mathfrak{K}_n = \sum_{|h| \leq \frac{q}{2}} |F_{n,h}(U)|. \tag{371}$$

Ясно е, че

$$\mathfrak{K}_n \leq \mathfrak{K}'_n + \mathfrak{K}''_n, \tag{372}$$

където

$$\mathfrak{K}'_n = \sum_{\frac{2xn}{U^2} \leq |h| \leq \frac{q}{2}} |F_{n,h}(U)|, \qquad \mathfrak{K}''_n = \sum_{|h| \leq \min\left(\frac{2xn}{U^2}, \frac{q}{2}\right)} |F_{n,h}(U)|.$$

Първо установяваме, че

$$\mathfrak{K}'_n \ll q \log q. \tag{373}$$

Наистина, ако $\frac{2xn}{U^2} > \frac{q}{2}$, то сумата $\mathfrak{K}'_n$ е празна, а ако $\frac{2xn}{U^2} \leq \frac{q}{2}$ използуваме (369), както и Лема 2.6 (УАТЧ-1) и виждаме, че (373) отново е налице.

Сега да разгледаме $\mathfrak{K}''_n$. Като вземем предвид (370) виждаме, че

$$\mathfrak{K}''_n \ll \sum_{|h| \leq \min\left(\frac{2xn}{U^2}, \frac{q}{2}\right)} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} U^{\frac{1}{2}}} + \frac{q^{\frac{1}{2}} U^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}}\right) \ll \frac{x^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} U^{\frac{1}{2}}}\, q + \frac{q^{\frac{1}{2}} U^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}} \frac{xn}{U^2}$$

$$\ll \frac{q^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}}{U^{\frac{1}{2}}}. \tag{374}$$

От (343) и (372) – (374) получаваме оценка за $\mathfrak{K}_n$, която заместваме в (371) и намираме

$$K_n(U) \ll x^{\varepsilon} (q,n)^{\frac{1}{2}} \left(q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} U^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Оттук следва

$$\sum_{n\le M^{1+\varepsilon}}\frac{|K_n(U)|}{n}\ll x^\varepsilon\left(q^{\frac12}\sum_{n\le M^{1+\varepsilon}}\frac{(q,n)^{\frac12}}{n}+x^{\frac12}U^{-\frac12}\sum_{n\le M^{1+\varepsilon}}\frac{(q,n)^{\frac12}}{n^{\frac12}}\right). \tag{375}$$

Като използуваме Лема 2.6 (УАТЧ-1) виждаме, че за всяко $H\ge 2$ е изпълнено

$$\sum_{n\le H}\frac{(q,n)^{\frac12}}{n}=\sum_{d|n}d^{\frac12}\sum_{\substack{n\le H\\(q,n)=d}}\frac1n\le\sum_{d|n}d^{-\frac12}\sum_{m\le\frac{H}{d}}\frac1m\ll\tau(q)\log H \tag{376}$$

и аналогично

$$\sum_{n\le H}\frac{(q,n)^{\frac12}}{n^{\frac12}}\ll\tau(q)\,H^{\frac12}. \tag{377}$$

От (357), (375) – (377) и от Лема 3.33 (УАТЧ-1) следва

$$\sum_{n\le M^{1+\varepsilon}}\frac{|K_n(U)|}{n}\ll x^{2\varepsilon}\left(q^{\frac12}+x^{\frac12}\,M^{\frac12}\,U^{-\frac12}\right).$$

Заместваме последната оценка в (362) и след ново предефиниране на ε получаваме

$$\Gamma(U)\ll x^\varepsilon\left(UM^{-1}+q^{\frac12}+x^{\frac12}\,M^{\frac12}\,U^{-\frac12}\right). \tag{378}$$

Избираме M по оптимален начин, а именно така, че да е изпълнено

$$UM^{-1}=x^{\frac12}\,M^{\frac12}\,U^{-\frac12},$$

или все едно

$$M=Ux^{-\frac13}. \tag{379}$$

Според формула (355), величината U приема стойности в интервала $[2x^{\frac13},\sqrt{x}]$. Тогава, ако параметърът M е избран по горния начин, то условията (357) са налице.

От (378) и (379) получаваме

$$\Gamma(U)\ll x^\varepsilon\left(q^{\frac12}+x^{\frac13}\right),$$

а оттук и от (355) следва

$$S_1'\ll x^\varepsilon\left(q^{\frac12}+x^{\frac13}\right). \tag{380}$$

6.5 Асимптотична формула за S_2' и оценка за S_1''

От (347) и (349) се вижда, че сумите S_1'' и S_2' са еднотипни и могат да бъдат записани във вида

$$S_1''=G(0),\qquad S_2'=G\left(\frac{\sqrt{x}}{q}\right), \tag{381}$$

където

$$G(y)=\sum_{u\le\sqrt{x}}{}^{*}\rho\left(y-\frac{a\overline{u}}{q}\right). \tag{382}$$

За да изследваме сумата $G(y)$ разделяме интервала на сумиране в (382) на $\left[\frac{\sqrt{x}}{q}\right]$ на брой подинтервали, всеки от които с дължина q, и на най-много един подинтервал с дължина по-малка от q. Ясно е, че $\rho\left(y-\frac{a\overline{u}}{q}\right)$ е периодична функция на u, дефинирана за $u\in\mathbb{Z}$, $(u,q)=1$. Тогава получаваме

$$G(y)=\mathfrak{M}\left[\frac{\sqrt{x}}{q}\right]+\mathfrak{N}. \tag{383}$$

В горната формула $\mathfrak{M}$ е „пълна" сума по модул q и се дефинира чрез

$$\mathfrak{M}=\sum_{u\ (q)}^{*}\rho\left(y-\frac{a\overline{u}}{q}\right), \tag{384}$$

където $\sum_{u\ (q)}^{*}$ означава сумиране по коя да е редуцирана система от остатъци по модул q (виж Определение 3.49 (УАТЧ-1)). Съответно $\mathfrak{N}$ е „непълна" сума, която може да се запише във вида

$$\mathfrak{N}=\sum_{\xi_1<u\le\xi_2}{}^{*}\rho\left(y-\frac{a\overline{u}}{q}\right), \tag{385}$$

като

$$0<\xi_2-\xi_1<q. \tag{386}$$

Да разгледаме пълната сума $\mathfrak{M}$, определена чрез (384). Тъй като по условие $(a,q)=1$, когато u пробягва редуцирана система от остатъци по модул q, то $a\overline{u}$ също пробягва такава система, следователно имаме

$$\mathfrak{M}=\sum_{u\ (q)}^{*}\rho\left(y-\frac{u}{q}\right),$$

Изразяваме условието $(u,q)=1$ като използуваме основното свойство на функцията на Мьобиус (Лема 3.34 (УАТЧ-1)), Тогава, ако за простота означаваме с $\sum_{u\ (q)}$ сума по коя да е пълна система остатъци по модул q (виж Определение 3.48 (УАТЧ-1)), получаваме

$$\mathfrak{M}=\sum_{u\ (q)}\rho\left(y-\frac{u}{q}\right)\sum_{d|(u,q)}\mu(d)=\sum_{d|q}\mu(d)\sum_{\substack{u\ (q)\\ u\equiv 0\ (d)}}\rho\left(y-\frac{u}{q}\right)$$

$$=\sum_{d|q}\mu(d)\sum_{v\ (q/d)}\rho\left(y-\frac{v}{q/d}\right). \tag{387}$$

Но за произволни $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ е в сила тъждеството

$$\sum_{k\ (n)} \rho\left(y - \frac{k}{n}\right) = \rho\,(ny)\,. \tag{388}$$

Наистина, да означим с T сумата в лявата страна на (388). От най-простите свойства на функциите $\{t\}$ и $[t]$ и от определението $\rho(t) = \frac{1}{2} - \{t\}$ следва

$$T = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ 0\le y-\frac{k}{n}<1}} \rho\left(y - \frac{k}{n}\right) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ 0\le y-\frac{k}{n}<1}} \left(\frac{1}{2} - \left(y - \frac{k}{n}\right)\right) = \left(\frac{1}{2} - y\right) n + \frac{T_1}{n},$$

където

$$T_1 = \sum_{ny-n<k\le ny} k = \sum_{k=[ny]-n+1}^{[ny]} k = \frac{(2[ny] - n + 1)\, n}{2}.$$

Оттук получаваме (388).

От (387) и (388) следва

$$\mathfrak{M} = \sum_{d|q} \mu(d) \rho\left(\frac{qy}{d}\right). \tag{389}$$

Сега да разгледаме непълната сума $\mathfrak{N}$, определена чрез (385). За целта прилагаме Лема 4.11 (УАТЧ-1), за да заместим функцията $\rho(t)$ с частична сума на нейния ред на Фурие. (В случая няма нужда да прибягваме до по-сложната Лема 5.4). Ако $H \ge 2$ е параметър, който ще изберем по-късно, получаваме

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} &= \sideset{}{^*}\sum_{\xi_1<u\le\xi_2} \left(\sum_{1\le|n|\le H} \frac{e\left(yn - \frac{a\overline{u}}{q} n\right)}{2\pi i n} + O\left(\min\left(1, H^{-1} \left\|y - \frac{a\overline{u}}{q}\right\|^{-1}\right)\right)\right) \\ &= \mathcal{R} + O\,(\Delta)\,, \end{aligned} \tag{390}$$

където

$$\mathcal{R} = \sum_{1\le|n|\le H} \frac{e\,(yn)}{2\pi i n}\, \mathcal{K}_n, \tag{391}$$

$$\mathcal{K}_n = \sideset{}{^*}\sum_{\xi_1<u\le\xi_2} e\left(-\frac{a\overline{u}}{q} n\right), \tag{392}$$

$$\Delta = \sideset{}{^*}\sum_{\xi_1<u\le\xi_2} \min\left(1, H^{-1} \left\|y - \frac{a\overline{u}}{q}\right\|^{-1}\right).$$

Да оценим Δ. Първо разширяваме множеството на сумиране, като оставим u да пробягвва произволна редуцирана система от остатъци по модул q. Тогава, тъй като $a\overline{u}$ отново пробягва такава система, виждаме, че

$$\Delta \leq \sum_{u\ (q)}{}^{*} \min\left(1, H^{-1}\left|\left|y - \frac{u}{q}\right|\right|^{-1}\right)$$

Сега отново разширяваме множеството на сумиране, като оставим u да пробягва пълна система от остатъци по модул q, а именно числата $u \in \mathbb{Z}$, за които

$$-\frac{1}{2} < y - \frac{u}{q} \leq \frac{1}{2}.$$

Тогава, като използуваме, че при $|t| \leq \frac{1}{2}$ имаме $||t|| = |t|$, получаваме

$$\Delta \leq \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z} \\ \left|y - \frac{u}{q}\right| \leq \frac{1}{2}}} \min\left(1, H^{-1}\left|y - \frac{u}{q}\right|^{-1}\right) = \Delta' + \Delta'', \tag{393}$$

където Δ' е сумата по u, удовлетворяващи $\left|y - \frac{u}{q}\right| \leq \frac{1}{H}$, а Δ'' съдържа събираемите, за които $\frac{1}{H} < \left|y - \frac{u}{q}\right| \leq \frac{1}{2}$.

Непосредствено се проверява, че

$$\Delta' \ll qH^{-1} + 1. \tag{394}$$

По-нататък, ясно е, че

$$\Delta'' \ll (\log H)\ H^{-1} \max_{\frac{1}{H} \leq V \leq \frac{1}{2}} \left(V^{-1}\,\mathfrak{T}(V),\right)$$

където $\mathfrak{T}(V)$ е броят на целите числа v, за които $V \leq \left|y - \frac{v}{q}\right| \leq 2V$. Лесно се вижда, че $\mathfrak{T}(V) \ll Vq + 1$, откъдето следва

$$\Delta'' \ll (\log H)\ H^{-1} \max_{\frac{1}{H} \leq V \leq \frac{1}{2}} \left(q + V^{-1}\right) \ll (\log H)\left(qH^{-1} + 1\right). \tag{395}$$

От (393) – (395) получаваме

$$\Delta \ll (\log H)\left(qH^{-1} + 1\right). \tag{396}$$

Сега да разгледаме сумата $\mathcal{R}$, определена чрез (391). Тъй като е изпълнено (386), то величината $\mathcal{K}_n$, зададена с (392), представлява непълна сума на Клостерман и, като използуваме Лема 5.3 и условието $(a, q) = 1$ виждаме, че

$$\mathcal{K}_n \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(n, q)^{\frac{1}{2}}.$$

От горната оценка и от (391) намираме

$$\mathcal{R} \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum_{1\le|n|\le H} \frac{(n,q)^{\frac{1}{2}}}{|n|}.$$

Сега използуваме (376) и, след предефиниране на ε, получаваме

$$\mathcal{R} \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \log H. \tag{397}$$

Ако положим $H = q$ и се възползуваме от (343), (390), (396) и (397) намираме, че

$$\mathfrak{N} \ll q^{\frac{1}{2}} x^{\varepsilon}. \tag{398}$$

От (383), (389) и (398) следва

$$G(y) = \frac{\sqrt{x}}{q} \sum_{d|q} \mu(d)\rho\left(\frac{qy}{d}\right) + O\left(q^{\frac{1}{2}} x^{\varepsilon}\right). \tag{399}$$

Тогава, като вземем предвид (381) и (399), получаваме

$$S_2' = \frac{\sqrt{x}}{q} \sum_{d|q} \mu(d)\rho\left(\frac{\sqrt{x}}{d}\right) + O\left(q^{\frac{1}{2}}\, x^{\varepsilon}\right). \tag{400}$$

Също така, тъй като $\rho(0) = \frac{1}{2}$, то като използуваме (343), (381), (399), както и Лема 3.34 (УАТЧ-1), намираме

$$S_1'' \ll q^{\frac{1}{2}}\, x^{\varepsilon}. \tag{401}$$

6.6 Край на доказателството на Теорема 6.1

От формули (350), (352), (353), (380), (400) и (401) получаваме

$$L_{q,a}(x) = \frac{2x}{q}\left(\frac{\varphi(q)}{q}\left(\frac{1}{2}\log x + \gamma\right) - \sum_{d|q} \frac{\mu(d)\log d}{d} + \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{d|q} \mu(d)\rho\left(\frac{\sqrt{x}}{d}\right)\right)$$

$$- \frac{\sqrt{x}}{q}\left(\frac{\varphi(q)}{q}\sqrt{x} - \sum_{d|q} \mu(d)\left\{\frac{\sqrt{x}}{d}\right\}\right)$$

$$- \frac{\sqrt{x}}{q} \sum_{d|q} \mu(d)\rho\left(\frac{\sqrt{x}}{d}\right) \;+\; O\left(x^{\varepsilon}\left(q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\right)\right).$$

Освен това, като използуваме равенството $\rho(t) = \frac{1}{2} - \{t\}$, Лема 3.34 (УАТЧ-1) и условието (343), виждаме, че

$$\sum_{d|q} \mu(d)\rho\left(\frac{\sqrt{x}}{d}\right) = -\sum_{d|q} \mu(d)\left\{\frac{\sqrt{x}}{d}\right\}.$$

От горните формули следва (340), с което Теорема 6.1 е доказана.

□

6.7 Схема на доказателството на Теорема 6.2

Използуваме тъждеството (253) и виждаме, че величината $I(x)$, определена чрез (341), се представя във вида

$$I(x) = 2\sum_{n\le x}\Bigg(\sum_{\substack{d|n\\ d\le\sqrt{n}}} 1\Bigg)\,\tau(n+1) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Сменяме реда на сумиране и след прости пресмятания получаваме

$$\begin{aligned} I(x) &= 2\sum_{d\le\sqrt{x}}\ \sum_{\substack{d^2\le n\le x\\ n\equiv 0\ (d)}} \tau(n+1) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \\ &= 2\sum_{d\le\sqrt{x}}\big(L_{d,1}(x) - L_{d,1}(d^2)\big) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

където $L_{q,a}(x)$ е сумата, определена от (339). Сега за величините $L_{d,1}(x)$ и $L_{d,1}(d^2)$ прилагаме асимптотичната формула от Теорема 6.1. Лесно се вижда, че приносът на остатъчните членове към $I(x)$ е равен на $O\left(x^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\right)$. Оставяме на читателя да пресметна приноса на главните членове и да довърши доказателството на Теорема 6.2. $\square$

7 Елементарни свойства на сумата на Клостерман и оценяване на някои аналогични на суми

7.1 Елементарни резултати за сумата на Клостерман

В предишните глави се убедихме, че сумата на Клостерман

$$K(q;a,b) = \sideset{}{^*}\sum_{1\le n\le q} e\left(\frac{an+b\overline{n}}{q}\right) \tag{402}$$

се появява при решаването на редица аритметични задачи и един от най-важните резултати, отнасящи се до нея, е оценката на А. Вейл (Теорема 5.2), според която е изпълнено

$$|K(q;a,b)| \le \tau(q)\, q^{\frac{1}{2}}\, (q,a,b)^{\frac{1}{2}}. \tag{403}$$

Както вече споменахме, в настоящите записки няма да излагаме доказателство на Теорема 5.2, но все пак ще се запознаем с някои прости свойства на сумата (402). Ще отбележим, че с тяхна помощ също могат да бъдат получени нетривиални резултати, макар и не толкова силни, както след прилагането на (403). Такава оценка е получил Клостерман в знаменитата си статия [24] и я е използвал при изследването на диофантовото уравнение

$$a_1n_1^2 + \cdots + a_4n_4^2 = N,$$

което е естествено обобщение на уравнението на Лагранж (виж Глава 3 (УАТЧ-1)).

Ще започнем със следната елементарна

Лема 7.1. *Сумата на Клостерман, определена чрез* (402), *притежава следните свойства.*

(1) *За произволно $m \in \mathbb{Z}$, $(m,q) = 1$, ако $\overline{m}$ е обратният елемент на m по модул q, то имаме*

$$K(q;a,b) = K(q;am,b\overline{m}).$$

(2) *$K(q;a,b)$ е винаги реално число.*

(3) *Ако $(b,q) = 1$, то $K(q;a,b) = K(q;ab,1)$.*

(4) *Ако $q_1,q_2 \in \mathbb{N}$, $(q_1,q_2) = 1$ и ако $a_1,a_2 \in \mathbb{Z}$, то имаме*

$$K\left(q_1q_2; a_1q_2^2 + a_2q_1^2, 1\right) = K(q_1;a_1,1)\, K(q_2;a_2,1).$$

Доказателство. Свойство (1) следва от определението (402) и от факта, че ако $(m,q) = 1$ и ако n пробягва редуцирана система от остатъци по модул q, то числата mn също образуват такава система. Като използваме тъждеството от свойство (1) при $m = -1$, получаваме доказателство на свойство (2), а ако вземем $m = b$, получаваме и доказателството на свойство (3).

Накрая, за да установим (4) използуваме Лема 3.52 (УАТЧ-1), в която се твърди, че ако n_j пробягва редуцирана система от остатъци по модул q_j, $j = 1, 2$, то числата $n_1q_2 + n_2q_1$ образуват редуцирана система от остатъци по модул q_1q_2. Оставяме на читателя да извърши съответните изчисления.

□

Лема 7.1 (4) ни казва, че $K(q; a, b)$ е, в известен смисъл, мултипликативна функция по отношение на q. Благодарение на този факт е достатъчно сумата на Клостерман да бъде изследвана при $q = p^l$, където p е просто число. Ако докажем Теорема 5.2 за такива стойности на q, то доказателството в общия случай, по същество, следва от Лема 7.1 (4).

Теоремата на А. Вейл от знаменитата статия [30] гласи, че ако p е просто и $p \nmid ab$, то $|K(p; a, b)| \le 2\sqrt{p}$. Ние тук няма да доказваме този дълбок резултат, но ще се занимаем с оценката на Клостерман от [24].

Теорема 7.2 (Клостерман)**.** *Нека p е просто число и $p \nmid ab$. Тогава имаме*

$$|K(p; a, b)| \le 3^{\frac{1}{4}}\, p^{\frac{3}{4}}. \tag{404}$$

Доказателство. Разглеждаме величината

$$F = \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1} |K(p; k, l)|^4. \tag{405}$$

Ясно е, че

$$F \le \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} |K(p; k, l)|^4 = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{n_1=1}^{p-1} e\left(\frac{kn_1 + l\overline{n_1}}{p}\right)\right)\left(\sum_{n_2=1}^{p-1} e\left(\frac{kn_2 + l\overline{n_2}}{p}\right)\right)$$

$$\times \left(\sum_{n_3=1}^{p-1} e\left(-\frac{kn_3 + l\overline{n_3}}{p}\right)\right)\left(\sum_{n_4=1}^{p-1} e\left(-\frac{kn_4 + l\overline{n_4}}{p}\right)\right)$$

$$= \sum_{1\le n_1,\dots,n_4\le p-1}\ \sum_{k=1}^{p} e\left(\frac{k(n_1+n_2-n_3-n_4)}{p}\right)\ \sum_{l=1}^{p} e\left(\frac{l(\overline{n_1}+\overline{n_2}-\overline{n_3}-\overline{n_4})}{p}\right).$$

Сега използуваме Лема 4.9 (6) (УАТЧ-1) и получаваме

$$F \le p^2\,\Phi, \tag{406}$$

където Φ е броя на решенията на системата сравнения

$$n_1 + n_2 \equiv n_3 + n_4 \pmod p, \tag{407}$$

$$\overline{n_1} + \overline{n_2} \equiv \overline{n_3} + \overline{n_4} \pmod p \tag{408}$$

в цели числа, за които

$$1 \le n_1, \dots, n_4 \le p - 1. \tag{409}$$

От (407) и (408) следва

$$(n_1 + n_2) n_3 n_4 \equiv (n_3 + n_4) n_1 n_2 \equiv (n_1 + n_2) n_1 n_2 \pmod p$$

и, като приложим отново (407), получаваме

$$(n_1 + n_2) n_3 (n_1 + n_2 - n_3) \equiv (n_1 + n_2) n_1 n_2 \pmod p.$$

Лесно се проверява, че последното сравнение е еквивалентно на

$$(n_1 + n_2)(n_1 - n_3)(n_2 - n_3) \equiv 0 \pmod p,$$

откъдето пък следва, че е изпълнено поне едно от сравненията

$$n_1 + n_2 \equiv 0 \pmod p, \tag{410}$$

$$n_1 - n_3 \equiv 0 \pmod p, \tag{411}$$

$$n_2 - n_3 \equiv 0 \pmod p. \tag{412}$$

Тогава

$$\Phi \le \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3,$$

където Φ_1, Φ_2, Φ_3 са количествата на четворките $n_1, \dots, n_4$, удовлетворяващи (409), както и, съответно, (410), (411) или (412). Но, ако е изпълнено (410), то, като вземем предвид (407) виждаме, че ще имаме също $n_3 + n_4 \equiv 0 \pmod p$. Аналогично, от (411) следва $n_2 \equiv n_4 \pmod p$, а от (412) следва $n_1 \equiv n_4 \pmod p$. Тогава имаме $\Phi_j \le (p-1)^2$ при $j = 1, 2, 3$, поради което получаваме

$$\Phi \le 3(p-1)^2.$$

От последното неравенство и от (406) следва

$$F \le 3p^2(p-1)^2. \tag{413}$$

Сега ще оценим величината F отдолу. От (405) очевидно имаме

$$F \ge \sum_{\substack{1 \le k, l \le p-1 \\ kl \equiv ab \ (p)}} |K(p; k, l)|^4.$$

Броят на събираемите в последната сума е равен на $p - 1$, а от Лема 7.1 (3) следва, че при $kl \equiv ab \pmod p$ е изпълнено $K(p; k, l) = K(p; a, b)$. Тогава получаваме

$$F \ge (p-1)\, |K(p; a, b)|^4. \tag{414}$$

От (413) и (414) следва

$$|K(p;a,b)|^4 \le 3p^2(p-1),$$

откъдето получаваме (404) .

$\square$

Оказва се, че Теорема 5.2 се доказва сравнително лесно в случая $q = p^l$, където p е просто число и $l \ge 2$. В настоящите записки няма да правим това, но ще илюстрираме казаното, като разгледаме случая когато $q = p^2$ и $p \nmid ab$. В общия случай (при произволно $l \ge 2$ и без ограничения върху a и b) се разсъждава по почти същия начин.

Теорема 7.3. *Нека p е просто число, $p \nmid ab$. Тогава е изпълнено*

$$\left|K\left(p^2;a,b\right)\right| \le 2p. \tag{415}$$

Доказателство. Ясно е, че числата

$$n = k + pm, \qquad 1 \le k \le p-1, \qquad 0 \le m \le p-1$$

образуват редуцирана система от остатъци по модул p^2, поради което имаме

$$K\left(p^2;a,b\right) = \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{m=0}^{p-1} e\left(\frac{a\,(k+pm) + b\,\overline{(k+pm)}_{(p^2)}}{p^2}\right). \tag{416}$$

(Тук за яснота отново означаваме обратния елемент на m по модул q чрез $\overline{m}_{(q)}$, за да подчертаем кой модул точно имаме предвид. Ще считаме също, че е изпълнено $\overline{m}_{(q)} \in \mathbb{Z}$, $1 \le \overline{m}_{(q)} \le q$.)

За да оценим сумата (416) търсим представяне на $\overline{(k+pm)}_{(p^2)}$ във вида

$$\overline{(k+pm)}_{(p^2)} \equiv A + pB \pmod{p^2}, \tag{417}$$

където $A, B \in \mathbb{Z}$, $p \nmid A$. Сравнението (417) ще бъде изпълнено, ако

$$(k+pm)(A+pB) \equiv 1 \pmod{p^2},$$

или все едно

$$kA + p(mA + kB) \equiv 1 \pmod{p^2}. \tag{418}$$

За да е вярно последното сравнение е необходимо да имаме

$$kA \equiv 1 \pmod{p},$$

следователно можем да изберем

$$A = \overline{k}_{(p)}. \tag{419}$$

Заместваме горната стойност на A в (418) и получаваме, че B удовлетворява линейното сравнение

$$pkB \equiv 1 - (k+pm)\overline{k}_{(p)} \pmod{p^2},$$

или все едно

$$kB \equiv \frac{1 - k\overline{k}_{(p)}}{p} - m\overline{k}_{(p)} \pmod p.$$

Оттук определяме

$$B \equiv \overline{k}_{(p)} \left(\frac{1 - k\overline{k}_{(p)}}{p} - m\overline{k}_{(p)} \right) \pmod p. \tag{420}$$

От (419) и (420) следва

$$A + pB \equiv 2\overline{k}_{(p)} - (k + pm)\big(\overline{k}_{(p)}\big)^2 \pmod{p^2} \tag{421}$$

От (416), (417) и (421) получаваме

$$K\left(p^2; a, b\right) = \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p-1} e\left(\frac{a\,(k+pm) + b\,\left(2\overline{k}_{(p)} - (k+pm)\big(\overline{k}_{(p)}\big)^2\right)}{p^2} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} e\left(\frac{ak + b\,\left(2\overline{k}_{(p)} - k\big(\overline{k}_{(p)}\big)^2\right)}{p^2} \right) \sum_{m=0}^{p-1} e\left(\frac{m\left(a - b\big(\overline{k}_{(p)}\big)^2\right)}{p} \right). \tag{422}$$

От Лема 4.9 (6) (УАТЧ-1) и от определението на $\overline{k}_{(p)}$ следва, че сумата по m в последния ред на горната формула е равна на p, ако

$$ak^2 \equiv b \pmod p \tag{423}$$

и на 0 в противен случай. Но сравнението (423) има най-много две решения, откъдето следва, че сумата по k в последния ред на (422) съдържа най-много две събираеми. Оттук получаваме (415).

□

7.2 Формулировка на резултатите, отнасящи се за някои суми, аналогични на сумата на Клостерман

Както вече обяснихме, с помощта на Теорема 5.2 могат да бъдат оценявани непълни суми на Клостерман, т.е. суми от вида

$$S_{\xi_1,\xi_2}(q,a) = \sum_{\xi_1 < n \le \xi_2}{}^{*}\, e\left(\frac{a\overline{n}}{q}\right), \tag{424}$$

където $\sum^*$ означава сумиране по числа взаимно прости с q и където $\xi_2 - \xi_1 < q$. Според Лема 5.3, при $(a,q) = 1$ е в сила

$$S_{\xi_1,\xi_2}(q,a) \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{425}$$

От друга страна за сумата (424) е изпълнена тривиалната оценка

$$|S_{\xi_1,\xi_2}(q,a)| \leq \xi_2 - \xi_1 + 1. \tag{426}$$

Като сравним (425) и (426) виждаме, че оценката (425) е по-добра от тривиалната оценка само ако интервалът $[\xi_1, \xi_2]$ е достатъчно дълъг, по-точно ако

$$\xi_2 - \xi_1 \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Доста често, обаче, се налага оценяването на суми от вида (424) със значително по-къси интервали на сумиране. Това е трудна задача, но някои важни стъпки към решаването ѝ са направени в статии на Карацуба [7], [8] и Корольов [9], публикувани в последните години. Там са изследвани суми аналогични на (424) и са получени нетривилани оценки за тях и в случаите когато дължината на интервала на сумиране съвсем малка — дори от порядък q^ε, където $\varepsilon > 0$ е произволно малко.

В настоящите записки ще формулираме и докажем (леко опростен вариант на) първата от поредицата теореми на Карацуба. Читателят може да получи по-подробна информация от статията [7].

Теорема 7.4 (Карацуба). *Нека $m, k \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $a \in \mathbb{Z}$, $X, X_1 \in \mathbb{R}$, $(a,m) = 1$ и нека*

$$k < X < X_1 \leq 2X, \qquad k\, 2^{2k-1} X^{2k-1} < m. \tag{427}$$

Разглеждаме сумата

$$W = \sum_{X<p\leq X_1}{}^{*} \sum_{X<q\leq X_1}{}^{*} e\left(\frac{a\overline{(pq)}}{m}\right), \tag{428}$$

където p и q са прости числа, $\sum^*$ означава сумиране по променливи, взаимно прости с m и $\overline{n}$ е обратният елемент на n по модул m. Тогава е в сила оценката

$$|W| \leq (\pi_1(X))^2\, \Delta, \tag{429}$$

където

$$\pi_1(X) = \pi(X_1) - \pi(X) - \sum_{\substack{X<p\leq X_1 \\ p|m}} 1 \tag{430}$$

и

$$\Delta = (k!)^{\frac{1}{k^2}} \left(m^{\frac{1}{2k}}\, \pi_1(X)^{-1}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{431}$$

Да отбележим, че за сумата (428) очевидно е в сила тривиалната оценка

$$|W| \leq (\pi_1(X))^2. \tag{432}$$

От друга страна, множителят Δ, който фигурира в дясната страна на (429) и се определя чрез (431), е от порядък $m^{-\delta}$ за някое $\delta > 0$ дори и при X от порядък m^ε за произволно малко $\varepsilon > 0$. Наистина, нека изберем k така, че $\frac{1}{2k-1} < \varepsilon$ и нека определим

$X = 4^{-1}k^{-\frac{1}{2k-1}}\, m^{\frac{1}{2k-1}}$, като считаме, че m е достатъчно голямо. Лесно се вижда, че тогава $\pi_1(X) \asymp m^{\frac{1}{2k-1}} (\log m)^{-1}$, откъдето получаваме $\Delta \asymp m^{-\frac{1}{2k^2(2k-1)}} (\log m)^{\frac{1}{k}}$. (Константите в знаците $\asymp$ зависят от k). Това означава, че оценката (429) е по-добра от тривиалната оценка (432) дори и при някои $X < m^{\varepsilon}$.

Оценките на експоненциални суми, получени от Карацуба и Корольов имат интересни аритметични приложения — например при изследването на разпределението на числата

$$\left\{ \frac{\overline{k}}{m} \right\}, \qquad k = 1, 2, \dots, K,$$

където m и K са зададени естествени числа, като K е много по-малко от m (от порядък m^{ε} при произволно малко $\varepsilon > 0$), а $\{t\}$ означава дробната част на t. В настоящите записки няма да се спираме на тези приложения. За по-подробна информация читателят може да се обърне към статиите на Карацуба [7], [8] и Корольов [9].

Естествен аналог на сумата (424) се получава, ако оставим n да пробягва само простите числа от интервала $(\xi_1, \xi_2]$. Нетривиална оценка на сума от такъв вид е получена неодавна от Гараев [5]. В настоящите записки ще формулираме и докажем неговия резултат и ще покажем, че той намира приложение при изследването на броя на решенията на сравнения от специален вид.

Теорема 7.5 (Гараев)**.** *Нека p е достатъчно голямо просто число, $a \in \mathbb{Z}$, $p \nmid a$ и нека $1 < N < p$. Определяме сумата*

$$S = S_a(p; N) = \sum_{q \le N} e\left(\frac{a\overline{q}}{p}\right), \tag{433}$$

където q пробягва прости числа и $\overline{q}$ е обратният елемент на q по модул p. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ е в сила

$$S \ll \left(N^{\frac{15}{16}} + N^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{4}}\right) p^{\varepsilon}, \tag{434}$$

като константата в знака $\ll$ зависи само от ε.

Лесно се вижда, че оценката (434) е нетривиална при $p^{\frac{3}{4}+\varepsilon} < N < p$, където $\varepsilon > 0$ е произволно малко.

От Теорема 7.5 се получава

Следствие 7.6. *Нека p е достатъчно голямо просто число, $N \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $p \nmid \lambda$ и*

$$p^{\frac{16}{17}+\varepsilon} < N < p, \tag{435}$$

където $\varepsilon > 0$ е произволно малко. Тогава, ако $R(N; \lambda)$ е броят на решенията на сравнението

$$q_1(q_2 + q_3) \equiv \lambda \pmod{p} \tag{436}$$

в прости числа $q_1, q_2, q_3 \le N$, то е в сила асимптотичната формула

$$R(N; \lambda) = \frac{(\pi(N))^3}{p} \Big(1 + O\left(p^{-\delta}\right)\Big), \qquad \delta = \delta(\varepsilon) > 0. \tag{437}$$

Константата в знака O зависи само от ε.

Съвсем наскоро Фаври и Шпарлински [18] показаха, че суми, много близки до тази разглеждана в Теорема 7.5, възникват при решаването на задачи, отнасящи се до свойствата на тернарни квадратични форми с прости неизвестни — например при изследването на числата от вида

$$p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3,$$

където p_1, p_2, p_3 пробягват простите числа ненадминаващи зададена величина. Читателят може да намери повече информация по този въпрос в статията [18].

7.3 Леми, необходими за доказателството на Теорема 7.4.

Ще започнем със следните добре известни неравенства, които са непосредствено следствие от неравенството на Хьолдер.

Лема 7.7. *Нека $k \in \mathbb{N}$ и нека са дадени числата $\alpha_j, \beta_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, N$. Имаме*

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \beta_j \right)^k \leq \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \right)^{k-1} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \beta_j^k \tag{438}$$

и в частност

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \beta_j \right)^k \leq N^{k-1} \sum_{j=1}^{N} \beta_j^k. \tag{439}$$

□

Следващата лема е един от основните резултати, които се използват при доказателството на Теорема 7.4.

Лема 7.8. *Нека $m, k \in \mathbb{N}$; $X, X_1 \in \mathbb{R}$; $m > 1$ и нека*

$$k < X < X_1 \leq 2X, \qquad k\, 2^{2k-1} X^{2k-1} < m. \tag{440}$$

Означаваме с $I = I_{m,k}(X, X_1)$ броя на решенията на сравнението

$$\overline{p_1} + \cdots + \overline{p_k} \equiv \overline{p_{k+1}} + \cdots + \overline{p_{2k}} \pmod{m} \tag{441}$$

в прости числа $p_1, \ldots, p_{2k}$, за които

$$X < p_j \leq X_1, \qquad p_j \nmid m, \qquad 1 \leq j \leq 2k, \tag{442}$$

($\overline{p_j}$ е обратният елемент на p_j по модул m).

Тогава е в сила оценката

$$I \leq k!\, \left(\pi_1(X)\right)^k, \tag{443}$$

където $\pi_1(X)$ е определено чрез (430).

Доказателство. За да установим неравенството (443) е достатъчно да докажем, че ако са налице условията на лемата, то k-торката $p_{k+1}, \dots, p_{2k}$ представлява пренареждане на $p_1, \dots, p_k$, а за да докажем това е достатъчно да проверим, че p_1 съвпада с някое от числата $p_{k+1}, \dots, p_{2k}$.

Да допуснем, че това не е вярно, т.е. $p_1 \neq p_j$ за $k+1 \le j \le 2k$. Събираме еднаквите събираеми от лявата страна на (441) на едно място и, ако се налага извършваме преименуване. Получаваме сравнението

$$a_1\overline{p_1} + \dots + a_t\overline{p_t} \equiv \overline{p_{k+1}} + \dots + \overline{p_{2k}} \pmod{m}, \tag{444}$$

където

$$a_1, \dots, a_t \in \mathbb{N}, \qquad a_1 + \dots + a_t = k. \tag{445}$$

При това p_1 не съвпада с никое от числата p_j, $j = 2, \dots, t; k+1, \dots, 2k$.

Полагаме

$$A = p_1 \dots p_t p_{k+1} \dots p_{2k}, \tag{446}$$

$$A_j = \frac{A}{p_j}, \qquad j = 1, \dots, t; k+1, \dots, 2k. \tag{447}$$

Умножаваме двете страни на сравнението (444) с числото A и, като използваме (447) и факта, че $p_j\overline{p_j} \equiv 1 \pmod{m}$, получаваме

$$a_1A_1 + \dots + a_tA_t \equiv A_{k+1} + \dots + A_{2k} \pmod{m}. \tag{448}$$

Но от определенията (446), (447) и от условията (440), (442) следва

$$A_j \le (2X)^{2k-1}, \qquad j = 1, \dots, t; k+1, \dots, 2k,$$

и, като вземем предвид (440) и (445), получаваме

$$0 < a_1A_1 + \dots + a_tA_t < m, \qquad 0 < A_{k+1} + \dots + A_{2k} < m$$

От горните неравенства и от (448) виждаме, че всъщност е изпълнено

$$a_1A_1 + \dots + a_tA_t = A_{k+1} + \dots + A_{2k}. \tag{449}$$

От (446) и (447) следва, че $p_1 \nmid A_1$ и $p_1 \mid A_j$ при $j = 2, \dots, t; k+1, \dots, 2k$. Оттук и от (449) заключаваме, че $p_1 \mid a_1$. Но според (445) имаме $a_1 \le k$ и затова трябва да е изпълнено $p_1 \le k$. От друга страна, по условие е дадено $k < X$ и също знаем, че $X < p_1$. Получаваме противоречие, с което Лема 7.8 е доказана.

$\square$

7.4 Доказателство на Теорема 7.4.

От (428) следва

$$|W| \le \sum_{X<p\le X_1}^{\quad *} \left| \sum_{X<q\le X_1}^{\quad *} e\left(\frac{a\,\overline{(pq)}}{m}\right)\right| .$$

Повдигаме двете страни на горното неравенство в степен k и използуваме определението (430), както и неравенството (439) от Лема 7.7. Получаваме

$$|W|^k \le (\pi_1(X))^{k-1} \sum_{X<p\le X_1}^{\quad *} \left| \sum_{X<q\le X_1}^{\quad *} e\left(\frac{a\,\overline{(pq)}}{m}\right)\right|^k$$

$$= (\pi_1(X))^{k-1} \sum_{X<p\le X_1}^{\quad *} \left| \left(\sum_{X<q\le X_1}^{\quad *} e\left(\frac{a\,\overline{(pq)}}{m}\right)\right)^k \right|$$

$$= (\pi_1(X))^{k-1} \sum_{X<p\le X_1}^{\quad *} \eta_p \left(\sum_{X<q\le X_1}^{\quad *} e\left(\frac{a\,\overline{(pq)}}{m}\right)\right)^k , \tag{450}$$

където η_p са комплексни числа, за които

$$|\eta_p| = 1. \tag{451}$$

(Тук използувахме, че за всяко $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ е изпълнено $|z| = z\, e^{-i \arg z}$).

По-нататък, имаме

$$\left(\sum_{X<q\le X_1}^{\quad *} e\left(\frac{a\,\overline{(pq)}}{m}\right)\right)^k = \sum_{X<q_1,\dots,q_k\le X_1}^{\quad *} e\left(\frac{a\,\overline{p}\;(\overline{q_1} + \cdots + \overline{q_k})}{m}\right)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{m} J(\lambda)\, e\left(\frac{a\,\overline{p}\,\lambda}{m}\right) , \tag{452}$$

където $J(\lambda)$ е броят на решенията на сравнението

$$\overline{q_1} + \cdots + \overline{q_k} \equiv \lambda \pmod m$$

в прости числа $q_1, \dots, q_k$, за които

$$X < q_j \le X_1, \qquad q_j \nmid m, \qquad j = 1, \dots, k.$$

Заместваме израза от (452) в (450), след което сменяме реда на сумиране и получаваме

$$|W|^k \le (\pi_1(X))^{k-1} \sum_{X<p\le X_1}^{\quad *} \eta_p \sum_{\lambda=1}^{m} J(\lambda)\, e\left(\frac{a\,\overline{p}\,\lambda}{m}\right)$$

$$= (\pi_1(X))^{k-1} \sum_{\lambda=1}^{m} J(\lambda) \sum_{X<p\le X_1}^{\quad *} \eta_p\, e\left(\frac{a\,\overline{p}\,\lambda}{m}\right) .$$

Сега, като приложим неравенството на триъгълника виждаме, че

$$|W|^k \le (\pi_1(X))^{k-1} \sum_{\lambda=1}^{m} J(\lambda) \left| \sum_{X<p\le X_1}{}^{*} \eta_p \, e\left(\frac{a\,\overline{p}\,\lambda}{m}\right) \right|.$$

Повдигаме двете страни на последното неравенство в степен k и прилагаме оценката (438) от Лема 7.7, при което получаваме

$$|W|^{k^2} \le (\pi_1(X))^{k(k-1)} \, \mathfrak{S}_1^{k-1} \, \mathfrak{S}_2, \tag{453}$$

където

$$\mathfrak{S}_1 = \sum_{\lambda=1}^{m} J(\lambda), \qquad \mathfrak{S}_2 = \sum_{\lambda=1}^{m} J(\lambda) \left| \sum_{X<p\le X_1}{}^{*} \eta_p \, e\left(\frac{a\,\overline{p}\,\lambda}{m}\right) \right|^k.$$

От определението на $J(\lambda)$ и от (430) непосредствено следва

$$\mathfrak{S}_1 = \sum_{X<q_1,\dots,q_k\le X_1}{}^{*} 1 = (\pi_1(X))^k. \tag{454}$$

За да оценим сумата $\mathfrak{S}_2$, прилагаме неравенството на Коши и получаваме

$$\mathfrak{S}_2 \le \sqrt{\mathfrak{S}_3 \, \mathfrak{S}_4}, \tag{455}$$

където

$$\mathfrak{S}_3 = \sum_{\lambda=1}^{m} (J(\lambda))^2, \qquad \mathfrak{S}_4 = \sum_{\lambda=1}^{m} \left| \sum_{X<p\le X_1}{}^{*} \eta_p \, e\left(\frac{a\,\overline{p}\,\lambda}{m}\right) \right|^{2k}. \tag{456}$$

Да разгледаме $\mathfrak{S}_3$. От определението на $J(\lambda)$ следва

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_3 &= \sum_{\lambda=1}^{m} \left(\sum_{\substack{X<q_1,\dots,q_k\le X_1 \\ \overline{q_1}+\dots+\overline{q_k}\equiv\lambda\,(m)}}{}^{*} 1 \right) \left(\sum_{\substack{X<q_{k+1},\dots,q_{2k}\le X_1 \\ \overline{q_{k+1}}+\dots+\overline{q_{2k}}\equiv\lambda\,(m)}}{}^{*} 1 \right) \\
&= \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{\substack{X<q_1,\dots,q_{2k}\le X_1 \\ \overline{q_1}+\dots+\overline{q_k}\equiv\overline{q_{k+1}}+\dots+\overline{q_{2k}}\equiv\lambda\,(m)}}{}^{*} 1 \\
&= \sum_{\substack{X<q_1,\dots,q_{2k}\le X_1 \\ \overline{q_1}+\dots+\overline{q_k}\equiv\overline{q_{k+1}}+\dots+\overline{q_{2k}}\,(m)}}{}^{*} 1.
\end{aligned}$$

Очевидно последната сума съвпада с величината $I_{m,k}(X, X_1)$, определена в Лема 7.8. Тогава, като използуваме неравенството (443), получаваме

$$\mathfrak{S}_3 \le k! \, (\pi_1(X))^k. \tag{457}$$

Остава да оценим сумата $\mathfrak{S}_4$, зададена чрез (456). Използуваме, че за произволно $z \in \mathbb{C}$ е изпълнено $|z|^{2k} = z^k \overline{z}^k$ и получаваме

$$\mathfrak{S}_4 = \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{X<p_1,\dots,p_k\le X_1}{}^{*} \eta_{p_1}\dots\eta_{p_k}\, e\left(\frac{a\left(\overline{p_1}+\dots+\overline{p_k}\right)\lambda}{m}\right)$$

$$\times \sum_{X<p_{k+1},\dots,p_{2k}\le X_1}{}^{*} \overline{\eta_{p_{k+1}}}\dots\overline{\eta_{p_{2k}}}\, e\left(-\frac{a\left(\overline{p_{k+1}}+\dots+\overline{p_{2k}}\right)\lambda}{m}\right)$$

$$= \sum_{X<p_1,\dots,p_{2k}\le X_1}{}^{*} \eta_{p_1}\dots\eta_{p_k}\,\overline{\eta_{p_{k+1}}}\dots\overline{\eta_{p_{2k}}}$$

$$\times \sum_{\lambda=1}^{m} e\left(\frac{a\lambda\left(\overline{p_1}+\ldots+\overline{p_k}-\overline{p_{k+1}}-\dots-\overline{p_{2k}}\right)}{m}\right).$$

Но от условието $(a,m)=1$ и от Лема 4.9 (6) (УАТЧ-1) следва, че сумата по λ в последния ред на горната формула е равна на m, ако числата $p_1,\dots,p_{2k}$ удовлетворяват (441) и на 0 в противен случай. Тогава, като вземем също предвид (451) виждаме, че

$$\mathfrak{S}_4 \le m\, I_{m,k}(X,X_1)$$

където $I_{m,k}(X,X_1)$ е величината, определена в Лема 7.8. Оттук и от (443) получаваме

$$\mathfrak{S}_4 \le m\, k!\, \left(\pi_1(X)\right)^k. \tag{458}$$

От (453) – (455), (457) и (458) следва

$$|W|^{k^2} \le \Big(\pi_1(X)\Big)^{k(k-1)} \Big(\big(\pi_1(X)\big)^k\Big)^{k-1} \Big(k!\,\big(\pi_1(X)\big)^k\Big)^{\frac12} \Big(m\,k!\,\big(\pi_1(X)\big)^k\Big)^{\frac12}$$

$$= \big(\pi_1(X)\big)^{2k^2-k}\, k!\, m^{\frac12}.$$

Остава да извлечем корен от ред k^2 и получаваме (429), с което Теорема 7.4 е доказана.

□

7.5 Леми, необходими за доказателството на Теорема 7.5

Ще започнем със следната проста лема, която, както е забелязал още И. М. Виноградов, в редица случаи е твърде полезна. За повече информация и за други интересни приложения на тази лема препоръчваме на читателя известния учебник по елементарна теория на числата [2].

Лема 7.9. *Нека p е просто число, $a \in \mathbb{Z}$, $p \nmid a$ и нека $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, p$. Тогава за сумата*

$$\mathcal{W} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} \alpha_k \beta_l \, e\left(\frac{akl}{p}\right) \tag{459}$$

е в сила неравенството

$$|\mathcal{W}| \leq \sqrt{p\,\mathcal{A}\mathcal{B}}, \tag{460}$$

където

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{p} |\alpha_k|^2, \qquad \mathcal{B} = \sum_{k=1}^{p} |\beta_k|^2. \tag{461}$$

Доказателство. От (459), (461) и от неравенството на Коши следва

$$|\mathcal{W}| \leq \sum_{k=1}^{p} |\alpha_k| \left| \sum_{l=1}^{p} \beta_l \, e\left(\frac{akl}{p}\right) \right| \leq \sqrt{\mathcal{A}\,\mathfrak{S}}, \tag{462}$$

където

$$\mathfrak{S} = \sum_{k=1}^{p} \left| \sum_{l=1}^{p} \beta_l \, e\left(\frac{akl}{p}\right) \right|^2 .$$

Ясно е, че

$$\mathfrak{S} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l_1=1}^{p} \sum_{l_2=1}^{p} \beta_{l_1} \overline{\beta_{l_2}} \, e\left(\frac{ak(l_1 - l_2)}{p}\right) = \sum_{l_1=1}^{p} \sum_{l_2=1}^{p} \beta_{l_1} \overline{\beta_{l_2}} \sum_{k=1}^{p} e\left(\frac{ak(l_1 - l_2)}{p}\right).$$

От условието $p \nmid a$ и от Лема 4.9 (6) (УАТЧ-1) следва, че сумата по k в дясната страна на горното равенство е равна на p, ако $l_1 \equiv l_2 \pmod{p}$, и на 0 в противен случай. Оттук и от (461) следва

$$\mathfrak{S} = p\,\mathcal{B}.$$

Заместваме този израз в (462) и получаваме (460).

$\square$

Следващата лема е получена от Хийт-Браун [20] и използвана от него при решаването на друга задача. Както ще се убедим, тя играе важна роля и при доказателството на Теорема 7.5.

Лема 7.10. *Нека $1 < K < p$ и нека J_K е броят на решенията на сравнението*

$$\overline{x_1} + \overline{x_2} \equiv \overline{x_3} + \overline{x_4} \pmod{p} \tag{463}$$

в цели числа $x_1, \dots, x_4$, за които

$$1 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq K. \tag{464}$$

Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ е изпълнено

$$J_K \ll \left(K^{\frac{7}{2}} p^{-\frac{1}{2}} + K^2\right) p^{\varepsilon}, \tag{465}$$

като константата в знака $\ll$ завсиси само от ε.

Преди да докажем тази лема, ще отбележим, че от нея непосредствено се получава

Следствие 7.11. *Нека са изпълнени условията на Лема 7.10.*

(1) *При* $K \ll p^{\frac{1}{3}}$ *имаме* $J_K \ll K^2 p^{\varepsilon}$.

(2) *При* $K \gg p^{\frac{1}{3}}$ *имаме* $J_K \ll K^{\frac{7}{2}} p^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Константите в знаците $\ll$ *в оценките за* J_K*, освен от* ε*, зависят и от константите, участващи в съответните неравенства за* K.

□

Доказателство на Лема 7.10. За произволно $\lambda \in \mathbb{Z}$ означаваме с $I_K(\lambda)$ броя на решенията на сравнението

$$x_1 + x_2 \equiv \lambda x_1 x_2 \pmod p \tag{466}$$

в цели числа, удовлетворяващи

$$1 \le x_1, x_2 \le K. \tag{467}$$

Ясно е, че сравнението (466) е еквивалентно на

$$\overline{x_1} + \overline{x_2} \equiv \lambda \pmod p.$$

Оттук и от определенията на J_K и $I_K(\lambda)$ следва

$$J_K = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{\substack{1\le x_1,\dots x_4 \le K \\ \overline{x_1}+\overline{x_2} \equiv \overline{x_3}+\overline{x_4} \equiv \lambda \ (p)}} 1 = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \left(I_K(\lambda)\right)^2.$$

Очевидно имаме $I_K(0) \le K$, следователно

$$J_K \le K^2 + \sum_{\lambda=1}^{p-1} \left(I_K(\lambda)\right)^2 \le K^2 + \left(\max_{1\le\lambda\le p-1} I_K(\lambda)\right) \sum_{\lambda=0}^{p-1} I_K(\lambda).$$

Тъй като

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} I_K(\lambda) = \sum_{1\le x_1, x_2 \le K} 1 \le K^2,$$

то получаваме

$$J_K \le K^2 \left(1 + \max_{1\le\lambda\le p-1} I_K(\lambda)\right). \tag{468}$$

Остава да докажем, че

$$\max_{1\le\lambda\le p-1} I_K(\lambda) \ll \left(K^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{1}{2}} + 1\right) p^{\varepsilon} \tag{469}$$

и тогава ще получим оценката (465) като следствие от (468) и (469).

Да вземем произволно $\lambda \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ и да разгледаме съвокупността от числата $u + \lambda v$, където

$$u, v \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \le u \le \sqrt{p\,K^{-1}}, \qquad 0 \le v \le \sqrt{p\,K}. \tag{470}$$

Броят на наредените двойки u, v, за които са изпълнени горните условия, е равен на

$$\left(1 + \left[\sqrt{p\,K^{-1}}\right]\right)\left(1 + \left[\sqrt{p\,K}\right]\right) > \sqrt{p\,K^{-1}}\,\sqrt{p\,K} = p.$$

Затова, според принципа на Дирихле, съществуват две различни наредени двойки u_1, v_1 и съответно u_2, v_2, които удовлетворяват (470) и също сравнението

$$u_1 + \lambda v_1 \equiv u_2 + \lambda v_2 \pmod p. \tag{471}$$

Ясно е, че

$$u_1 \not\equiv u_2 \pmod p, \qquad v_1 \not\equiv v_2 \pmod p,$$

тъй като, ако е вярно някое от тези сравнения, то от (470) и (471) ще следва, че $u_1 = u_2$ и $v_1 = v_2$, а според нашето допускане наредените двойки u_j, v_j, $j = 1, 2$ са различни.

Полагаме

$$u_0 = u_2 - u_1, \qquad v_0 = v_1 - v_2$$

и тогава от (471) следва

$$\lambda v_0 \equiv u_0 \pmod p, \tag{472}$$

а също така ще имаме

$$0 < |u_0| \le \sqrt{p\,K^{-1}}, \qquad 0 < |v_0| \le \sqrt{p\,K}. \tag{473}$$

Като умножим двете страни на (466) с v_0 и използуваме (472), получаваме

$$v_0(x_1 + x_2) \equiv u_0 x_1 x_2 \pmod p. \tag{474}$$

Тогава $I_K(\lambda)$ е равно на броя на двойките x_1, x_2, удовлетворяващи (467) и (474).

По-нататък, от (474) следва, че за някое $z \in \mathbb{Z}$ е изпълнено

$$v_0(x_1 + x_2) = u_0 x_1 x_2 + pz. \tag{475}$$

От (467), (473) и (475) следва

$$|z| \le \big(\,|v_0|(x_1 + x_2) + |u_0| x_1 x_2\,\big) p^{-1} \le 3K^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{1}{2}} \tag{476}$$

По-нататък, лесно се вижда, че равенството (475) е еквивалентно на

$$(u_0 x_1 - v_0)\,(u_0 x_2 - v_0) = v_0^2 - u_0 p z.$$

Но $v_0^2 - u_0 p z \ne 0$, тъй като в противен случай бихме имали $p \mid v_0$. Освен това, при фиксирано z числата x_1, x_2 са такива, че $u_0 x_j - v_0$, $j = 1, 2$, са делители на

$v_0^2 - u_0 pz$. Следователно броят на възможните стойности, които може да приема всяко от числата x_j не надхвърля

$$2\,\tau\left(v_0^2 - u_0 pz\right) \ll p^{\varepsilon}.$$

(Тук използувахме Лема 3.33 (УАТЧ-1)). Сега, като вземем предвид (476), получаваме

$$I_K(\lambda) \ll p^{\varepsilon} \sum_{|z| \le 3K^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{1}{2}}} 1 \ll \left(K^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{1}{2}} + 1\right) p^{\varepsilon}.$$

С това оценката (469) е установена и доказателството на лемата е завършено.

$\square$

В началото на глава 4 от настоящите записки изяснихме, че за да оценим експоненциална сума по прости числа е достатъчно да оценим съответните суми от първи и от втори вид (виж параграф 4.2). Следващата лема ни дава възможност да оценяваме сумите от първи и от втори тип, които отговарят на сумата (433) от Теорема 7.5.

Лема 7.12. *Нека p е просто число, $a \in \mathbb{Z}$, $p \nmid a$. Дадени са числата D, L, удовлетворяващи*

$$0 < D < \frac{p}{2}, \qquad 0 < L < \frac{p}{2}, \tag{477}$$

като за всяко цяло $d \in (D, 2D]$ са определени $L_1(d), L_2(d)$, за които

$$L \le L_1(d) < L_2(d) \le 2L, \tag{478}$$

и за всяко цяло $l \in (L, 2L]$ е зададено $\beta(l) \in \mathbb{C}$, така че

$$\max_{L < l \le 2L} |\beta(l)| \le B. \tag{479}$$

Тогава за сумата

$$W = \sum_{D < d \le 2D} \left| \sum_{L_1(d) < l \le L_2(d)} \beta(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right) \right| \tag{480}$$

са в сила следните оценки.

(1) *Ако $p^{\frac{1}{3}} \ll D$ и $p^{\frac{1}{3}} \ll L$, то*

$$W \ll B\, p^{\varepsilon}\, D^{\frac{15}{16}}\, L^{\frac{15}{16}}. \tag{481}$$

(2) *Ако $L \ll p^{\frac{1}{3}}$, то*

$$W \ll B\, p^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\, D^{\frac{3}{4}}\, L^{\frac{1}{2}}. \tag{482}$$

(3) *Ако $D \ll p^{\frac{1}{3}}$, то*

$$W \ll B\, p^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\, D^{\frac{1}{2}}\, L^{\frac{3}{4}}. \tag{483}$$

Константите в знаците $\ll$ във формулите (481) – (483), освен от ε, зависят и от константите в съответните неравенства за D и L.

Доказателство. Без ограничение на общността можем да считаме, че $L_1(d) = L$ и $L_2(d) = 2L$. Наистина, нека сме доказали твърдението в този случай. Тогава, за да оценим $|W|$ в общия случай, прилагаме (477), (478) и Лема 4.9 (6) (УАТЧ-1) и получаваме

$$\sum_{L_1(d)<l\le L_2(d)} \beta(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right) = \sum_{L<l\le 2L} \beta(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right) \sum_{\substack{L_1(d)<h\le L_2(d)\\ l\equiv h\ (p)}} 1$$

$$= \sum_{L<l\le 2L} \beta(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right) \sum_{L_1(d)<h\le L_2(d)} \frac{1}{p} \sum_{-\frac{p}{2}<t\le\frac{p}{2}} e\left(\frac{t(l-h)}{p}\right)$$

$$= \sum_{-\frac{p}{2}<t\le\frac{p}{2}} \varkappa_{t,d} \sum_{L<l\le 2L} \beta_t^*(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right), \tag{484}$$

където

$$\varkappa_{t,d} = \frac{1}{p} \sum_{L_1(d)<h\le L_2(d)} e\left(-\frac{th}{p}\right), \qquad \beta_t^*(l) = \beta(l)\, e\left(\frac{tl}{p}\right).$$

Ясно е, че

$$|\beta_t^*(l)| = |\beta(l)| \le B,$$

а от Лема 4.10 (УАТЧ-1) имаме

$$|\varkappa_{t,d}| \le \begin{cases} 1 & \text{ако} \quad t = 0, \\ \frac{1}{|t|} & \text{ако} \quad 0 < |t| \le \frac{p}{2}. \end{cases} \tag{485}$$

Тогава от (480), (484) и (485) следва

$$W \le \sum_{D<d\le 2D} \left| \sum_{L<l\le 2L} \beta(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right) \right| + \sum_{1\le|t|\le\frac{p}{2}} \frac{1}{|t|} \sum_{D<d\le 2D} \left| \sum_{L<l\le 2L} \beta_t^*(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right) \right|.$$

Но, според нашето допускане, сумите по d в дясната страна на горното неравенство се оценяват, в зависимост от разглеждания случай, посредством изразите в десните страни на (481), (482) или (483). Сумирането по t допринася за появата на допълнителен множител $\log p$, но след предефиниране на ε виждаме, че указаните оценки за W са верни и в общия случай.

И така, оттук нататък считаме, че

$$W = \sum_{D<d\le 2D} \left| \sum_{L<l\le 2L} \beta(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right) \right|. \tag{486}$$

При зададено $\lambda \in \mathbb{Z}$ означаваме с $H_D(\lambda)$ броя на наредените двойки n_1, n_2, за които

$$\overline{n_1} - \overline{n_2} \equiv \lambda \pmod{p}, \qquad D < n_1, n_2 \le 2D.$$

От (486) и от неравенството на Коши следва

$$W^2 \ll D \sum_{D<d\le 2D} \left| \sum_{L<l\le 2L} \beta(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right)\right|^2$$

$$= D \sum_{D<d\le 2D} \; \sum_{L<l_1,l_2\le 2L} \beta(l_1)\,\overline{\beta(l_2)}\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\left(\overline{l_1}-\overline{l_2}\right)}{p}\right)$$

$$= D \sum_{L<l_1,l_2\le 2L} \beta(l_1)\,\overline{\beta(l_2)} \; \sum_{D<d\le 2D} e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\left(\overline{l_1}-\overline{l_2}\right)}{p}\right).$$

Оттук и от (479) получаваме

$$W^2 \ll B^2\, D \sum_{L<l_1,l_2\le 2L} \left| \sum_{D<d\le 2D} e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\left(\overline{l_1}-\overline{l_2}\right)}{p}\right)\right|.$$

Прилагаме отново неравенството на Коши, както и определението за $H_D(\lambda)$, и виждаме, че

$$W^4 \ll B^4\, D^2\, L^2 \sum_{L<l_1,l_2\le 2L} \left| \sum_{D<d\le 2D} e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\left(\overline{l_1}-\overline{l_2}\right)}{p}\right)\right|^2$$

$$= B^4\, D^2\, L^2 \sum_{L<l_1,l_2\le 2L} \; \sum_{D<d_1,d_2\le 2D} e\left(\frac{a\,\left(\overline{d_1}-\overline{d_2}\right)\,\left(\overline{l_1}-\overline{l_2}\right)}{p}\right)$$

$$= B^4\, D^2\, L^2 \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} H_D(\lambda)\, H_L(\mu)\, e\left(\frac{a\,\lambda\,\mu}{p}\right). \tag{487}$$

Полагаме

$$\mathcal{H}(D) = \sum_{\lambda=1}^{p} \left(H_D(\lambda)\right)^2,$$

и, като използваме (487) и Лема 7.9, получаваме

$$W^4 \ll B^4\, D^2\, L^2 \sqrt{p\,\mathcal{H}(D)\,\mathcal{H}(L)}. \tag{488}$$

За да оценим $\mathcal{H}(D)$, използуваме определението на $H_D(\lambda)$ и виждаме, че

$$\mathcal{H}(D) = \sum_{\lambda=1}^{p} \Bigg(\sum_{\substack{D<n_1,n_2\le 2D \\ \overline{n_1}-\overline{n_2}\equiv\lambda\ (p)}} 1 \Bigg) \Bigg(\sum_{\substack{D<n_3,n_4\le 2D \\ \overline{n_3}-\overline{n_4}\equiv\lambda\ (p)}} 1 \Bigg) = \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\substack{D<n_1,\dots,n_4\le 2D \\ \overline{n_1}-\overline{n_2}\equiv\overline{n_3}-\overline{n_4}\equiv\lambda\ (p)}} 1$$

$$= \sum_{\substack{D<n_1,\dots,n_4\le 2D \\ \overline{n_1}-\overline{n_2}\equiv\overline{n_3}-\overline{n_4}\ (p)}} 1 = \sum_{\substack{D<n_1,\dots,n_4\le 2D \\ \overline{n_1}+\overline{n_4}\equiv\overline{n_3}+\overline{n_2}\ (p)}} 1.$$

Следователно

$$\mathcal{H}(D) \le J_{2D},$$

където J_K е величината, определена в Лема 7.10 чрез формулите (463) и (464).

Сега да допуснем, че $p^{\frac{1}{3}} \ll D$ и $p^{\frac{1}{3}} \ll L$. Тогава, като използуваме Следствие 7.11, виждаме, че

$$\mathcal{H}(D) \ll D^{\frac{7}{2}}\, p^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}, \qquad \mathcal{H}(L) \ll L^{\frac{7}{2}}\, p^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Като заместим тези оценки в (488), получаваме

$$W^4 \ll B^4\, p^{\varepsilon}\, D^{\frac{15}{4}}\, L^{\frac{15}{4}}.$$

От горната оценка следва (481), с което твърдението от Лема 7.12 (1) е доказано.

Нека сега имаме $L \ll p^{\frac{1}{3}}$. Като използуваме (486) и неравенството (439) от Лема 7.7 получаваме

$$W^4 \ll D^3 \sum_{D<d\le 2D} \Bigg| \sum_{L<l\le 2L} \beta(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right) \Bigg|^4 .$$

Но като вземем предвид (477) виждаме, че всички цели числа d от интервала $(D, 2D]$ удовлетворяват $1 \le d \le p-1$. Освен това, когато d пробягва числата $1, 2, \dots, p-1$, то обратният му елемент $\overline{d}$ пробягва редуцирана система от остатъци по модул p. Следователно

$$W^4 \ll D^3 \sum_{d=1}^{p-1} \Bigg| \sum_{L<l\le 2L} \beta(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right) \Bigg|^4 = D^3 \sum_{d=1}^{p-1} \Bigg| \sum_{L<l\le 2L} \beta(l)\, e\left(\frac{a\,d\,\overline{l}}{p}\right) \Bigg|^4,$$

а оттук намираме

$$W^4 \ll D^3 \sum_{d=1}^{p} \Bigg| \sum_{L<l\le 2L} \beta(l)\, e\left(\frac{a\,d\,\overline{l}}{p}\right) \Bigg|^4$$

$$= D^3 \sum_{d=1}^{p} \sum_{L<l_1,\dots,l_4\le 2L} \beta(l_1)\,\beta(l_2)\,\overline{\beta(l_3)}\,\overline{\beta(l_4)} e\left(\frac{a\,d\,\left(\overline{l_1}+\overline{l_2}-\overline{l_3}-\overline{l_4}\right)}{p}\right).$$

Сега сменяме реда на сумиране и, като използуваме Лема 4.9 (6) (УАТЧ-1), (479) и също условието $p \nmid a$, получаваме

$$W^4 \ll D^3 \sum_{L<l_1,\dots,l_4\le 2L} \beta(l_1)\,\beta(l_2)\,\overline{\beta(l_3)}\,\overline{\beta(l_4)} \sum_{d=1}^{p} e\left(\frac{a\,d\,\left(\overline{l_1}+\overline{l_2}-\overline{l_3}-\overline{l_4}\right)}{p}\right)$$

$$= p\,D^3 \sum_{\substack{L<l_1,\dots,l_4\le 2L \\ \overline{l_1}+\overline{l_2}\equiv\overline{l_3}+\overline{l_4}\ (p)}} \beta(l_1)\,\beta(l_2)\,\overline{\beta(l_3)}\,\overline{\beta(l_4)}$$

$$\ll p\,B^4\,D^3 \sum_{\substack{L<l_1,\dots,l_4\le 2L \\ \overline{l_1}+\overline{l_2}\equiv\overline{l_3}+\overline{l_4}\ (p)}} 1$$

$$\ll p\,B^4\,D^3\,J_{2L},$$

където J_K е величината, определена в Лема 7.10. Но според Следствие 7.11 имаме

$$J_{2L} \ll p^{\varepsilon} L^2 \qquad \text{при} \qquad L \ll p^{\frac{1}{3}}.$$

Тогава получаваме

$$W^4 \ll p^{1+\varepsilon}\,B^4\,D^3\,L^2,$$

откъдето следва (482). С това твърдение (2) на Лема 7.12 е доказано.

Остава да разгледаме случая $D \ll p^{\frac{1}{3}}$. Като използуваме (486) и факта, че за всяко $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ имаме $|z| = ze^{-i\arg z}$, записваме

$$W = \sum_{D<d\le 2D} \eta(d) \sum_{L<l\le 2L} \beta(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right) = \sum_{L<l\le 2L} \beta(l) \sum_{D<d\le 2D} \eta(d)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right), \qquad (489)$$

където

$$|\eta(d)| = 1. \qquad (490)$$

От (479) и (489) следва

$$W \le B\,\widetilde{W}, \qquad (491)$$

където

$$\widetilde{W} = \sum_{L<l\le 2L} \left| \sum_{D<d\le 2D} \eta(d)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right) \right|.$$

Сега оценяваме $\widetilde{W}$ по метода, изложен в доказателството на твърдение (2) на Лема 7.12, като вместо (479) използуваме (490). Получаваме

$$\widetilde{W} \ll p^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\,D^{\frac{1}{2}}\,L^{\frac{3}{4}},$$

което заедно с (491) дава (483). С това и твърдение (3) е доказано и доказателството на Лема 7.12 е завършено.

□

7.6 Доказателство на Теорема 7.5.

С помощта на стандартни разсъждения, основани на определението на функцията на Манголд $\Lambda(n)$ и на преобразованието на Абел (Лема 2.1 (УАТЧ-1)), можем да се убедим, че вместо сумата (433) е достатъчно да разгледаме при $N < p$ сумата

$$U = \sum_{\frac{N}{2}<n\le N} \Lambda(n)\, e\left(\frac{a\,\overline{n}}{p}\right). \tag{492}$$

Ако успеем да докажем, че

$$U \ll \left(N^{\frac{15}{16}} + N^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{4}}\right) p^{\varepsilon}, \tag{493}$$

то, като използуваме разсъждения, аналогични на тези от параграф 4.5 на настоящите записки, ще видим, че се получава и оценката (434) от Теорема 7.5. Подробностите оставяме на читателя.

Можем да считаме, че

$$p^{\frac{3}{4}} < N < p, \tag{494}$$

тъй като, ако $N \le p^{\frac{3}{4}}$, оценката (493) е тривиална. Прилагаме тъждеството на Вон, изложено в Лема 4.2 и представяме сумата U, определена чрез (492), във вида

$$U = U_1 - U_2 - U_3, \tag{495}$$

където

$$U_1 = \sum_{d\le p^{\frac{1}{3}}} \mu(d) \sum_{\frac{N}{2d}<l\le\frac{N}{d}} (\log l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right), \tag{496}$$

$$U_2 = \sum_{d\le p^{\frac{2}{3}}} c(d) \sum_{\frac{N}{2d}<l\le\frac{N}{d}} e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right), \tag{497}$$

$$U_3 = \sum_{\substack{\frac{N}{2}<d\,l\le N\\ d>p^{\frac{1}{3}},\ l>p^{\frac{1}{3}}}} a(d)\,\Lambda(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right) \tag{498}$$

и където

$$|c(d)| \le \log d, \qquad |a(l)| \le \tau(l). \tag{499}$$

По-нататък, разделяме сумата U_2, зададена чрез (497), на части съобразно големината на d. По-точно, имаме

$$U_2 = U_2^{(1)} + U_2^{(2)} + U_2^{(3)} + U_2^{(4)}, \tag{500}$$

като в последните суми сумирането по d се извършва както следва:

$$U_2^{(1)} = \sum_{d \le p^{\frac{1}{3}}} \dots, \tag{501}$$

$$U_2^{(2)} = \sum_{p^{\frac{1}{3}} < d \le N p^{-\frac{1}{3}}} \dots, \tag{502}$$

$$U_2^{(3)} = \sum_{N p^{-\frac{1}{3}} < d \le N^{\frac{2}{3}}} \dots, \tag{503}$$

$$U_2^{(4)} = \sum_{N^{\frac{2}{3}} < d \le p^{\frac{2}{3}}} \dots. \tag{504}$$

(В горните формули многоточието замества произведението на $c(d)$ и сумата по l от формула (497)).

Тогава от (495) и (500) следва

$$|U| \le |U_1| + |U_3| + |U_2^{(1)}| + |U_2^{(2)}| + |U_2^{(3)}| + |U_2^{(4)}|. \tag{505}$$

Предстои ни да оценим сумите от дясната страна на неравенството (505). Разделяме всяка от тях на $O(\log p)$ подсуми, в областите на сумиране на които са внесени допълнителните ограничения

$$d \in (D, 2D], \qquad l \in (L, 2L].$$

Ясно е, че за да бъдат тези суми непразни, е необходимо да имаме

$$\frac{N}{8} \le DL \le N. \tag{506}$$

Разглеждаме сумата $U_2^{(1)}$, зададена чрез (501). Разделяме я на $O(\log p)$ подсуми по описания по-горе начин, като всяка от тях е от вида

$$\mathcal{U}_2^{(1)}(D, L) = \sum_{D < d \le 2D} c(d) \sum_{L_1(d) < l \le L_2(d)} e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right), \tag{507}$$

където

$$D \le p^{\frac{1}{3}}, \tag{508}$$

$$L_1(d) = \max\left(L, \frac{N}{2d}\right), \qquad L_2(d) = \min\left(2L, \frac{N}{d}\right). \tag{509}$$

Ще оценим сумата $\mathcal{U}_2^{(1)}(D,L)$ по два начина. От една страна, сумата по l в дясната страна на (507) представлява непълна сума на Клостерман, която оценяваме с помощта на Лема 5.3. Оттук и от (499) следва

$$\mathcal{U}_2^{(1)}(D,L) \ll p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\, D.$$

От друга страна, ако използуваме (506), (508) и Лема 7.12 (3), получаваме

$$\mathcal{U}_2^{(1)}(D,L) \ll p^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\, D^{\frac{1}{2}}\, L^{\frac{3}{4}} \ll p^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\, D^{\frac{1}{2}} \left(\frac{N}{D}\right)^{\frac{3}{4}} \ll p^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\, N^{\frac{3}{4}}\, D^{-\frac{1}{4}}.$$

Следователно имаме

$$\mathcal{U}_2^{(1)}(D,L) \ll p^{\varepsilon}\, \min\left(p^{\frac{1}{2}} D\,,\, p^{\frac{1}{4}}\, N^{\frac{3}{4}}\, D^{-\frac{1}{4}}\right).$$

Като използуваме неравенството $\min(a,b) \le \sqrt[5]{ab^4}$ виждаме, че минимумът от горната формула се мажорира от израза $p^{\frac{3}{10}} N^{\frac{3}{5}}$. По-нататък, тъй като от (494) следва

$$p^{\frac{3}{10}} N^{\frac{3}{5}} < p^{\frac{1}{4}} N^{\frac{2}{3}},$$

то получаваме

$$\mathcal{U}_2^{(1)}(D,L) \ll p^{\frac{1}{4}+\varepsilon} N^{\frac{2}{3}}.$$

Или установихме, че

$$U_2^{(1)} \ll p^{\frac{1}{4}+\varepsilon} N^{\frac{2}{3}}. \tag{510}$$

По аналогичен начин разглеждаме сумата U_1, определена чрез (496), с тази разлика, че при оценяването на сумата по l чрез Лема 5.3, първо се освобождаваме от множителя $\log l$ като приложим преобразованието на Абел (Лема 2.1 (УАТЧ-1)). Подробностите оставяме на читателя. Получаваме

$$U_1 \ll p^{\frac{1}{4}+\varepsilon} N^{\frac{2}{3}}. \tag{511}$$

Сега разглеждаме сумата U_3, определена чрез (498). Разделяме я на $O(\log p)$ подсуми от вида

$$\mathcal{U}_3(D,L) = \sum_{D<d\le 2D} a(d) \sum_{L_1(d)<l\le L_2(d)} \Lambda(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right),$$

като, при това, е изпълнено (506) и също

$$D \ge p^{\frac{1}{3}}, \qquad L \ge p^{\frac{1}{3}}, \qquad L \le L_1(d) < L_2(d) \le 2L.$$

Прилагаме (499), (506), Лема 3.33 (УАТЧ-1), както и Лема 7.12 (1) и виждаме, че

$$\mathcal{U}_3(D,L) \ll p^{\varepsilon} \sum_{D<d\le 2D} \left| \sum_{L_1(d)<l\le L_2(d)} \Lambda(l)\, e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right)\right| \ll p^{\varepsilon} N^{\frac{15}{16}}.$$

Следователно получаваме

$$U_3 \ll p^{\varepsilon} N^{\frac{15}{16}}. \tag{512}$$

По същия начин изследваме сумата $U_2^{(2)}$, определена чрез (502), и виждаме, че

$$U_2^{(2)} \ll p^{\varepsilon} N^{\frac{15}{16}}. \tag{513}$$

Да разгледаме сумата $U_2^{(3)}$, зададена с (503). Разделяме я на $O(\log p)$ подсуми от вида

$$\mathcal{V}(D,L) = \sum_{D<d\le D_1} c(d) \sum_{L_1(d)<l\le L_2(d)} e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right), \tag{514}$$

като за всяка от тях е изпълнено (506), (509), както и

$$D < D_1 \le 2D, \qquad Np^{-\frac{1}{3}} \le D \le N^{\frac{2}{3}}, \qquad L \le p^{\frac{1}{3}}. \tag{515}$$

Прилагаме (499), (506), (515) и Лема 7.12 (2) и получаваме

$$\mathcal{V}(D,L) \ll p^{\varepsilon} \sum_{D<d\le 2D} \left| \sum_{L_1(d)<l\le L_2(d)} e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right)\right| \ll p^{\frac{1}{4}+\varepsilon} D^{\frac{3}{4}} \left(\frac{N}{D}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll p^{\frac{1}{4}+\varepsilon} D^{\frac{1}{4}} N^{\frac{1}{2}} \ll p^{\frac{1}{4}+\varepsilon} N^{\frac{2}{3}}.$$

Оттук следва

$$U_2^{(3)} \ll p^{\frac{1}{4}+\varepsilon} N^{\frac{2}{3}}. \tag{516}$$

Остана да разгледаме сумата $U_2^{(4)}$, определена чрез (504). Разделяме я на $O(\log p)$ подсуми от вида (514), като този път параметрите удовлетворяват условията (506), (509) и

$$N^{\frac{2}{3}} \le D \le p^{\frac{2}{3}}. \tag{517}$$

От (499), (509), (514) и от неравенството на Коши следва

$$|\mathcal{V}(D,L)|^2 \ll p^{\varepsilon} D \sum_{D<d\le 2D} \left| \sum_{L_1(d)<l\le L_2(d)} e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\overline{l}}{p}\right)\right|^2$$

$$= p^{\varepsilon} D \sum_{D<d\le 2D} \sum_{L_1(d)<l_1,l_2\le L_2(d)} e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\left(\overline{l_1}-\overline{l_2}\right)}{p}\right)$$

$$= p^{\varepsilon} D \sum_{L<l_1,l_2\le 2L} \sum_{D'<d\le D_1'} e\left(\frac{a\,\overline{d}\,\left(\overline{l_1}-\overline{l_2}\right)}{p}\right), \tag{518}$$

където
$$D' = \max\left(D, \frac{N}{2l_1}, \frac{N}{2l_2}\right), \qquad D_1' = \min\left(2D, \frac{N}{l_1}, \frac{N}{l_2}\right).$$
Приносът към израза в последния ред на (518) на събираемите, за които $l_1 = l_2$, се оценява тривиално като $O\left(p^\varepsilon D^2 L\right)$, а когато $l_1 \neq l_2$ сумата по d оценяваме с помощта на Лема 5.3. Оттук и от (494), (506), (517) получаваме
$$|\mathcal{V}(D,L)|^2 \ll p^\varepsilon\left(D^2L + p^{\frac{1}{2}}DL^2\right) \ll p^\varepsilon\left(DN + p^{\frac{1}{2}}N\left(ND^{-1}\right)\right)$$
$$\ll p^\varepsilon\left(p^{\frac{2}{3}}N + p^{\frac{1}{2}}N^{\frac{4}{3}}\right) \ll p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}N^{\frac{4}{3}}.$$
Оттук следва
$$U_2^{(4)} \ll p^{\frac{1}{4}+\varepsilon}N^{\frac{2}{3}}. \tag{519}$$

От оценките (505), (510) – (513), (516) и (519) следва (493), с което теоремата е доказана.

□

7.7 Доказателство на Следствие 7.6.

Очевидно сравнението (436) е еквивалентно на
$$q_2 + q_3 \equiv \lambda\overline{q_1} \pmod p,$$
където $\overline{q_1}$ е обратният елемент на q_1 по модул p. Оттук и от Лема 4.9 (6) (УАТЧ-1) следва
$$R(N;\lambda) = \sum_{\substack{q_1,q_2,q_3\le N \\ \lambda\overline{q_1}\equiv q_2+q_3\ (p)}} 1 = \sum_{q_1,q_2,q_3\le N} \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{p} e\left(\frac{h\left(\lambda\,\overline{q_1} - q_2 - q_3\right)}{p}\right).$$

Като сменим реда на сумиране и използуваме свойствата на функцията $e(t)$, дадени в Лема 4.9 (УАТЧ-1), виждаме, че
$$R(N;\lambda) = \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{p}\left(\sum_{q_1\le N} e\left(\frac{h\,\lambda\,\overline{q_1}}{p}\right)\right)\left(\sum_{q_2\le N} e\left(-\frac{h\,q_2}{p}\right)\right)^2.$$

Събираемото в дясната страна на горното равенство, отговарящо на $h = p$, има принос $(\pi(N))^3\,p^{-1}$, така че, ако определим
$$\Theta = \Theta(N;\lambda) = R(N;\lambda) - \frac{(\pi(N))^3}{p}, \tag{520}$$

то получаваме
$$|\Theta| \le \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{p-1}\left|\sum_{q_1\le N} e\left(\frac{h\,\lambda\,\overline{q_1}}{p}\right)\right|\left|\sum_{q_2\le N} e\left(\frac{h\,q_2}{p}\right)\right|^2 \ll p^{-1}\,\mathcal{M}\,\mathcal{N}, \tag{521}$$

където

$$\mathcal{M} = \max_{1 \le l \le p-1} \left| \sum_{q_1 \le N} e\left(\frac{l\,\overline{q_1}}{p} \right) \right|, \qquad \mathcal{N} = \sum_{h=1}^{p-1} \left| \sum_{q_2 \le N} e\left(\frac{h\,q_2}{p} \right) \right|^2 .$$

Прилагаме Лема 4.9 (6) (УАТЧ-1) и получаваме

$$\mathcal{N} \le \sum_{h=1}^{p} \left| \sum_{q_2 \le N} e\left(\frac{h\,q_2}{p} \right) \right|^2 = \sum_{h=1}^{p} \sum_{q_2, q_3 \le N} e\left(\frac{h\,(q_2 - q_3)}{p} \right) = p\ \pi(N). \tag{522}$$

Величината $\mathcal{M}$ оценяваме с помощта на Теорема 7.5 и, като използуваме също (435), намираме

$$\mathcal{M} \ll p^{\varepsilon} \left(N^{\frac{15}{16}} + N^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{4}} \right) \ll p^{\varepsilon} N^{\frac{15}{16}}. \tag{523}$$

От (521) – (523) следва

$$\Theta \ll p^{\varepsilon}\, N^{\frac{15}{16}}\, \pi(N) \ll \frac{(\pi(N))^3}{p}\, p^{-\varepsilon},$$

стига да е изпълнено $p^{\frac{16}{17}+3\varepsilon} < N$.

Остава да вземем предвид (520) и да предефинираме ε и установяваме (437). С това Следствие 7.6 е доказано.

$\square$

Литература

[1] В. А. Быковский, *Спектральные разложения некоторых автоморфных функций и их теоретико-числовые приложения*, Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1984.

[2] И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, Наука, Москва, 1981.

[3] И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, Наука, Москва, 1980.

[4] И. М. Виноградов, *Представление нечетного числа суммой трех простых чисел*, ДАН СССР, 15, (1937), 6–7.

[5] М. З. Гараев, *Оценка сумм Клоостермана с простыми числами и применение* Мат. Заметки, 88, 3, (2010), 365–373.

[6] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Москва, „Наука", 1983.

[7] А. А. Карацуба, *Дробные доли специального вида функций*, Известия РАН, 59, 4, (1995), 61–80.

[8] А. А. Карацуба, *Новые оценки коротких сумм Клоостермана*, Мат. Заметки, 88, 3, (2010), 384–398.

[9] М. А. Королев, *Неполные суммы Клостермана и их приложения*, Известия РАН, 64, 6, (2000), 41–64.

[10] И. И. Пятецкий-Шапиро *О распределении простых чисел в последовательностях вида* $[f(n)]$, Матем. сб., 33, 3, (1953), 559–566.

[11] Р. Лидл, Г. Нидеррайтер, *Конечные поля*, Том 1, 2, Москва, Мир, 1988.

[12] С. А. Степанов, *О числе точек гиперэллиптической кривой над простым конечным полем*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 33, 5, (1969), 1171-–1181.

[13] Д. И. Толев, *Адитивни задачи в теорията на числата*, Записки по едноименния изборен курс, четен във ФМИ през учебната 2008/2009 г. http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/

[14] Д. И. Толев, *Увод в аналитичната теория на числата*, Записки по едноименния изборен курс, четен във ФМИ през учебната 2010/2011 г. http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/

[15] R. C. Baker, *Diophantine Inequalities*, Clarendon Press, 1986.

[16] J.-M. Deshouillers, H. Iwaniec, *An Additive Divisor Problem* J. London Math. Soc. 2, 26, (1982), 1–14.

[17] T. Estermann, *On Kloosterman's sum*, Math. 8 (1961), 83–8

[18] E. Fouvry, I. Shparlinski, *On a ternary quadratic form over the primes*, Acta Arith. 150, (2011), 285-314.

[19] S. W. Graham, G. Kolesnik, *Van der Corput's method of exponential sums*, Cambridge Univ. Press, 1991.

[20] D. R. Heath-Brown, *Almost-primes in arithmetic progressions and in short intervals*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 83, 3, (1978), 357–375.

[21] D. R. Heath-Brown, *The Fourth Power Moment of the Riemann Zeta Function* Proc. London Math. Soc. 3, 38, (1979), 385–422.

[22] C. Hooley, *On the number of divisors of quadratic polynomials*, Acta Math. 110, 1, (1963), 97-114.

[23] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 53, 2004.

[24] H. D. Kloosterman, *On the representation of numbers in the form* $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$, Acta Math. 49, (1926), 407–464.

[25] G. A. Margulis, *Discrete subgroups and ergodic theory*, Number Theory, Trace formulas and Discrete Groups, (Oslo, 1987), 377-398, 1989.

[26] J. Rivat, J. Wu, *Prime numbers of the form* $[n^c]$, Glasgow Math. J. 43, 2, (2001), 237–254.

[27] D. I. Tolev, *On the exponential sum with squarefree numbers*, Bull. London Math. Soc., 37, 6, (2005), 827-834.

[28] D. I. Tolev, *On the remainder term in the circle problem in an arithmetic progression*, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, (в печат).

[29] R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood Method*, Sec. ed, Cambridge Univ. Press, 1997.

[30] A. Weil, *On some exponential sums*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34 (1948), 204–207.

[31] A. Zaharescu, *Small values of* $n^2\alpha \pmod 1$, Invent. Math. 121, 2, (1995), 379–388.