

4.Разпределения (обобщени функции) в област. Ред, носител и сингулярен носител на едно разпределение. Регулярни и сингулярни разпределения. Слаба сходимост на редица от разпределения. Примери.

Нека G е отворено подмножество R^m . Множеството от безкрайно гладките функции с компактен носител $C_0^\infty(G)$ с въведената по-долу специален вид сходимост на редици ще означаваме с $D(G)$ и ще наричаме пространство на основните функции или пространство на пробните функции.

Забележка. Всяко отворено множество в R^m е изброима сума от области (отворени и свързани множества). Затова, при разглеждането на специални въпроси, например свойствата на решенията на диференциални уравнения, обикновено работим в области.

Дефиниция. Ще казваме, че една редица от функции $\varphi_\nu \in C_0^\infty(G)$, $\nu = 1, 2, \dots$, е сходяща към функцията $\varphi \in C_0^\infty(G)$ в $D(G)$ при $\nu \rightarrow \infty$ и пишем $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ в $D(G)$ при $\nu \rightarrow \infty$, ако: а) съществува такова компактно подмножество $K \subset G$, че $\text{supp } \varphi_\nu \subset K$ за всяко ν ; б) за произволен мултииндекс α имаме $\partial^\alpha \varphi_\nu \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ равномерно в K при $\nu \rightarrow \infty$.

Дефиниция. Ще казваме, че един линеен функционал $u : C_0^\infty(G) \rightarrow C$ е непрекъснат в елемента $\varphi \in C_0^\infty(G)$, ако за всяка редица $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ сходяща в $D(G)$ при $\nu \rightarrow \infty$ имаме $u(\varphi_\nu) \rightarrow u(\varphi)$ при $\nu \rightarrow \infty$.

За упражнение проверете като следствие от линейността, че ако линейният функционал е непрекъснат за някоя стойност на аргумента φ , то той е непрекъснат и за стойност на аргумента $\psi \equiv 0$ и обратно. Следователно линейният функционал е непрекъснат (т.е. непрекъснат за всяка стойност на аргумента) тогава и само тогава, когато е непрекъснат в 0-вия елемент (т.е. във функцията тъждествено равна на нула).

Дефиниция. Един линеен функционал $u : C_0^\infty(G) \rightarrow C$ ще наричаме разпределение (или обобщена функция), ако е непрекъснат, т.е. за всяка редица $\varphi_\nu \rightarrow 0$ сходяща в $D(G)$ при $\nu \rightarrow \infty$ имаме $u(\varphi_\nu) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Множеството от всички разпределения е линейно пространство и ще го означаваме с $D'(G)$.

Стойността на разпределението u за дадена функция $\varphi \in C_0^\infty(G)$ ще означаваме с $u(\varphi)$ или (u, φ) , т.е. $u(\varphi) = (u, \varphi)$.

Теорема. Един линеен функционал $u : C_0^\infty(G) \rightarrow C$ е разпределение тогава и само тогава, когато за всяко компактно подмножество $K \subset G$ съществуват такива константа C_K и цяло число m , че е в сила оценката

$$|(u, \varphi)| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m} \max_K |\partial^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K).$$

Доказателство - в книгата на проф. Генчев, стр. 180,181.

Пример 1. Функция на Дирак съсредоточена в точка $a \in G$ ще наричаме линейния функционал $\delta_a : C_0^\infty(G) \rightarrow C$, за който

$$(\delta_a, \varphi) = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Проверете, че така дефинираният функционал е наистина линеен (очевидно) и е непрекъснат (с редици или с оценката), т.е. е разпределение $\delta_a \in D'(G)$. Функцията на Дирак съсредоточена в 0 ще означаваме с δ .

Пример 2. Нека $f \in L_1^{loc}(G)$. Линейният функционал

$$(u, \varphi) = \int_G f \varphi = \int_G f(x) \varphi(x) dG \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G)$$

е разпределение. Функцията f наричаме плътност на това разпределение. Разпределението от този вид е еднозначно определено от плътността си. Ако допуснем, че разпределението има и представяне с друга плътност $g \in L_1^{loc}(G)$, то $(u, \varphi) = \int_G g \varphi$ и следователно

$$\int_G f \varphi = \int_G g \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Вече показахме, че оттук следва $f = g$ п.н. в G .

Разпределенията притежаващи плътност ще наричаме регулярни (или просто функции) и ще ги отъждествяваме с техните плътности. Разпределенията, които не са регулярни (не са функции) ще наричаме сигулярни ("истински") разпределения.

Докажете, че "функцията" на Дирак е истинско (сингулярно) разпределение, не е регулярно разпределение, т.е. не съществува такава $f \in L_1^{loc}(G)$, че

$$(\delta_a, \varphi) = \int_G f \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Едно разпределение над G , т.е. $u \in D'(G)$ можем да разглеждаме и като разпределение $u|_\Omega \in D'(\Omega)$ над всяка отворено подмножество $\Omega \subset G$, т.е.

$$(u|_\Omega, \varphi) = (u, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

тъй като очевидно (u, φ) има смисъл и за $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(G)$.

Дефиниция. Ще казваме, че две разпределения $u, v \in D'(G)$ съвпадат в отвореното подмножество $U \subset G$ и пишем $u = v$ в U , ако

$$(u, \varphi) = (v, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U).$$

Лема. Нека $u, v \in D'(G)$, а $U_j \subset G$, $j \in J$, са отворени множества и $u = v$ в $U_j \quad \forall j \in J$, т.е. двете разпределения съвпадат върху всяко от тях.

Тогава двете разпределения съвпадат и в обединението на тези отворени множества $U = \cup_{j \in J} U_j$, т.е. $u = v$ в U .

Доказателство. стр. 192.

Дефиниция. Ще казваме, че едно разпределение се анулира (или е равно на нула) в отвореното подмножество $U \subset G$, ако

$$(u, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U).$$

Дефиниция. Допълнението на най-голямото отворено подмножество U на G , в което $u \in D'(G)$ се анулира, ще наричаме носител на u и ще означаваме с $\text{supp } u = G \setminus U$.

Дефиниция. Ще казваме, че едно разпределение $u \in D'(G)$ съвпада с безкрайно гладка функция в отвореното подмножество U , ако u разгледано върху U е регулярно разпределение с безкрайно гладка плътност $f \in C^\infty(U)$, т.е.

$$(u, \varphi) = \int_G f \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U).$$

Дефиниция. Допълнението на най-голямото отворено подмножество $U \subset G$, в което $u \in D'(G)$ съвпада с безкрайно гладка функция, ще наричаме сингулярен носител на u и ще означаваме с $\text{singsupp } u = G \setminus U$.

Намерете носителя и сингулярния носител на функцията на Дирак δ_a и следните разпределения:

$$(u, \varphi) = \int_{|x| \leq 1} \varphi, \quad (u, \varphi) = \int_{|x|=1} \varphi.$$

Дефиниция. Ще казваме, че разпределението $u \in D'(G)$ е от краен ред, ако съществува такова цяло неотрицателно число m , че за всяко компактно множество $K \subset G$ е в сила оценката

$$|(u, \varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \max_K |\partial^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K), \quad C = \text{Const} > 0.$$

Най-малкото m , за което е в сила тази оценка, се нарича ред на разпределението.

Множеството от всички разпределения от краен ред е линейно пространство, което означаваме с $D'_F(G)$.

Покажете, че δ и следните разпределения

$$(u, \varphi) = \partial^\alpha \varphi(0), \quad (u, \varphi) = \int_G f \partial^\alpha \varphi, \quad f \in L_1^{loc}(G), \quad \varphi \in C_0^\infty(G),$$

$$(u, \varphi) = \int_{|x| \leq 1} \varphi, \quad (u, \varphi) = \int_{|x|=1} \varphi, \quad (u, \varphi) = \int_{|x| \leq 1} \varphi_{x_1}, \quad \varphi \in C_0^\infty(R^n),$$

са от краен ред и намерете този ред.

Покажете, че разпределенията $u \in D'(-\infty, \infty)$, $v \in D'(0, 2)$, $w \in D'(R^n)$

$$(u, \varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^{(\nu)}(\nu), \quad \varphi \in C_0^\infty(-\infty, \infty),$$

$$(v, \varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^{(\nu)}\left(\frac{1}{\nu}\right), \quad \varphi \in C_0^\infty(0, 2),$$

$$(u, \varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{|x|=\nu+1} \partial^{\alpha_\nu} \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(R^n), \quad |\alpha_\nu| \rightarrow \infty \text{ при } \nu \rightarrow \infty,$$

не са от краен ред.

Дефиниция. Ще казваме, че редицата от разпределения $u_\nu \in D'(G)$ е слабо сходяща към разпределението $u \in D'(G)$, ако

$$(u_\nu, \varphi) \rightarrow (u, \varphi) \text{ при } \nu \rightarrow \infty \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Ще казваме просто, че $u_\nu \rightarrow u$ в $D'(G)$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Теорема. (за пълнота) Нека редицата от разпределения $u_\nu \in D'(G)$ е слабо сходяща в $D'(G)$, т.е. числовата редица (u_ν, φ) е сходяща при $\nu \rightarrow \infty$ за всяка пробна функция $\varphi \in C_0^\infty(G)$ (т.е. числовата редица (u_ν, φ) е фундаментална). Тогава съществува такова разпределение $u \in D'(G)$, че $u_\nu \rightarrow u$ в $D'(G)$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Проверете, че за

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

имаме $\omega_\varepsilon \rightarrow \delta$ в $D'(R^n)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Има и други редици от функции клонящи слабо към δ -функцията (δ -редици), например $\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$, $\frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$ клонят към δ в $D'(R)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Да разгледаме разпределението

$$(u_R, \varphi) = \int_{|x|=R} \varphi.$$

Покажете, че $u_R \rightarrow 0$ в $D'(R^n)$ при $R \rightarrow \infty$ и $u_R \rightarrow \delta$ в $D'(R^n)$ при $R \rightarrow 0$.