

6. Структура на разпределенията от пространствата $D'(G)$ и $E'(G)$. Структура на разпределенията с носител в точка.

Най-напред ще покажем, че множеството от разпределенията с компактен носител съвпада с множеството от линейните непрекъснати функционали над линейното пространство на безкрайно гладките функции.

Нека G е отворено подмножество R^n и $K \subset G$ е произволен компакт, а m е цяло неотрицателно число. В линейното пространство от безкрайно гладките функции $C^\infty(G)$ разглеждаме функционала $p_{K,m} : C^\infty(G) \rightarrow R$, дефиниран по формулата

$$p_{K,m}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \max_K |\partial^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in C^\infty(G).$$

Веднага се вижда, че той има свойствата

$$p_{K,m}(\varphi) \geq 0, \quad (\text{неотрицателност})$$

$$p_{K,m}(\lambda\varphi) = \lambda p_{K,m}(\varphi), \quad (\text{хомогенност})$$

$$p_{K,m}(\varphi + \psi) \leq p_{K,m}(\varphi) + p_{K,m}(\psi), \quad (\text{неравенство на триъгълника})$$

т.е. притежава всички свойства на нормата без едно - ако $p_{K,m}(\varphi) = 0$, то не следва непременно, че $\varphi = 0$. Такъв функционал наричаме полунорма.

Ясно е, че като меним компакта K и числото $m \geq 0$ получаваме безброй много полунорми. Чрез тях в $C^\infty(G)$ въвеждаме специална сходимост на редици и полученото линейно пространство ще означаваме с $E(G)$.

Дефиниция. Ще казваме, че една редица от функции $\varphi_\nu \in C^\infty(G)$, $\nu = 1, 2, \dots$, е сходяща към функцията $\varphi \in C^\infty(G)$ в $E(G)$ при $\nu \rightarrow \infty$ и пишем $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ в $E(G)$ при $\nu \rightarrow \infty$, ако за всеки компакт K и число $m \geq 0$ имаме

$$p_{K,m}(\varphi_\nu - \varphi) \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty.$$

Веднага се вижда, че

Лема. $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ в $E(G)$ при $\nu \rightarrow \infty$ тогава и само тогава, когато за всеки компакт K и произволен мултииндекс α имаме $\partial^\alpha \varphi_\nu \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ равномерно в K при $\nu \rightarrow \infty$.

Дефиниция. Един линеен функционал $u : E(G) \rightarrow C$ ще наричаме разпределение (или обобщена функция) от $E'(G)$, ако е непрекъснат, т.е. за всяка редица $\varphi_\nu \rightarrow 0$ сходяща в $E(G)$ при $\nu \rightarrow \infty$ имаме $u(\varphi_\nu) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Теорема. Един линеен функционал $u : C^\infty(G) \rightarrow C$ е разпределение $u \in E'(G)$ тогава и само тогава, когато съществуват такива компактно подмножество $K \subset G$, константа C и цяло число m , че е в сила оценката

$$|(u, \varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \max_K |\partial^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in C^\infty(G).$$

Очевидно е, че всяко разпределение $u \in E'(G)$ е разпределение и от $D'(G)$. Освен това от горната оценка се вижда, че ако $u \in E'(G)$, то $\text{supp } u \subset K$, т.е. u е с компактен носител.

Лесно се вижда и обратното. Всяко разпределение $u \in D'(G)$ с компактен носител еднозначно се продължава до непрекъснат линеен функционал от $E'(G)$.

Доказателства - в книгата на проф. Генчев, стр. 221,222.