Иванка Касандрова

ОПЕРАЦИОННО СМЯТАНЕ

$$F(p)=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Пловдив, 2004

Съдържание

Предговор

Операционното смятане е създадено в края на 19 век от английския физик Хевисайд отначало без достатъчна обосновка. По-късно то е обосновано на базата на аналитичните функции.

Операционното смятане е важен апарат на съвременните методи на приложната математика. Най-главното достойнство, на което се дължи популярността му, е алгебризацията на основните операции на математическия анализ, което пък от своя страна дава възможност за "икономия на мисленето", компактност на интерпретациите, широко използуване на апарата на алгебрата. Другото, не по-малко преимущество, се състои в това, че то превежда задачи от теория на функции на реална променлива на езика на теория на функции на комплексна променлива, която притежава съвършен и тънък апарат.

При решаване на задачи от приложна математика, механика, инженерните дисциплини най-голямо признание са получили операционните методи, основаващи се на интегралното преобразование на Лаплас, с помощта на което ефективно се решават много диференциални и интегрални уравнения. Нека, например, трябва да се намери функция $y(t)$, която участвува в дадено диференциално или интегрално уравнение. Операционният метод за решаване на такава задача се състои в следното: най-напред от търсената функция $y(t)$ се преминава към нейния образ $Y(p)$ чрез преобразованието на Лаплас, след това с $Y(p)$ се извършват действия, съответни на дадените действия с $y(t)$. При това действията с образите се оказват значително по-прости, например на диференцирането отговаря умножение с променливата p, на интегрирането - делене с p. Полученото операторно уравнение се решава относно $Y(p)$, което обикновено става с прости аритметични действия. Накрая от намерения образ $Y(p)$ се преминава към оригинала $y(t)$, който се явява търсената функция.

1. Преобразование на Фурие

Тъй като операционното смятане е непосредствено свързано с преобразованието на Фурие, в този раздел даваме кратки сведения за него.

Теорема 1. *Нека функцията $f(t)$ е непрекъсната във всеки краен интервал с евентуално изключение на краен брой точки на прекъсване от първи род, $f'(t)$ съществува в точките на непрекъснатост на $f(t)$ и $f(t)$ е абсолютно интегруема в интервала $(-\infty,+\infty)$ ($\exists \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$). Тогава за всяко t е изпълнено*

$$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(t-\xi)\, d\xi. \tag{1}$$

Ако $f(t)$ е непрекъсната в точката t, то

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(t-\xi)\, d\xi \qquad (\textbf{\textit{Формула на Фурие}}). \tag{2}$$

По-нататък изпускаме знака "$+$"пред ∞ в горната граница на интегралите, като не забравяме, че интегрирането става по реалната ос. По-общо, когато става въпрос за реална променлива, под символа " ∞ "разбираме " $+\infty$ ".

Теоремата е валидна и при по-слаби условия, на които ние тук не се спираме. Интегралът от дясната страна на (1) се нарича **интеграл на Фурие**.

Тъй като функцията $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(t-\xi)\, d\xi$ е четна по отношение на λ, то (2) може да се запише във вида

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(t-\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

От абсолютната интегруемост на $f(t)$ следва, че $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda(t-\xi)\, d\xi$ съществува. Тъй като този интеграл е нечетна функция на λ, то

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda(t-\xi)\, d\xi\,, \tag{4}$$

като интегралът по λ се разбира в смисъл на главно значение, т.е. като $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}$.
Като съберем (3) с (4), умножено с i , получаваме

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)[\cos\lambda(t-\xi) + i\,\sin\lambda(t-\xi)]\, d\xi$$

или
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{i\,\lambda\,(t-\xi)}\,d\xi. \tag{5}$$
Получената формула се нарича **формула на Фурие в комплексен вид**. Тази формула можем да запишем така:
$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,\lambda\,t}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-i\,\lambda\xi}\,d\xi\Big)\,d\lambda. \tag{6}$$
Да означим
$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-i\,\lambda\xi}\,d\xi. \tag{7}$$
Тогава
$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)\,e^{i\,\lambda\,t}\,d\lambda. \tag{8}$$
Функцията $\Phi(\lambda)$ се нарича **образ на Фурие** на $f(t)$ или **спектрална функция** на $f(t)$. Формулата (7), която съпоставя на абсолютно интегруемата функция $f(t)$ функция $\Phi(\lambda)$, се нарича **преобразование (трансформация) на Фурие**, а формулата (8), която възстановява функция $f(t)$ по даден образ на Фурие $\Phi(\lambda)$, се нарича **обратна трансформация на Фурие** или **формула за обръщане на преобразованието на Фурие**. В тази формула интегралът в общия случай е в смисъл на главно значение. Връзката между функцията $f(t)$ и нейния образ $\Phi(\lambda)$ ще записваме по следния начин: $\Phi(\lambda)=\mathcal{F}(f(t))$.

Ще отбележим някои свойства на образа на Фурие. Нека функциите $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ удовлетворяват условията на теорема 1 и нека $\Phi(\lambda)=\mathcal{F}(f(t))$. Тогава:

1. $\mathcal{F}(c_1\,f_1(t)+c_2\,f_2(t))=c_1\,\mathcal{F}(f_1(t))+c_2\,\mathcal{F}(f_2(t))$, c_1,c_2 - константи (линейност);
2. $\mathcal{F}(\Phi(t))=f(-\lambda)$ (симетричност);
3. $\mathcal{F}(f(at))=\dfrac{1}{|a|}\,\Phi(\frac{\lambda}{a})$, $a=const\in\mathbb{R}$ (подобие);
4. $\Phi(\lambda)$ е непрекъсната и $\lim\limits_{|\lambda|\to+\infty}\Phi(\lambda)=0$;
5. Ако $t^n\,f(t)$, $n\in\mathbb{N}$ е абсолютно интегруема в интервала $(-\infty,+\infty)$, то $\Phi(\lambda)$ притежава производни до n -ти ред включително и $\Phi^{(k)}(\lambda)=(-i)^k\,\mathcal{F}(t^k\,f(t))$, $k=1,2,\dots,n$;
6. Ако $\lim\limits_{|t|\to+\infty}f(t)=0$ и $f'(t)$ е абсолютно интегруема в интервала $(-\infty,+\infty)$, то $\mathcal{F}(f'(t))=i\,\lambda\,\Phi(\lambda)$, т.е. образът на $f'(t)$ се получава от образа на $f(t)$ чрез умножение с $i\,\lambda$;
7. Ако $g(t)=\int_0^t f(u)\,du\to 0$ при $|t|\to+\infty$, то $\mathcal{F}(g(t))=\dfrac{\Phi(\lambda)}{i\,\lambda}$, т.е. при интегриране на $f(t)$ образът се дели на $i\,\lambda$;
8. $\mathcal{F}(f(t-t_0))=e^{-i\,t_0\lambda}\,\phi(\lambda)$ (теорема за закъснението);
9. $\mathcal{F}(e^{i\,\lambda_0\,t}\,f(t))=\Phi(\lambda-\lambda_0)$ (теорема за преместването).

Да се върнем към формула (2). Тя може да се запише още така :
$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,(\cos\lambda\,\xi\cos\lambda\,t+\sin\lambda\,\xi\sin\lambda\,t)\,d\xi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\big[\cos\lambda\,t\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,\cos\lambda\,\xi\,d\xi+\sin\lambda\,t\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\,\xi)\,d\xi\big].\end{aligned}$$

Ако $f(t)$ е четна, тогава $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\,\xi\,d\xi = 0$ и

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda\,t\,d\lambda \int_0^\infty f(\xi)\,\cos\lambda\,\xi\,d\xi. \tag{9}$$

Ако $f(t)$ е нечетна, тогава $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\,\xi\,d\xi = 0$ и

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\lambda\,t\,d\lambda \int_0^\infty f(\xi)\,\sin\lambda\,\xi\,d\xi. \tag{10}$$

Ако $f(t)$ е дефинирана само в интервала $(0,\infty)$, можем да я продължим в интервала $(-\infty,0)$ или като четна, или като нечетна функция и тогава за една и съща функция (считаме, че е непрекъсната) получаваме двете представяния

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda\,t\,d\lambda \int_0^\infty f(\xi)\,\cos\lambda\,\xi\,d\xi, \quad t>0, \tag{11}$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\lambda\,t\,d\lambda \int_0^\infty f(\xi)\,\sin\lambda\,\xi\,d\xi, \quad t>0. \tag{12}$$

Ако $f(t)$ има точки на прекъсване от първи род и t е една такава точка, то лявата страна на (11) и (12) се заменя с $\dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$.

Можем да запишем (11) по-следния начин:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos\lambda\,t\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\cos\lambda\,\xi\,d\xi\right)d\lambda.$$

Да означим

$$\Phi_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\cos\lambda\,\xi\,d\xi. \tag{13}$$

Тогава

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Phi_c(\lambda)\cos\lambda\,t\,d\lambda. \tag{14}$$

Функцията $\Phi_c(\lambda)$ се нарича **косинусов образ на Фурие** на $f(t)$, формулата (13) - **косинус-трансформация на Фурие**, а формулата (14) - **обратна косинус-трансформация на Фурие**.

Аналогично, ако означим

$$\Phi_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\sin\lambda\,\xi\,d\xi, \tag{15}$$

то от (12) получаваме

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Phi_s(\lambda)\sin\lambda\,t\,d\lambda. \tag{16}$$

Функцията $\Phi_s(\lambda)$ се нарича **синусов образ на Фурие** на $f(t)$, формулата (15) - **синус-трансформация на Фурие**, а формулата (16)-**обратна синус-трансформация на Фурие**.

Пример 1. *Да разгледаме функцията*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

Тази фукция се прекъсва в точката $t = 1$. За интеграла от формулата (11) имаме

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda\, t\, d\lambda \int_0^\infty f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda\, t d\lambda \int_0^1 \cos\lambda\xi\, d\xi \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda\, t\, \frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda\, t\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda\,. \end{aligned}$$

Тогава

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda\, t\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \\ \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2}, & t = 1\,. \end{cases}$$

От последния случай ($t = 1$) получаваме

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda}\, d\lambda\,,$$

откъдето, като направим смяната $2\lambda = u$, намираме

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}\,.$$

Пример 2. *Да се представи с интеграл на Фурие функцията*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ -1, & -1 < t < 0\,. \end{cases}$$

Полученият резултат да се използува за пресмятането на $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 t}{t}\, dt\,.$

Решение: Функцията $f(t)$ се прекъсва в точките $t = 0, \pm 1$. Като имаме предвид формулите (1) и (2), най-напред пресмятаме

$$\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\lambda(t-\xi)\, d\xi = -\int_{-1}^0 \cos\lambda(t-\xi)\, d\xi + \int_0^1 \cos\lambda(t-\xi)\, d\xi = \frac{4}{\lambda}\sin\lambda\, t\sin^2\frac{\lambda}{2}\,.$$

Тогава от (1) и (2) получаваме

$$\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \sin^2\frac{\lambda}{2}\,\frac{\sin\lambda\, t}{\lambda}\,d\lambda = \begin{cases} 0, & |t|>1 \\ 1, & 0<t<1 \\ -1, & -1<t<0 \\ \dfrac{1+(-1)}{2}=0, & t=0 \\ \dfrac{1+0}{2}=\dfrac{1}{2}, & t=1 \\ \dfrac{-1+0}{2}=-\dfrac{1}{2}, & t=-1\,. \end{cases}$$

При $t=\dfrac{1}{2}$ имаме $1=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\,d\lambda$, откъдето, след смяната $\dfrac{\lambda}{2}=u$, намираме $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 u}{u}\,du=\frac{\pi}{4}\,.$

Пример 3. *Представете функцията* $f(t)=e^{-\beta\, t}$, $\beta>0$, $t>0$ *чрез нейните косинус и синус-трансформации.*

Решение: От (13) имаме

$$\Phi_c(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\beta\,\xi}\,\cos\lambda\xi\,d\xi\,. \tag{17}$$

Да означим $I=\int_0^\infty e^{-\beta\,\xi}\,\cos\lambda\xi\,d\xi$. За I получаваме

$$\begin{aligned} I &= \frac{e^{-\beta\xi}\sin\lambda\xi}{\lambda}\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty}+\frac{\beta}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\beta\,\xi}\,\sin\lambda\xi\,d\xi \\ &= -\frac{\beta\, e^{-\beta\xi}\cos\lambda\xi}{\lambda^2}\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty}-\frac{\beta^2}{\lambda^2}\int_0^\infty e^{-\beta\,\xi}\,\cos\lambda\xi\,d\xi, \end{aligned}$$

откъдето

$$\left(1+\frac{\beta^2}{\lambda^2}\right)I=\frac{\beta}{\lambda^2} \quad \text{и} \quad I=\frac{\beta}{\beta^2+\lambda^2}\,.$$

Като заместим в (17) намираме $\Phi_c(\lambda)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{\beta}{\beta^2+\lambda^2}$. Аналогично се получава $\Phi_s(\lambda)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{\lambda}{\beta^2+\lambda^2}\,.$

От обратните трансформации (14) и (16) имаме

$$e^{-\beta\, t}=\frac{2\beta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda\, t}{\beta^2+\lambda^2}\,d\lambda,\quad e^{-\beta\, t}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda\sin\lambda\, t}{\beta^2+\lambda^2}\,d\lambda,\quad t>0\,.$$

Упражнения

Задача 1. *Покажете, че:*

1. $\mathcal{F}(e^{-|t|}) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{1}{1+\lambda^2}\,;$ 2. $\mathcal{F}\Big(\dfrac{1}{1+t^2}\Big) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,e^{-|\lambda|}\,.$

Задача 2. *Намерете* $\mathcal{F}(f(t))$, *ако:*

1. $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le a \\ 0, & |t| > a; \end{cases}$ 2. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \le \pi \\ 0, & |t| > \pi; \end{cases}$ 3. $f(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$

Отг. 1. $\mathcal{F}(f(t)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\lambda\, a}{\lambda}$; 2. $\mathcal{F}(f(t)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{i\sin\pi\,\lambda}{(1-\lambda^2)}$; 3. $\mathcal{F}(f(t)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2}$.

Задача 3. *Покажете, че* $\mathcal{F}(e^{-\frac{t^2}{2}}) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$.

Решение: Имаме

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{t^2}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,e^{-i\lambda\xi}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi+i\lambda)^2}{2}}\,d\xi\,.$$

Функцията $e^{-\frac{z^2}{2}}$ е аналитична в комплексната равнина и като се използува теоремата на Коши, може да се докаже, че

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi+i\lambda)^2}{2}}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi\,.$$

Тъй като $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi = \sqrt{2\pi}$, то $\mathcal{F}(e^{-\frac{t^2}{2}}) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$.

2. Преобразование на Лаплас. Основни свойства

Нека $f(t)$ е функция (реална или комплекснозначна) на реалната променлива t, дефинирана за $t \geq 0$ и нека $p = \sigma + i\omega$ е комплексна променлива. Ако съществува (е сходящ) интегралът

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-p\,t}\, dt, \tag{18}$$

то той се явява функция на комплексната променлива p. Да означим тази функция с $F(p)$. Имаме

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-p\,t}\, dt. \tag{19}$$

Интегралът в (19) се нарича **интеграл на Лаплас**. С формулата (19) на всяка функция $f(t)$ на реална променлива, за която е сходящ интегралът (18), се съпоставя функция $F(p)$ на комплексна променлива. Това съответствие се нарича **преобразование или оператор на Лаплас**. Функцията $F(p)$ се нарича **изображение** или **образ** на Лаплас на $f(t)$, а функцията $f(t)$ - **оригинал**. Връзката между изображение и оригинал означаваме така: $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(f(t))$ или $F(p) \leftrightarrows f(t)$, $f(t) \rightleftarrows F(p)$.

Макар, че функцията $f(t)$ може да е дефинирана за всяко $t \in \mathbb{R}$, нейното изображение на Лаплас не зависи от стойностите на $f(t)$, когато $t < 0$. Всъщност преобразованието на Лаплас е дефинирано за функции $U(t)$, зададени по следния начин:

$$U(t) = \begin{cases} f(t) & \text{за } t \geq 0, \\ 0 & \text{за } t < 0. \end{cases}$$

Примери показват, че за някои функции интегралът (18) е сходящ, а за други е разходящ. Това означава, че някои функции имат изображения, други нямат. Поради това интерес представляват достатъчни условия, при които $f(t)$ има изображение.

В операционното смятане обикновено е прието да се разглеждат функции $f(t)$, които удовлетворяват следните условия:

1) $f(t)$ е непрекъсната за $t \geq 0$ или има точки на прекъсване от първи род, като във всеки краен интервал тези точки са краен брой ;

2) $f(t) = 0$ за $t < 0$;

3) съществуват константи $M > 0$ и $\sigma_0 \geq 0$, такива, че за $t \geq 0$ е изпълнено

$$|f(t)| \leq M\, e^{\sigma_0\, t}. \tag{20}$$

Условието 3) осигурява сходимостта на интеграла (18). Това условие означава, че при $t \to \infty$ функцията $f(t)$ не расте по-бързо от експоненциалната функция. Има функции, които растат по-бързо от експоненциалната функция, например e^{t^2}, но практическото значение на тези функции не е голямо. За функцията e^{t^2} интегралът (18) е разходящ. Числото σ_0 се нарича **показател на растене** или ръст на $f(t)$. За ограничени функции може, очевидно, да се приеме $\sigma_0 = 0$. За по-точни оценки е добре за показател на растене да се приеме точната долна граница на тези σ, за които $|f(t)|\, e^{-\sigma t}$ остава ограничена при $t \to \infty$.

Условието 2) е съвсем естествено, ако променливата t се интерпретира като време. В редица приложни задачи се изследват функции $f(t)$ от известен момент нататък. Този именно начален момент може да се приеме $t = 0$. Поведението на тези функции преди началния момент не е от значение или се съдържа в подходящо начално условие.

Условията 1), 2) и 3) са изпълнени за повече от функциите, които се използуват в приложенията. Ще покажем, че функциите, които ги удовлетворяват, имат изображения. Има функции, които притежават изображения, но не удовлетворяват тези условия. Такава е, например, функцията $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, за която по-късно ще покажем, че има изображение. Следователно тези условия са само достатъчни за съществуване на изображения.

Забележка 1. *Когато работим не само с оригинал $f(t)$, но и с производната $f'(t)$, ако тя съществува и е оригинал, приемаме, че $f(t)$ е непрекъсната за всяко $t \geq 0$. Ако $f''(t)$ е оригинал, считаме $f'(t)$ непрекъсната за всяко $t \geq 0$ и т.н.*

В бъдеще под **функция оригинал** разбираме функция, удовлетворяваща условията 1), 2), 3).

Най-простата функция оригинал е **функцията на Хевисайд**

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Тази функция се нарича още **единична функция**. Очевидно, ако функцията $g(t)$ удовлетворява условията 1) и 3), то функцията $f(t) = 1(t)\, g(t)$ е оригинал. Например функциите $1(t)\, t$, $1(t)\, e^t$, $1(t)\, \sin t$ са оригинали. Уславяме се, за простота, да изпускаме в повечето случаи множителя $1(t)$, като считаме, че разглежданите функции са равни на нула за $t < 0$. Така, например, вместо $1(t)$, $1(t)\, t$, $1(t)\, e^t$, $1(t)\, \sin t$ ще записваме 1, t, e^t, $\sin t$.

Теорема 2. *За всеки оригинал $f(t)$, образът $F(p)$ съществува в полуравнината $\mathrm{Re}\, p > \sigma_0$, σ_0 е показателят на растене на $f(t)$ и $F(p)$ е аналитична функция в тази полуравнина.*

Доказателство. Нека $\sigma = \mathrm{Re}\, p > \sigma_0$. Тогава

$$|f(t)\, e^{-p\,t}| = |f(t)\, e^{-(\sigma + i\omega)\, t}| = |f(t)|\, e^{-\sigma\, t} \leq \, M\, e^{-(\sigma - \sigma_0)\, t}.$$

Тъй като $\int_0^\infty M\, e^{-(\sigma-\sigma_0)\, t}\, dt = \frac{M}{\sigma - \sigma_0}$ е сходящ, то, съгласно признака за сравняване, интегралът от (19) е абсолютно сходящ в полуравнината $\mathrm{Re}\, p > \sigma_0$ и следователно образът $F(p)$ на $f(t)$ съществува в тази полуравнина.

За да докажем, че $F(p)$ е аналитична в полуравнината $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, прилагаме следната теорема за интеграли, зависещи от параметър : Нека

$$F(p) = \int_a^{\infty} \varphi(t, p)\, dt,$$

където: 1) $\varphi(t,p)$ е непрекъсната функция на двете променливи t и p за $t \geq a$ и $p \in D$, където D е област от комплексната равнина;
2) при всяко фиксирано $t \geq a$ функцията $\varphi(t,p)$ е аналитична функция на p в D;
3) интегралът е равномерно сходящ относно p в D', където D' е произволна затворена подобласт на D. Тогава функцията $F(p)$ е аналитична в D и

$$F'(p) = \int_a^{\infty} \frac{\partial\, \varphi(t,p)}{\partial\, p}\, dt, \quad p \in D.$$

Да разгледаме сега функцията $F(p)$ от (19). За нея $\varphi(t,p) = f(t)\, e^{-p\,t}$. Условията 1) и 2) са изпълнени. Нека $\delta > 0$ е произволно и $\operatorname{Re} p \geq \sigma_0 + \delta$. Тогава $|f(t)\, e^{-p\,t}| \leq M\, e^{-(\sigma-\sigma_0)\,t} \leq M\, e^{-\delta\, t}$. Тъй като $\int_0^{\infty} e^{-\delta\, t}\, dt$ е сходящ и не зависи от p, то интегралът от (19) е равномерно сходящ спрямо p в полуравнината $\operatorname{Re} p \geq \sigma_0 + \delta$ за всяко $\delta > 0$. От цитираната по-горе теорема следва, че функцията $F(p)$ от (19) е аналитична в полуравнината $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ и

$$F'(p) = \int_0^{\infty} \frac{\partial (f(t)\, e^{-p\,t})}{\partial\, p}\, dt = \int_0^{\infty} (-t\, f(t))\, e^{-p\,t}\, dt. \tag{21}$$

Следствие 1. *Ако $f(t)$ е оригинал с показател на растене σ_0 и $f(t) \rightleftarrows F(p)$, то $F(p) \to 0$, ако $p \to \infty$ така, че $\sigma = \operatorname{Re} p \to \infty$ и p се намира в полуравнината $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.*

Доказателство. Нека $\sigma = \operatorname{Re} p > \sigma_0$. Тогава

$$|F(p)| \leq \int_0^{\infty} M\, e^{\sigma_0\, t}\, e^{-\sigma\, t}\, dt = M \lim_{R\to\infty} \frac{-e^{-(\sigma-\sigma_0)\,t}}{\sigma - \sigma_0}\Big|_{t=0}^{t=R} = \frac{M}{\sigma - \sigma_0} \to 0$$

при $\sigma \to \infty$.

Ако $p = \infty$ е отстранима особена точка за $F(p)$ ($\exists \lim\limits_{p\to\sigma_0} F(p)$), тогава $\lim F(p) = 0$ както и $p \to \infty$, оставяйки в полуравнината $\operatorname{Re} p > \sigma_0$. Тъй като това е така за повечето от образите, които се срещат в приложенията, считаме, че за всеки образ $F(p)$ е изпълнено

$$\lim_{p\to\infty} F(p) = 0. \tag{22}$$

От теорема 2 и (22) следва, че не всяка функция $F(p)$ може да бъде образ на някоя функция оригинал. Например, функцията $\sqrt{p}$ не може да бъде образ, тъй като $\lim\limits_{p\to\infty} \sqrt{p} \neq 0$. Функцията $\operatorname{tg} p$ също не може да бъде образ, защото тя има безбройно много полюси $p_k = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ и следователно няма полуравнина от вида $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, в която тя е аналитична.

Пример 4. *Намерете $\mathcal{L}(1)$.*

Решение: Единичната функция е оригинал, като свойство 3) е изпълнено за произволно $M > 0$ и $\sigma_0 = 0$. Имаме

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-p\,t}\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-p\,t}\,dt = \frac{1}{p} - \lim_{R\to\infty}\frac{e^{-p\,R}}{p} = \frac{1}{p},$$

тъй като $|e^{-p\,R}| = |e^{-(\sigma+i\,\omega)\,R}| = e^{-\sigma\,R} \to 0$ при $R \to \infty$, ако $\sigma > 0$ и следователно $\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{e^{-p\,R}}{p} = 0$. Следователно $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}$ за $\mathrm{Re}\,p > 0$. Този резултат записваме така: $1 \rightleftarrows \dfrac{1}{p}$.

Ако $c = const$, тогава очевидно $\mathcal{L}(c) = \dfrac{c}{p}$ за $\mathrm{Re}\,p > 0$.

Забележка 2. *Интегралът на Лаплас дефинира изображението $F(p)$ само в полуравнината $\mathrm{Re}\,p > \sigma_0$, но в много случаи функцията $F(p)$ е дефинирана и аналитична в по-широка област, често в цялата равнина с изключение на краен брой точки (изолирани особени), които лежат наляво или върху правата $\mathrm{Re}\,p = \sigma_0$. За това често разглеждаме аналитичното продължение на $F(p)$ и считаме, без винаги да го отбелязваме, че $F(p)$ е образ на $f(t)$ за всички p, за които $F(p)$ е аналитична. Възползуваме се и от това, че различните съотношения между изображенията, които като правило се установяват в полуравнината $\mathrm{Re}\,p > \sigma_0$, остават валидни и за продълженията.*

Изображението на единичната функция е получено при условие $\mathrm{Re}\,p > 0$. При $\mathrm{Re}\,p \le 0$ интегралът на Лаплас е разходящ. От друга страна функцията $F(p) = \frac{1}{p}$ е дефинирана и аналитична в цялата равнина без $p = 0$. Поради това, съгласно горната забележка, можем да разглеждаме $F(p)$ като изображение на единичната функция за всички $p \ne 0$.

Пример 5. *Намерете $\mathcal{L}(f(t))$, където $f(t)$ е стъпаловидна функция, зададена последния начин:*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le c \\ 0, & t > c, \quad c = const. \end{cases}$$

Решение: Имаме

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-p\,t}\,dt = \int_0^c e^{-p\,t}\,dt = \frac{-\,e^{-p\,t}}{p}\Big|_{t=0}^{t=c} = \frac{1-e^{-c\,p}}{p}, \quad \mathrm{Re}\,p > 0.$$

Пример 6. *Намерете $\mathcal{L}(e^{\alpha\,t})$, $\alpha = const$, $\alpha \ne 0$.*

Решение: Всъщност търсим образа на оригинала $1(t)\,e^{\alpha\,t}$. Условието 3) е изпълнено с $M > 1$ произволно и $\sigma_0 = \mathrm{Re}\,\alpha$. Имаме

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{\alpha\,t}) &= \int_0^\infty e^{\alpha\,t}\,e^{-p\,t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)\,t}\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-(p-\alpha)\,t}\,dt \\ &= \frac{1}{p-\alpha} - \lim_{R\to\infty}\frac{e^{-(p-\alpha)\,R}}{p-\alpha} = \frac{1}{p-\alpha} \end{aligned}$$

защото $|e^{-(p-\alpha)\,R}| = e^{-(\mathrm{Re}\,p-\mathrm{Re}\,\alpha)\,R} = e^{-(\sigma-\mathrm{Re}\,\alpha)\,R} \to 0$ при $R\to\infty$ и $\sigma = \mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha$. Следователно $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\frac{e^{-(p-\alpha)\,R}}{p-\alpha} = 0$. Така получаваме $e^{\alpha\,t} \rightleftarrows \dfrac{1}{p-\alpha}$, $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,\alpha$. Тъй като функцията $F(p) = \dfrac{1}{p-\alpha}$ е аналитична във всяка точка $p\neq\alpha$, то съгласно забележка 2 имаме $e^{\alpha\,t} \rightleftarrows \dfrac{1}{p-\alpha}$ за всяко $p\neq\alpha$.

Пример 7. *Намерете* $\mathcal{L}(t)$.

Решение: След интегриране по части получаваме

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^\infty t\,e^{-p\,t}\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R t\,e^{-p\,t}\,dt = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-\,t\,e^{-p\,t}}{p} - \frac{e^{-p\,t}}{p^2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=R} = \frac{1}{p^2}.$$

И така $t \rightleftarrows \dfrac{1}{p^2}$ за всяко $p\neq 0$.

Теорема 3 (Теорема за единственост). *Ако* $f_1(t) \rightleftarrows F_1(p)$, $f_2(t) \rightleftarrows F_2(p)$ *и* $F_1(p) = F_2(p)$, *то* $f_1(t) = f_2(t)$ *във всички точки* $t>0$, *в които са непрекъснати.*

Често във връзка с особеностите на различните задачи на единичната функция $1(t)$ се приписват различни стойности в точката $t=0$. От горната теорема следва, че единичната функция има изображение $F(p) = \frac{1}{p}$, независимо от стойностите, които и се дават в точката $t=0$.

Основни свойства на оператора на Лаплас.

Свойство 1 (Линейност). *Ако* $f_1(t) \rightleftarrows F_1(p)$ *и* $f_2(t) \rightleftarrows F_2(p)$ *и* c_1, c_2 *са рални или комплексни числа, то*

$$c_1\,f_1(t) + c_2\,f_2(t) \rightleftarrows c_1\,F_1(p) + c_2\,F_2(p).$$

Имаме $c_1\,f_1(t) + c_2\,f_2(t) \rightleftarrows \int_0^\infty (c_1\,f_1(t) + c_2\,f_2(t))\,e^{-p\,t}\,dt = c_1\int_0^\infty f_1(t)\,e^{-p\,t}\,dt + c_2\int_0^\infty f_2(t)\,e^{-p\,t}\,dt = c_1\,F_1(p) + c_2\,F_2(p)$.
Горното свойство може да се обобщи за произволен брой събираеми.

Свойство 2 (Подобие). *Ако* $f(t) \rightleftarrows F(p)$, *то*

$$f(\alpha\,t) \rightleftarrows \frac{1}{\alpha}F\Big(\frac{p}{\alpha}\Big), \quad \alpha > 0. \tag{23}$$

Имаме $f(\alpha\,t) \rightleftarrows \int_0^\infty f(\alpha\,t)\,e^{-p\,t}\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-p\frac{t}{\alpha}}\,d\tau = \frac{1}{\alpha}\,F(\frac{p}{\alpha})$, след смяната $\alpha\,t = \tau$.

Ако заменим α с $\dfrac{1}{\alpha}$, горното свойство може да се запише и така

$$F(\alpha\,p) \leftrightarrows \frac{1}{\alpha}f\Big(\frac{t}{\alpha}\Big).$$

Упражнения

Задача 4. *Като използувате линейността на преобразованието на Лаплас, намерете:*

$$1.\ \ \mathcal{L}(\sin\alpha\, t);\ \ \ 2.\ \ \mathcal{L}(\cos\alpha\, t);\ \ \ 3.\ \ \mathcal{L}(\operatorname{sh}\alpha\, t);\ \ \ 4.\ \ \mathcal{L}(\operatorname{ch}\alpha\, t);\ \ \ 5.\ \ \mathcal{L}(\cos t\operatorname{ch} t).$$

Решение: 1. Имаме

$$\mathcal{L}(\sin\alpha\, t) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}(e^{i\,\alpha\, t}) - \frac{1}{2i}\mathcal{L}(e^{-i\,\alpha\, t}) = \frac{1}{2i}.\frac{1}{p-i\,\alpha} - \frac{1}{2i}.\frac{1}{p+i\,\alpha} = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}.$$

2. Аналогично имаме

$$\mathcal{L}(\cos\alpha\, t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{i\,\alpha\, t}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-i\,\alpha\, t}) = \frac{1}{2}.\frac{1}{p-i\,\alpha} + \frac{1}{2}.\frac{1}{p+i\,\alpha} = \frac{p}{p^2+\alpha^2}.$$

3. **Отг.** $\operatorname{sh}\alpha\, t \rightleftarrows \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$; 4. **Отг.** $\operatorname{ch}\alpha\, t \rightleftarrows \frac{p}{p^2-\alpha^2}$; 5. **Отг.** $\cos t\operatorname{ch} t \rightleftarrows \frac{p^3}{p^4+4}$.

Задача 5. *Намерете* $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, *където:*

1. $f(t) = \begin{cases} t & \text{за } 0 \le t \le c, \\ 0 & \text{за } t < 0 \ \text{ и за } t > c; \end{cases}$ 2. $f(t) = \begin{cases} e^{\alpha\, t} & \text{за } 0 \le t \le 1, \\ 0 & \text{за } t < 0 \ \text{ и за } t > 1; \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{за } 0 \le t \le \pi, \\ 0 & \text{за } t < 0 \ \text{ и за } t > \pi; \end{cases}$

Отг. 1. $F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{c\, e^{-c\, p}}{p} - \frac{e^{-c\, p}}{p^2}$; 2. $F(p) = \frac{1-e^{\alpha-p}}{p-\alpha}$; 3. $F(p) = \frac{1+e^{-\pi\, p}}{1+p^2}$.

Задача 6. *Намерете* $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, *където:*

1. $f(t) = 5\operatorname{ch} 2t - 4t + 5$; 2. $f(t) = 6\, e^{-t} + 3\sin 5t$; 3. $f(t) = e^{2t-3}$.

Отг. 1. $F(p) = \frac{5p}{p^2-4} - \frac{4}{p^2} + \frac{5}{p}$; 2. $F(p) = \frac{6}{p+1} + \frac{15}{p^2+25}$; 3. $F(p) = \frac{1}{e^3(p-2)}$.

Задача 7. *Намерете* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$, *където:*

1. $F(p) = \dfrac{3p+6}{p^2+9}$; 2. $F(p) = \dfrac{4p-6}{p^2}$; 3. $F(p) = \dfrac{2p+1}{p(p+1)}$.

Решение: 1. Ще използуваме линейността и намерените образи в задача 4. Имаме

$$\frac{3p+6}{p^2+9} = 3\frac{p}{p^2+9} + 2\frac{3}{p^2+9} \leftrightarrows 3\cos 3t + 2\sin 3t = f(t)\,.$$

Отг. 2. $f(t) = 4 - 6t$; 3. $f(t) = e^{-t} + 1$.

3. Диференциране и интегриране на оригинал и образ

Теорема 4 (Диференциране на оригинал). *Ако* $f(t)$, $f'(t),\ldots,$ $f^{(n)}(t)$ *са оригинали,* $f(t) \rightleftarrows F(p)$ *и* $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ *(*σ_0 *е показател на растене на* $f(t)$*), то*

$$f^{(k)}(t) \rightleftarrows p^k F(p) - p^{k-1} f(0) - p^{k-2} f'(0) - \ldots - p\, f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{24}$$

където $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Доказателство. След интегриране по части имаме

$$f'(t) \rightleftarrows \int_0^\infty f'(t)\, e^{-p\,t}\, dt = \lim_{R\to\infty} f(t)\, e^{-p\,t}\Big|_{t=0}^{t=R} + \int_0^\infty f(t)\, p\, e^{-p\,t}\, dt = -f(0) + p\, F(p),$$

тъй като $|f(R)\, e^{-p\,R}| \le M\, e^{-(\sigma-\sigma_0)\,R} \to 0$ при $R \to \infty$ и $\sigma = \operatorname{Re} p > \sigma_0$. Получихме, че формулата е валидна за първата производна. Прилагаме тази формула за производната на $f'(t)$ и намираме

$$f''(t) \rightleftarrows p\,(p\, F(p) - f(0)) - f'(0) = p^2\, F(p) - p\, f(0) - f'(0).$$

Продължавайки по този начин, стигаме до общата формула (24).

Съгласно забележка 1 считаме, че $f(t)$ е непрекъсната за $t \ge 0$. Ако това не е така, например, ако $f(t)$ се прекъсва в точката t_0, тогава имаме

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f'(t)\, e^{-p\,t}\, dt &= \int_0^{t_0} f'(t)\, e^{-p\,t}\, dt + \int_{t_0}^\infty f'(t)\, e^{-p\,t}\, dt \\
&= f(t)\, e^{-p\,t}\Big|_{t=0}^{t=t_0} + \lim_{R\to\infty} f(t)\, e^{-p\,t}\Big|_{t=t_0}^{t=R} + p\int_0^\infty f(t)\, e^{-p\,t}\, dt \\
&= f(t_0-0)\, e^{-p\,t_0} - f(0) - f(t_0+0)\, e^{-p\,t_0} + p\int_0^\infty f(t)\, e^{-p\,t}\, dt
\end{aligned}$$

или

$$f'(t) \rightleftarrows p\, F(p) - f(0) + e^{-p\,t_0}\big(f(t_0-0) - f(t_0+0)\big). \tag{25}$$

Ако $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ от (24) получаваме, че от $f(t) \rightleftarrows F(p)$ следва $f^{(k)}(t) \rightleftarrows p^k\, F(p)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, т.е. на диференциране на оригинала отговаря умножение на образа с p.

Пример 8. *Намерете* $\mathcal{L}(\cos^2 t)$.

Решение: Имаме $f(t) = \cos^2 t$. Тогава $f(0) = 1$ и $f'(t) = -2\sin t\,\cos t = -\sin 2t$. От $-\sin 2t \rightleftarrows \frac{-2}{p^2+4}$ и теорема 4 получаваме

$$\frac{-2}{p^2+4} = \mathcal{L}(f'(t)) = p\,\mathcal{L}(f(t)) - 1\,,$$

откъдето следва

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\cos^2 t) = \frac{p^2+2}{p\,(p^2+4)}\,.$$

Следствие 2. *Ако* $f(t)$ *и* $f'(t)$ *са оригинали и* $f(t) \rightleftarrows F(p)$, *то* $\lim p\,F(p) = f(0)$, *когато* $p \to \infty$ *така, че* $\sigma = \operatorname{Re} p \to \infty$ *и* p *се намира в полуравнината* $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, σ_0 *е показател на растене на* $f(t)$.

Доказателство. Тъй като образът на $f'(t)$ е $p\,F(p) - f(0)$, то съгласно следствие 1 имаме $\lim(p\,F(p) - f(0)) = 0$, когато $p \to \infty$ така, че $\sigma = \operatorname{Re} p \to \infty$ и p се намира в полуравнината $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, откъдето следва

$$\lim_{p\to\infty} p\,F(p) = f(0) \tag{26}$$

Следствие 3. *Ако* $f(t)$ *и* $f'(t)$ *са оригинали,* $f(t) \rightleftarrows F(p)$ *и съществува* $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, *то* $\lim p\,F(p) = f(\infty)$, *когато* $p \to 0$, *оставяйки в полуравнината* $\operatorname{Re} p > 0$.

Доказателство. Най-напред отбелязваме, че има смисъл да се говори за $\lim\limits_{p\to 0} p\,F(p)$, тъй като от съществуването на $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ следва ограничеността на $f(t)$ и можем да считаме $\sigma_0 = 0$ и тогава, съгласно теорема 2, функцията $F(p)$ е дефинирана в полуравнината $\operatorname{Re} p > 0$. От $f'(t) \rightleftarrows p\,F(p) - f(0)$ имаме

$$p\,F(p) - f(0) = \int_0^\infty f'(t)\,e^{-p\,t}\,dt.$$

Нека в горното равенство оставим $p \to 0$ и направим граничен преход под знака на интеграла (няма да обосноваваме законността на този преход). Така получаваме

$$\lim_{p\to 0}(p\,F(p) - f(0)) = \int_0^\infty f'(t)\,dt = f(\infty) - f(0),$$

откъдето следва

$$\lim_{p\to 0} p\,F(p) = f(\infty). \tag{27}$$

Теорема 5 (Диференциране на образ). *Ако* $F(p) \leftrightarrows f(t)$, *то*

$$F^{(n)}(p) \leftrightarrows (-t)^n\,f(t), \quad n = 1, 2, \ldots \quad (\operatorname{Re} p > \sigma_0). \tag{28}$$

Доказателство. Функцията $F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-p\,t}\, dt$ е аналитична в полуравнината $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ (виж теорема 2) и следователно притежава производни от кой да е ред в тази полуравнина. От (21) имаме

$$F'(p) = \int_0^\infty (-t\, f(t))\, e^{-p\,t}\, dt \leftrightarrows -t\, f(t).$$

Прилагаме тази формула за $F'(p)$. Имаме $F''(p) \leftrightarrows (-t)(-t\, f(t)) = (-t)^2 f(t)$. Разсъждаваме индуктивно и стигаме до общата формула (28).

Пример 9. *Намерете* $\mathcal{L}(t^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение: От $\dfrac{1}{p} \leftrightarrows 1$ и (28) имаме $\left(\dfrac{1}{p}\right)^{(n)} \rightleftarrows (-t)^n$, откъдето намираме $\dfrac{n!}{p^{n+1}} \rightleftarrows t^n$.

Пример 10. *Намерете* $\mathcal{L}(t^n\, e^{\alpha\, t})$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение: *От* $\dfrac{1}{p-\alpha} \leftrightarrows e^{\alpha\, t}$ *и (28) имаме* $\left(\dfrac{1}{p-\alpha}\right)^{(n)} \rightleftarrows (-t)^n\, e^{\alpha\, t}$, *откъдето намираме* $\dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}} \rightleftarrows t^n\, e^{\alpha\, t}$.

Пример 11. *Намерете* $\mathcal{L}(t\, \sin \alpha\, t)$ *и* $\mathcal{L}(t\, \cos \alpha\, t)$.

Решение: От $\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2} \leftrightarrows \sin \alpha\, t$ и (28) имаме $\left(\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\right)' \leftrightarrows (-t) \sin \alpha\, t$, откъдето намираме $\dfrac{2\alpha\, p}{(p^2+\alpha^2)^2} \leftrightarrows t\, \sin \alpha\, t$.

Аналогично, от $\dfrac{p}{p^2+\alpha^2} \leftrightarrows \cos \alpha\, t$ и (28) имаме $\left(\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}\right)' \leftrightarrows (-t) \cos \alpha\, t$, откъдето намираме $\dfrac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2} \leftrightarrows t\, \cos \alpha\, t$.

Теорема 6 (Интегриране на оригинал). *Ако* $f(t)$ *е оригинал и* $f(t) \rightleftarrows F(p)$, *то*

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \rightleftarrows \frac{F(p)}{p}. \tag{29}$$

Доказателство. От това, че $f(t)$ е оригинал следва, че функцията $g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ е непрекъсната за $t \geq 0$ и $g(t) = 0$ за $t \leq 0$. Освен това

$$|g(t)| \leq \int_0^t M\, e^{\sigma_0\, \tau}\, d\tau = \frac{M}{\sigma_0}\, e^{\sigma_0\, \tau}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \leq \frac{M}{\sigma_0}\, e^{\sigma_0\, t}.$$

Ако $\sigma_0 = 0$, то $|g(t)| \leq M\, t < M\, e^t$. Следователно $g(t)$ е оригинал. Нека $g(t) \rightleftarrows G(p)$. Тогава съгласно теорема 4 имаме $g'(t) \rightleftarrows p\, G(p) - g(0)$. От $g'(t) = f(t)$ и $g(0) = 0$ следва, че $f(t) \rightleftarrows p\, G(p)$. Тъй като по условие $f(t) \rightleftarrows F(p)$, то $F(p) = p\, G(p)$, откъдето $G(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.

От тази теорема следва, че на интегрирането на оригинала отговаря делене на образа с p.

Пример 12. *Намерете* $\mathcal{L}(t)$ *и* $\mathcal{L}(t^2)$.

Решение: От $1 \rightleftarrows \frac{1}{p}$ и теорема 6 имаме $t = \int_0^t d\tau \rightleftarrows \frac{1}{p}\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p^2}$. Като използваме този резултат, получаваме $\frac{t^2}{2} = \int_0^t \tau\, d\tau \rightleftarrows \frac{1}{p}\mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^3}$, откъдето $t^2 \rightleftarrows \frac{2}{p^3}$. Продължавайки по този начин, намираме $t^n \rightleftarrows \frac{n!}{p^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 7 (Интегриране на образ). *Ако* $f(t) \rightleftarrows F(p)$ *и* $\dfrac{f(t)}{t}$ *е оригинал, то*

$$\frac{f(t)}{t} \rightleftarrows \int_p^\infty F(u)\, du, \tag{30}$$

като пътя на интегриране лежи в полуравнината $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

Доказателство. Нека $\mathcal{L}\Big(\frac{f(t)}{t}\Big) = \Phi(p)$. От теоремата за диференциране на образ имаме $-\Phi'(p) = \mathcal{L}\Big(t\,\frac{f(t)}{t}\Big) = \mathcal{L}(f(t))$. Получаваме $F(p) = -\Phi'(p)$. Интегрираме горното равенство от p до ∞, като пътя на интегриране лежи в полуравнината $\operatorname{Re} p > \sigma_0$. Получаваме

$$\int_p^\infty F(u)\, du = -\int_p^\infty \Phi'(u)\, du = -\lim_{u\to\infty} \Phi(u) + \Phi(p) = \Phi(p),$$

тъй като от следствие 1 имаме $\lim\limits_{u\to\infty} \Phi(u) = 0$.

Горната теорема показва, че интегрирането на изображението води до делене с t на оригинала.

Пример 13. *Намерете* $\mathcal{L}\Big(\dfrac{e^{b\,t} - e^{a\,t}}{t}\Big)$.

Решение: Имаме $e^{b\,t} - e^{a\,t} \rightleftarrows \dfrac{1}{p-b} - \dfrac{1}{p-a}$. Тъй като $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{b\,t} - e^{a\,t}}{t} = b - a$, то $\dfrac{e^{b\,t} - e^{a\,t}}{t}$ е оригинал и от горната теорема получаваме

$$\frac{e^{b\,t} - e^{a\,t}}{t} \rightleftarrows \int_p^\infty \Big(\frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a}\Big)\, dp = \log \frac{p-a}{p-b}.$$

Пример 14. *Намерете* $\mathcal{L}\Big(\dfrac{\sin t}{t}\Big)$.

Решение: Тъй като $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, то функцията $\dfrac{\sin t}{t}$ е оригинал. От $\sin t \rightleftarrows \dfrac{1}{p^2+1}$ и (30) имаме

$$\frac{\sin t}{t} \rightleftarrows \int_p^\infty \frac{du}{1+u^2}\, du = \operatorname{arctg} u\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} \frac{1}{p}.$$

Пример 15. *Намерете* $\mathcal{L}\Big(\displaystyle\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau\Big)$.

Решение: Функцията $\displaystyle\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$ се нарича **интегрален синус** и се означава с $\mathrm{Si\,t}$. От $\dfrac{\sin t}{t} \rightleftarrows \operatorname{arctg}\dfrac{1}{p}$ и (29) имаме

$$\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \rightleftarrows \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{1}{p}.$$

Пример 16. *Намерете* $\mathcal{L}\Big(-\displaystyle\int_t^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau\Big)$.

Решение: Тъй като $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau} = \frac{\pi}{2}$, то

$$-\int_t^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau = \mathrm{Si\,t} - \frac{\pi}{2} \rightleftarrows \frac{1}{\mathrm{p}}(\operatorname{arctg}\frac{1}{\mathrm{p}} - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\mathrm{p}}\operatorname{arctg}\mathrm{p}.$$

Ако оригиналът и образът зависят от параметър, тогава при известни условия е възможен граничен преход, диференциране и интегриране по параметъра. В сила са следните теореми, които ще приведем без доказателство.

Теорема 8 (Теорема за граничен преход по параметър). *Ако оригиналът и неговият образ зависят от параметър* α, $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, *т.е.* $f(t,\alpha) \rightleftarrows F(p,\alpha)$ *и съществува* $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} f(t,\alpha)$, $\alpha_0 \in [\alpha_1, \alpha_2]$, *то*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} f(t,\alpha) \rightleftarrows \lim_{\alpha\to\alpha_0} F(p,\alpha).$$

Теорема 9 (Теорема за диференциране по параметър). *Ако оригиналът и неговият образ зависят от параметър* α, $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, *т.е.* $f(t,\alpha) \rightleftarrows F(p,\alpha)$ *и съществува производната* $\frac{\partial}{\partial\alpha} f(t,\alpha)$ *за* $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$ *и* $t > 0$, *то*

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(t,\alpha) \rightleftarrows \frac{\partial}{\partial\alpha} F(p,\alpha).$$

Пример 17. *От* $\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2} \leftrightarrows \sin\alpha\,t$, *след диференциране по параметъра* α, *получаваме*

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\Big) \leftrightarrows \frac{\partial}{\partial\alpha}\sin\alpha\,t$$

или

$$\frac{1}{p^2+\alpha^2} - \frac{2\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2} \leftrightarrows t\cos\alpha\,t.$$

Тъй като $\frac{1}{p^2+\alpha^2} \leftrightarrows \frac{\sin\alpha\,t}{\alpha}$, *то от свойството линейност имаме*

$$\frac{2\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2} \leftrightarrows \frac{\sin\alpha\,t}{\alpha} - t\cos\alpha\,t,$$

което може да запишем и така

$$\frac{2\alpha^3}{(p^2+\alpha^2)^2} \leftrightarrows \sin\alpha\, t - \alpha\, t\cos\alpha\, t.$$

Теорема 10 (Теорема за интегриране по параметър). *Ако оригиналът и неговият образ зависят от параметър* α, *т.е.* $f(t,\alpha) \rightleftarrows F(p,\alpha)$ *и съществуват инрегралите*

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(t,\alpha)d\alpha \;\; \text{и} \;\; \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(p,\alpha)d\alpha,$$

то

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(t,\alpha)d\alpha \rightleftarrows \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(p,\alpha)d\alpha.$$

Пример 18. *От* $\frac{1}{p-\alpha} \leftrightarrows e^{\alpha\, t}$, *след интегриране по параметъра* α *при* $\alpha_0 = 0$, *получаваме*

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{p-\alpha} \leftrightarrows \int_0^{\alpha} e^{\alpha\, t}d\alpha$$

или

$$\log\frac{p}{p-\alpha} \leftrightarrows \frac{e^{\alpha\, t}-1}{t}.$$

Показахме, че свойството подобие (формулата (23)) може да се запише във вида

$$\frac{1}{\alpha} f\Big(\frac{t}{\alpha}\Big) \rightleftarrows F(\alpha\, p)$$

От теоремата за интегриране по параметър имаме

$$\int_0^1 f\Big(\frac{t}{\alpha}\Big)\frac{d\alpha}{\alpha} \rightleftarrows \int_0^1 F(\alpha\, p)\, d\alpha,$$

ако двата интеграла съществуват. Ако в левия интеграл направим смяната $\frac{t}{\alpha} = \tau$, а в десния $\alpha\, p = u$, получаваме

$$\int_t^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau \rightleftarrows \frac{1}{p}\int_0^p F(u)\, du. \qquad (31)$$

Пример 19. *Намерете* $\mathcal{L}\Big(-\int_t^{\infty}\frac{\cos\tau}{\tau}\, d\tau\Big)$.

Решение: Функцията $-\int_t^{\infty}\frac{\cos\tau}{\tau}\, d\tau$ се нарича **интегрален косинус** и се означава с $\mathrm{ci}\,\mathrm{t}$. От $\cos t \rightleftarrows \frac{p}{p^2+1}$ и формулата (31) намираме

$$\mathrm{ci}\,\mathrm{t} = -\int_{\mathrm{t}}^{\infty}\frac{\cos\tau}{\tau}\,\mathrm{d}\tau \rightleftarrows -\frac{1}{\mathrm{p}}\int_0^{\mathrm{p}}\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{u}^2+1}\mathrm{du} = \frac{1}{\mathrm{p}}\log\frac{1}{\sqrt{\mathrm{p}^2+1}}.$$

От теоремите за интегриране на оригинал и образ следва, че ако $f(t) \rightleftarrows F(p)$ и функцията $\frac{f(t)}{t}$ е оригинал, то

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau \rightleftarrows \frac{1}{p}\int_p^\infty F(u)\, du.$$

Като съберем с (31), получаваме

$$\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau \rightleftarrows \frac{1}{p}\int_0^\infty F(u)\, du.$$

Тъй като интегралите в двете страни на горното равенство са константи, да кажем A и B, то горното съотношение има вида $A \rightleftarrows \frac{B}{p}$, което заедно с $1 \rightleftarrows \frac{1}{p}$ и теорема 3 за единственост дава $A = B$. Така получаваме

$$\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau = \int_0^\infty F(u)\, du. \tag{32}$$

Получената формула може да се използва за пресмятане на някои несобствени интеграли.

Пример 20. *Пресметнете* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Решение: От $\sin t \rightleftarrows \frac{1}{p^2+1}$ и формулата (32)намираме

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

От теоремата за диференциране на образ от $f(t) \rightleftarrows F(p)$, имаме $tf(t) \rightleftarrows -F'(p)$. Като приложим формула (32), получаваме

$$\int_0^\infty f(t)dt = -\int_0^\infty F'(u)du = -\lim_{u\to\infty} F(u) + \lim_{u\to 0} F(u) = F(0), \tag{33}$$

ако съществува $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, тъй като от (22) имаме $\lim\limits_{u\to\infty} F(u) = 0$.

Пример 21. *Пресметнете* $\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin\beta t\, dt$, $\alpha > 0$.

Решение: От $e^{-\alpha t}\sin\beta t \rightleftarrows \dfrac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$(пример (34)) и горната формула получаваме

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin\beta t\, dt = \lim_{u\to 0}\frac{\beta}{(u+\alpha)^2+\beta^2} = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Забележка 3. *Граничните съотношения, получени в следствия* 1, 2 *и* 3 *могат да се използват за проверка верността на пресмятанията, направени с помощта на операционното смятане.*

Пример 22. *Проверете дали са валидни граничните съотношения от следствията* 1, 2 *и* 3 *за образите на функциите* $1(t)$, $\sin t$, $e^{\alpha t}$.

Решение: Имаме $1(t) \rightleftarrows \frac{1}{p}$, $\sin t \rightleftarrows \frac{1}{p^2+1}$, $e^{\alpha\, t} \rightleftarrows \frac{1}{p-\alpha}$. Първото и второто гранично съотношение са валидни и за трите функции, тъй като $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{1}{p}=0$, $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{1}{p^2+1}=0$, $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{1}{p-\alpha}=0$, $\lim\limits_{p\to\infty}(p.\dfrac{1}{p})=1=1(0)$, $\lim\limits_{p\to\infty}(p.\dfrac{1}{p^2+1})=0=\sin 0$, $\lim\limits_{p\to\infty}(p.\dfrac{1}{p-\alpha})=1=e^0$.

Третото гранично съотношение не е в сила за образа на $\sin t$, защото не съществува $\lim\limits_{t\to\infty}\sin t$. По същата причина то не е в сила и за образа на $e^{\alpha\, t}$ при $\alpha>0$. За образите на $1(t)$ и $e^{\alpha\, t}$ при $\alpha<0$ то е в сила, тъй като $\lim\limits_{p\to 0}(p.\dfrac{1}{p})=\lim\limits_{t\to\infty}1(t)=1$, $\lim\limits_{p\to 0}(p.\dfrac{1}{p-\alpha})=\lim\limits_{t\to\infty}e^{\alpha\, t}=0$.

Упражнения

Задача 8. *Намерете* $F(p)=\mathcal{L}(f(t))$, *ако:*
1. $f(t)=t\operatorname{sh}\alpha\, t$; 2. $f(t)=t\operatorname{ch}\alpha\, t$.

Отг. 1. $F(p)=\frac{2\alpha\, p}{(p^2-\alpha^2)^2}$; 2. $F(p)=\frac{p^2+\alpha^2}{(p^2-\alpha^2)^2}$.

Задача 9. *Намерете* $F(p)=\mathcal{L}(f(t))$, *ако:*
1. $f(t)=t\,(e^t+\operatorname{ch} t)$; 2. $f(t)=\displaystyle\int_0^t(\tau-1)\cos\alpha\,\tau\, d\tau$

3. $f(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{e^\tau-1}{\tau}\,d\tau$.

Отг. 1. $F(p)=\frac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}$; 2. $F(p)=\frac{p^2-p^3-p\,\alpha^2-\alpha^2}{p\,(p^2+\alpha^2)^2}$.

Решение: 3. Имаме $e^t-1 \rightleftarrows \dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{p}$. Тъй като $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^\tau-1}{\tau}=1$, то функцията $\dfrac{e^\tau-1}{\tau}$ е оригинал. Като приложим теорема 7 за интегриране на образ, получаваме

$$\frac{e^\tau-1}{\tau}\rightleftarrows\int_p^\infty\Big(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\Big)\,du=\log\frac{u-1}{u}\Big|_p^\infty=-\log\Big(1-\frac{1}{p}\Big).$$

Сега остава да прилагожим теорема 6 за интегриране на оригинал и намираме

$$\int_0^t\frac{e^\tau-1}{\tau}\,d\tau\rightleftarrows-\frac{1}{p}\,\log\Big(1-\frac{1}{p}\Big).$$

Задача 10. *Намерете* $F(p)=\mathcal{L}(f(t))$, *ако* $f(t)=\dfrac{1}{t\,e^t}\,(1-e^{a\,t})$.

Решение: Представяме $f(t)$ във вида

$$f(t)=\frac{e^{-t}-e^{(a-1)\,t}}{t}.$$

Имаме $e^{-t}-e^{(a-1)\,t} \rightleftarrows \frac{1}{p+1}-\frac{1}{p-(a-1)}$. От теорема 7 за интегриране на образ получаваме

$$\frac{e^{-t}-e^{(a-1)\,t}}{t} \rightleftarrows \int_p^\infty \Big[\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-(a-1)}\Big]\,du = \log\frac{p+1-a}{p+1}\,.$$

Задача 11. *Намерете* $f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(p)$, *ако:*
1. $F(p)=\dfrac{1}{p\,(p-4)}$ *;* 2. $F(p)=\dfrac{1}{p^2\,(p+1)}$ *;*
3. $F(p)=\dfrac{1}{p^2\,(p^2+1)}$ *;* 4. $F(p)=\dfrac{3\,p}{(p^2+1)^2}$.

Решение: 1. От $\dfrac{1}{p-4} \leftrightarrows e^{4t}$ и теорема 6 за интегриране на оригинал имаме $\dfrac{1}{p\,(p-4)} \leftrightarrows \displaystyle\int_0^t e^{4\tau}\,d\tau = \dfrac{e^{4t}-1}{4}$.
4. От $\dfrac{1}{p^2+1} \leftrightarrows \sin t$ и теорема 5 за диференциране на образ имаме $t\sin t \leftrightarrows -\Big(\dfrac{1}{p^2+1}\Big)' = \dfrac{2p}{(p^2+1)^2}$, откъдето $F(p)=\dfrac{3}{2}\,t\sin t$.
Отг. 2. $f(t)=t-1+e^t$; 3. $f(t)=t-\sin t$.

Задача 12. *Намерете* $f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(p)$, *където* $F(p)=\log\dfrac{p}{p+1}$.

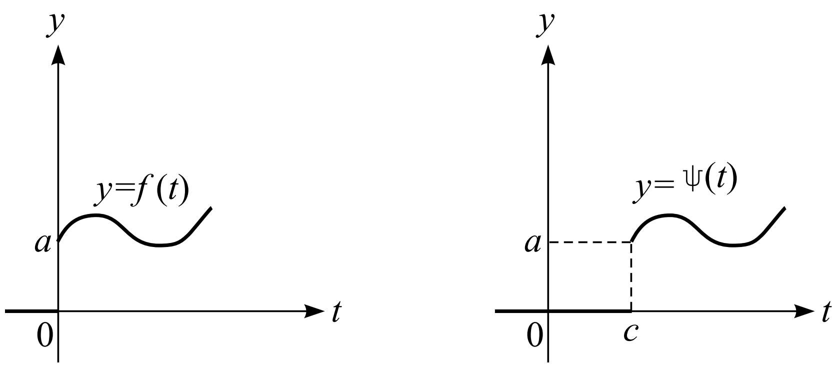
Отг. $f(t)=\frac{e^{-t}-1}{t}$.

Задача 13. *Пресметнете:*
1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$*;* 2. $\displaystyle\int_0^\infty t^5\,e^{-t}dt$*;* 3. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha\,t}\cos\beta\,t dt$.

Отг. 1. $\log\frac{b}{a}$; 2. $5!$; 3. $\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$.

4. Основни теореми на операционното смятане

Нека $f(t)$ е оригинал и $\psi(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ f(t-c), & t \geq c, \quad c > 0. \end{cases}$ Функцията $\psi(t)$ приема в интервала $[c, \infty)$ значения, равни съответно на значенията, които $f(t)$ приема в интервала $[0, \infty)$. Ако $f(t)$ описва някакъв процес, то $\psi(t)$ описва същия процес със закъснение c. Графиката на $\psi(t)$ се получава от графиката на $f(t)$ чрез преместване по оста на аргумента на разстояние c (фиг 1).



Фиг. 1.

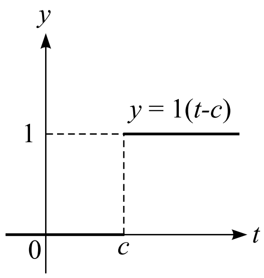
Функцията $1(t-c) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c, \quad c > 0. \end{cases}$ се нарича **обобщена единична функция** (фиг.2). За обобщената единична функция се използува и означението $1_c(t)$. С нейна помощ функцията $\psi(t)$ може да се запише във вида $1(t-c)\, f(t-c)$. Понякога пишем само $f(t-c)$, като внимаваме да не се получи недоразумение. Функцията $f(t-c)$ се нарича **функция със закъсняващ аргумент**.

Теорема 11 (Теорема за закъснението). *Ако* $f(t) \rightleftarrows F(p))$ *и* $c = const > 0$, *то*

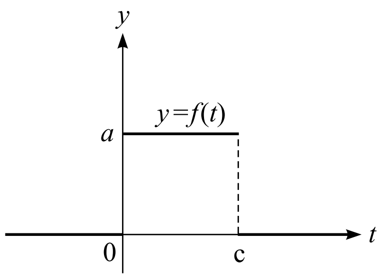
$$1(t-c)f(t-c) \rightleftarrows e^{-p\,c}\, F(p)\,. \tag{34}$$

Доказателство. Имаме, след смяната $t - c = \tau$,

$$\begin{aligned} 1(t-c)\, f(t-c) \quad &\rightleftarrows \quad \int_0^\infty 1(t-c)\, f(t-c)\, e^{-p\,t}\, dt = \int_c^\infty f(t-c)\, e^{-p\,t}\, dt \\ &= \quad \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-p\,(\tau+c)}\, d\tau = e^{-p\,c} \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-p\,\tau}\, d\tau = e^{-p\,c}\, F(p)\,. \end{aligned}$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Теоремата за закъснението показва, че закъснението на аргумента на оригинала с положителна констаната c води до умножение на образа с $e^{-p\,c}$. Тази теорема е удобен метод за намиране на образи на частично непрекъснати функции.

Забележка 4. *Ако оригиналът $f(t)$ е зададен по следния начин*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_1 \;\; (\tau_1 \geq 0), \\ f_k(t), & \tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}, \;\; k = 1, 2, \ldots, m, \\ 0, & t > \tau_{m+1}, \end{cases}$$

където $f_k(t)$ е непрекъсната функция в интервала $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, тогава лесно се проверява, че $f(t)$ може да се представи във вида

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} [1(t - \tau_k) - 1(t - \tau_{k+1})] f_k(t)\,.$$

Пример 23. *Намерете образа на обобщената единична функция $1(t - c)$ (фиг.2).*

Решение: От $1(t) \rightleftarrows \frac{1}{p}$ и теорема 11 за закъснението имаме

$$1(t - c) \rightleftarrows \frac{e^{-p\,c}}{p}. \tag{35}$$

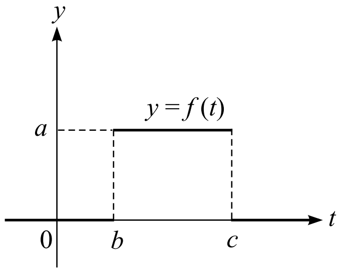
Пример 24. *Намерете образа на функцията $f(t) = 1(t - 1)\,\sin(t - 1)$.*

Решение: От $\sin t \rightleftarrows \frac{1}{p^2+1}$ и теорема 11 за закъснението имаме $1(t-1)\,\sin(t-1) \rightleftarrows \frac{e^{-p}}{p^2+1}$.

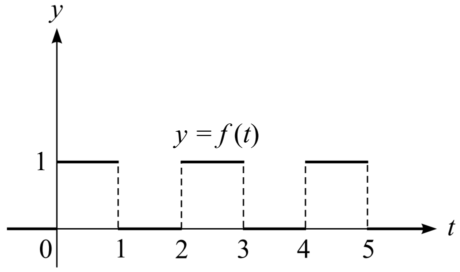
Ако няма закъснение на аргумента, т.е. разглеждаме функцията $1(t)\,\sin(t - 1)$, тогава образът има съвсем друг вид, а именно:

$$\sin(t - 1) = \sin t\,\cos 1 - \cos t\,\sin 1 \rightleftarrows \frac{\cos 1}{p^2 + 1} - \frac{p\,\sin 1}{p^2 + 1}\,.$$

Пример 25. *Намерете образа на функцията* $f(t) = \begin{cases} a & \text{за } 0 \leq t \leq c, \\ 0 & \text{за } t < 0 \;\; \text{и за } t > c. \end{cases}$



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Решение: Графиката на функцията $f(t)$ при $a > 0$ е дадена на фиг. 3. Функцията $f(t)$ има следното аналитично представяне (виж забележка 4): $f(t) = a(1(t) - 1(t-c))$. От $1(t) \rightleftarrows \frac{1}{p}$ и (35) намираме $f(t) \rightleftarrows a(\frac{1}{p} - \frac{e^{-c\,p}}{p})$.

Пример 26. *Намерете образа* $F(p)$ *на функцията* $f(t) = \begin{cases} a & \text{за } b \leq t \leq c, b > 0 \\ 0, & \text{за } t < b \text{ и за } t > c. \end{cases}$

Решение: Графиката на функцията $f(t)$ при $a > 0$ е дадена на фиг. 4. Функцията $f(t)$ има следното аналитично представяне: $f(t) = a(1(t-b) - 1(t-c))$. От (35) намираме $f(t) \rightleftarrows a(\frac{e^{-b\,p}}{p} - \frac{e^{-c\,p}}{p})$.

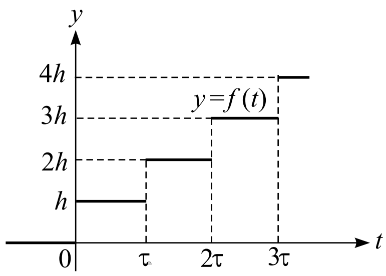
Пример 27. *Намерете образа на функцията* $f(t)$*, чиято графика е дадена на фиг.*5.

Решение: Функцията $f(t)$ може да се запише по следния начин:
$f(t) = 1(t) - 1(t-1) + 1(t-2) - 1(t-3) + 1(t-4) - 1(t-5)$.
Вземайки предвид (35), намираме

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2\,p}}{p} - \frac{e^{-3\,p}}{p} + \frac{e^{-4\,p}}{p} - \frac{e^{-5\,p}}{p}\,.$$

Пример 28. *Да се намери образа на стъпаловидната функция (фиг.*6*)*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ (n+1)\,h, & n\,\tau \leq t \leq (n+1)\,\tau, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \tau, h = \text{const} > 0, \end{cases}$$



Фиг. 6.

Решение: Функцията $f(t)$ може да се запише във вида $f(t) = h[1(t) - 1(t-\tau)] + 2h[1(t-\tau) - 1(t-2\tau)] + 3h[1(t-2\tau) - 1(t-3\tau)] + \ldots = h\,[1(t) + 1(t-\tau) + \ldots + 1(t-n\,\tau) + \ldots]$.
Като вземем предвид (35), намираме

$$f(t) \rightleftarrows h\left[\frac{1}{p} + e^{-p\,\tau}\,\frac{1}{p} + \ldots + e^{-np\,\tau}\,\frac{1}{p} + \ldots\right] = \frac{h}{p}\,\frac{1}{1 - e^{-p\,\tau}}\,,$$

ако $|e^{-p\,\tau}| = e^{-\sigma\,\tau} < 1$, а това е изпълнено при $\sigma = \mathrm{Re}\,p > 0$. И така

$$f(t) \rightleftarrows \frac{h}{p(1 - e^{-p\,\tau})}.$$

Пример 29. *Да се намери образа на функцията* $f(t) = 1(t) + t\,1(t-1)$.

Решение: За да се приложи теорема 11 за закъснението, трябва до единичната функция $1(t-1)$ да стои функция на аргумент $t-1$. Поради тази причина представяме $f(t)$ във вида $f(t) = 1(t) + ((t-1)+1)\,1(t-1) = 1(t) + (t-1)\,1(t-1) + 1(t-1)$. От $1(t) \rightleftarrows \frac{1}{p}$, $t\,1(t) \rightleftarrows \frac{1}{p^2}$ и теорема 11 за закъснението имаме $f(t) \rightleftarrows \frac{1}{p} + \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p} = \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) e^{-p}$.

Пример 30. *Намерете образа на функцията*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{h}{\tau}\, t, & 0 \le t \le \tau; \\ h \sin\frac{\pi t}{2\tau}, & \tau \le t \le 3\tau; \\ \frac{h}{\tau}\,(t-4\tau), & 3\tau \le t \le 4\tau; \\ 0, & t > 4\tau. \end{cases}$$

Решение: Като вземем предвид забележка 4, представяме $f(t)$ във вида

$$f(t) = [1(t) - 1(t-\tau)]\, \frac{h}{\tau}\, t + [1(t-\tau) - 1(t-3\tau)]\, h \sin\frac{\pi t}{2\tau} + [1(t-3\tau) - 1(t-4\tau)]\, \frac{h}{\tau}\,(t-4\tau).$$

След приведение получаваме

$$f(t) = 1(t)\,\frac{h}{\tau}\,t + 1(t-\tau)\left[h\sin\frac{\pi t}{2\tau} - \frac{h}{\tau}\,t\right] + 1(t-3\tau)\left[\frac{h}{\tau}\,(t-4\tau) - h\sin\frac{\pi t}{2\tau}\right] - 1(t-4\tau)\,\frac{h}{\tau}\,(t-4\tau).$$

Сега правим някои преобразования с цел при всяка единична функция $1(t-k\tau)$, $k = 0, 1, 3, 4$ да стои функция на същия аргумент $t - k\tau$, за да можем за намиране на образа да приложим теорема 11 за закъснението. Имаме:

$\frac{h}{\tau}\, t = h + \frac{h}{\tau}\,(t-\tau)$,

$h\sin\frac{\pi t}{2\tau} = h\sin\frac{\pi}{2\tau}\,[(t-\tau)+\tau] = h\,\sin\left[\frac{\pi}{2\tau}\,(t-\tau) + \frac{\pi}{2}\right] = h\cos\frac{\pi(t-\tau)}{2\tau}$,

$h\sin\frac{\pi t}{2\tau} = -h\cos\frac{\pi(t-3\tau)}{2\tau}$,

$\frac{h}{\tau}\,(t-4\tau) = -h + \frac{h}{\tau}\,(t-3\tau)$.

Заместваме с тези изрази в последното представяне на $f(t)$ и получаваме

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{h}{\tau}\,1(t)\,t + h\,1(t-\tau)\Big[\cos\frac{\pi\,(t-\tau)}{2\tau} - \frac{1}{\tau}\,(t-\tau) - 1\Big] \\ &+ h\,1(t-3\tau)\left[\frac{1}{\tau}\,(t-3\tau) - 1 + \cos\frac{\pi\,(t-3\tau)}{2\tau}\right] - \frac{h}{\tau}\,1(t-4\tau)\,(t-4\tau)\,. \end{aligned}$$

От теорема 11 за закъснението получаваме

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{h}{\tau}\,\frac{1}{p^2} + h\,e^{-\tau p}\Big[\frac{p}{p^2 + \frac{\pi^2}{4\tau^2}} - \frac{1}{\tau\,p^2} - \frac{1}{p}\Big] \\ &+ h\,e^{-3\tau p}\Big[\frac{1}{\tau\,p^2} - \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + \frac{\pi^2}{4\tau^2}}\Big] - h\,e^{-4\tau p}\,\frac{1}{\tau\,p^2}, \end{aligned}$$

или окончателно

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{h}{\tau\, p^2}\,(1-e^{-\tau\, p}+e^{-3\tau\, p}-e^{-4\tau\, p})-\frac{h}{p}\,(e^{-\tau\, p}+e^{-3\tau\, p}) \\ &+ \frac{h\,p}{p^2+\frac{\pi^2}{4\tau^2}}\,(e^{-\tau\, p}+e^{-3\tau\, p})\,. \end{aligned}$$

Пример 31. *Намерете образа на функцията*

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<\frac{b}{a} \\ \varphi(at-b), & t\geq\frac{b}{a}, \quad a>0, b>0, \end{cases}$$

където $\varphi\,(t)$ *е даден оригинал и* $\varphi\,(t) \rightleftarrows \Phi(p)$.

Решение: От $\varphi(at-b)=\varphi\,(a(t-\frac{b}{a}))$ следва, че ако $\psi(t)=\varphi\,(at)$, то $\varphi(at-b)=\psi(t-\frac{b}{a})$ и $f(t)=1(t-\frac{b}{a})\,\psi(t-\frac{b}{a})$. От свойстото подобие (свойство 2) следва, че $\psi(t) \rightleftarrows \frac{1}{a}\,\Phi(\frac{p}{a})$ и тогава съгласно теорема 11 за закъснението имаме $f(t) \rightleftarrows \frac{e^{-\frac{b}{a}p}}{a}\,\Phi(\frac{p}{a})$.

Пример 32. *Намерете образа на функцията* $f(t)=1(t)\,1(\tau-t)$, $\tau>0$ *и на нейната производна.*

Решение: Във физиката така може да се зададе единичен импулс, действуващ за време τ. Очевидно имаме $f(t)=1$ за $0\leq t\leq\tau$ и $f(t)=0$ в останалите случаи и следователно $f(t)=1(t)-1(t-\tau)$. От $1(t) \rightleftarrows \frac{1}{p}$ и теорема 11 за закъснението имаме $f(t) \rightleftarrows F(p)=\frac{1}{p}-\frac{e^{-p\,\tau}}{p}=\frac{1}{p}\,(1-e^{-p\,\tau})$. Ако използуваме формулата (24), получаваме $f'(t) \rightleftarrows p\,F(p)-f(0)=-e^{-p\,\tau}$. Това не е вярно, тъй като функцията $f(t)$ е константа и следователно $f'(t)=0$, $F(p) \rightleftarrows \int_0^\infty f'(t)\,e^{-p\,t}\,dt=0$. Това се обяснява с факта, че $f(t)$ не е непрекъсната във всяка точка $t\geq 0$. За нея $t=\tau$ е точка на прекъсване. Затова от (25) имаме $f'(t) \rightleftarrows p\,F(p)-f(0)+e^{-p\,\tau}\,(f(\tau-0)-f(\tau+0))=1-e^{-p\,\tau}-1+e^{-p\,\tau}\,(1-0)=0$.

Теорема 12 (Теорема за изпреварването). *Ако* $f(t) \rightleftarrows F(p)$ *и* $c>0$, *то*

$$f(t+c) \rightleftarrows e^{c\,p}\Big[F(p)-\int_0^c f(t)\,e^{-p\,t}\,dt\Big] \tag{36}$$

Тази теорема се прилага при решаване на диференциални уравнения с крайни разлики, в които едновременно с функцията $f(t)$ участват и $f(t+c)$, $f(t+2c)$, $\ldots$, $f(t+nc)$. Графиката на функцията $f(t+c)$ се получава от графиката на $f(t)$ чрез преместване наляво по абцисната ос на разстояние c. Изместената част от графиката на $f(t)$, съответстваща на интервала $-c<t<0$ се изражда в отсечка от абцисната ос, а за $t>c$ е графиката на $f(t+c)$.

Доказателство. Имаме, след смяната $t+c=\tau$,

$$\begin{aligned} f(t+c) &\rightleftarrows \int_0^\infty f(t+c)\,e^{-p\,t}\,dt=\int_c^\infty f(\tau)\,e^{-p\,(\tau-c)}\,d\tau \\ &= e^{cp}\Big[\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-p\,\tau}\,d\tau-\int_0^c f(\tau)\,e^{-p\,\tau}\,d\tau\Big]=e^{cp}\Big[F(p)-\int_0^c f(\tau)\,e^{-p\,\tau}\,d\tau\Big]. \end{aligned}$$

Пример 33. *Намерете образа на функцията* $f(at{+}b)$, $a,b>0$, *ако* $f(t)$ *е оригинал и* $f(t) \rightleftarrows F(p)$.

Решение: Имаме $f(at{+}b)=f\left(a(t{+}\frac{b}{a})\right)$. Ако $\psi(t)=f(at)$, то $f(at{+}b)=\psi(t{+}\frac{b}{a})$. От свойстото подобие (свойство 2) следва, че $\psi(t) \rightleftarrows \frac{1}{a}\,F(\frac{p}{a})$ и тогава съгласно теорема 12 за изпреварването имаме $f(at+b)=\psi(t+\frac{b}{a}) \rightleftarrows e^{\frac{b}{a}p}\Big[\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})-\frac{1}{a}\int_0^b f(\tau)\,e^{-p\frac{\tau}{a}}d\tau\Big]$.

Теорема 13 (Теорема за преместването). *Ако* $F(p) \leftrightarrows f(t)$ *и* α *е произволно комплексно число, то*

$$F(p+\alpha) \leftrightarrows e^{-\alpha\,t}\,f(t), \quad \mathrm{Re}\,(p+\alpha)>\sigma_0\,. \tag{37}$$

Доказателство. Ако $\mathrm{Re}\,(p+\alpha)>\sigma_0$, то

$$F(p+\alpha)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-(p+\alpha)\,t}\,dt=\int_0^\infty f(t)\,e^{-\alpha\,t}\,e^{-p\,t}\,dt=\mathcal{L}(f(t)\,e^{-\alpha\,t}).$$

Съгласно тази теорема прибавянето на α към аргумента на образа съответства на умножение на оригинала с $e^{-\alpha\,t}$. Умножението на оригинала $f(t)$ с $e^{-\alpha\,t}$ води до затихване на функцията $f(t)$ ($e^{-\alpha\,t}\to 0$ при $t\to\infty$, ако $\alpha>0$). Такива затихвания се срещат често в приложенията.

Горният резултат може да запишем и така:

$$F(p-\alpha) \leftrightarrows e^{\alpha\,t}\,f(t)\,. \tag{38}$$

Пример 34. *Намерете образите на* $e^{-\alpha\,t}\cos\beta\,t$, $e^{-\alpha\,t}\sin\beta\,t$ *и* $e^{\alpha\,t}\,t^n$.

Решение: От $\cos\beta\,t \rightleftarrows \frac{p}{p^2+\beta^2}$, $\sin\beta\,t \rightleftarrows \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$, $t^n \rightleftarrows \frac{n!}{p^{n+1}}$ и теорема 13 за преместването имаме $e^{-\alpha\,t}\cos\beta\,t \rightleftarrows \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$, $e^{-\alpha\,t}\sin\beta\,t \rightleftarrows \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$, $e^{\alpha\,t}\,t^n \rightleftarrows \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$.

Пример 35. *Намерете образа на функцията* $\dfrac{t^n}{n!}\mathrm{ch}\,\alpha\,t$.

Решение: От $\mathrm{ch}\,\alpha\,t=\frac{e^{\alpha\,t}+e^{-\alpha\,t}}{2}$, $e^{\alpha\,t}\,t^n \rightleftarrows \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$ и свойството линейност имаме

$$\frac{t^n}{n!}\mathrm{ch}\,\alpha\,t=\frac{t^n}{n!}.\frac{e^{\alpha\,t}+e^{-\alpha\,t}}{2} \rightleftarrows \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}+\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}\Big].$$

Нека $f_1(t)$ и $f_2(t)$ са непрекъснати за $t\ge 0$. Функцията $\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau$ се нарича **конволюция** на функциите $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и се означава с $(f_1*f_2)(t)$. Използува се и означението $f_1(t)*f_2(t)$, което практически е по-удобно. Ще покажем, че ако $f_1(t)$ и $f_2(t)$ са оригинали, то конволюцията $f(t)=(f_1*f_2)(t)$ е също оригинал. Преди всичко тя удовлетворява условията 1) и 2), защото $f_1(t)$ и $f_2(t)$ са оригинали. Нека σ_1, σ_2 са показателите на растене съответно на $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и $\sigma=\max(\sigma_1,\sigma_2)$. Тогава $|f_1(t)|\le M_1\,e^{\sigma\,t}$, $|f_2(t)|\le M_2\,e^{\sigma\,t}$, $t\ge 0$ и затова $|f(t)|\le M_1\,M_2\int_0^t e^{\sigma\,\tau}\,e^{\sigma\,(t-\tau)}\,d\tau=M_1\,M_2\,t\,e^{\sigma\,t}=M_1\,M_2\,t\,e^{-\delta\,t}e^{(\sigma+\delta)\,t}$, където $\delta>0$ е произволно малко. Може да се намери число $M>0$ такова, че $M_1\,M_2\,t\,e^{-\delta\,t}<M$

при $t \geq 0$. Тогава $|f(t)| \leq M\, e^{(\sigma+\delta)t}$, т.е. $f(t) = (f_1 * f_2)(t)$ е оригинал с показател на растене, ненадминаващ $\max(\sigma_1, \sigma_2)$, тъй като δ може да се избере произволно малко. Очевидни са следните свойства на конволюцията:
1) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$;
2) $f * (g + h) = f * g + f * h$;
3) $(f * g) * h = f * (g * h)$;
4) $f * 0 = 0$.

Теорема 14 (Теорема на Борел за умножението). *Ако,* $f_1(t) \rightleftarrows F_1(p)$, $\mathrm{Re}\, p > \sigma_1$, $f_2(t \rightleftarrows F_2(p))$, $\mathrm{Re}\, p > \sigma_2$, *то* $(f_1 * f_2)(t) \rightleftarrows F_1(p)\, F_2(p)$, $\mathrm{Re}\, p > \max(\sigma_1, \sigma_2)$.

Доказателство. След смяна на реда на интегриране във двойния интеграл (няма да обосноваваме законността на тази смяна) и след това смяна $t - \tau = u$, имаме

$$\begin{aligned}
(f_1 * f_2)(t) &\rightleftarrows \int_0^\infty e^{-pt}\Big[\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\Big] dt \\
&= \int_0^\infty \Big[f_1(\tau) \int_\tau^\infty f_2(t-\tau)\, e^{-pt}\, dt\Big] d\tau \\
&= \int_0^\infty \Big[f_1(\tau) \int_0^\infty f_2(u)\, e^{-p(\tau+u)}\, du\Big]\, d\tau \\
&= \int_0^\infty \Big[f_1(\tau)\, e^{-p\tau} \int_0^\infty f_2(u)\, e^{-pu}\, du\Big]\, d\tau \\
&= \int_0^\infty f_1(\tau)\, e^{-p\tau}\, F_2(p)\, d\tau \\
&= F_2(p) \int_0^\infty f_1(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau = F_1(p)\, F_2(p).
\end{aligned}$$

Съгласно горната теорема на произведение на образи отговаря конволюция на оригиналите.

Пример 36. *Намерете образа на функцията* $f(t) = \int_0^t e^{t-\tau} \sin\tau\, d\tau$.

Решение: Функцията $f(t)$ е конволюция на функциите $\sin t$ и e^t. От $\sin t \rightleftarrows \frac{1}{p^2+1}$, $e^t \rightleftarrows \frac{1}{p-1}$ и теорема 14 за умножението имаме

$$\int_0^t e^{t-\tau} \sin\tau\, d\tau \rightleftarrows \frac{1}{p^2+1} . \frac{1}{p-1} = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Пример 37. *Нека* $F(p) = \dfrac{p^2}{(1+p^2)^2}$ *. Намерете оригинала.*

Решение: Тъй като $F(p) = \dfrac{p}{1+p^2} . \dfrac{p}{1+p^2}$ и $\dfrac{p}{1+p^2} \leftrightarrows \cos t$, то, съгласно теорема 14 за умножението, имаме

$$\frac{p}{1+p^2} . \frac{p}{1+p^2} \leftrightarrows \int_0^t \cos\tau\, \cos(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\cos t + \cos(2\tau - t)]\, d\tau = \frac{1}{2}(t \cos t + \sin t).$$

Пример 38. *Нека* $F(p)=\dfrac{1}{(p^2-4p+5)^2}$ *. Намерете оригинала.*

Решение: Представяме $F(p)$ във вида $F(p)=\frac{1}{((p-2)^2+1)^2}$. Най напред ще намерим оригинала на функцията $F_1(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}$. Имаме $\frac{1}{(p^2+1)^2}=\frac{2p}{(p^2+1)^2}\,\frac{1}{2p}$ и $\frac{2p}{(p^2+1)^2}\leftrightarrows t\sin t$, $\frac{1}{2p}\leftrightarrows\frac{1}{2}$. От теорема 14 на Борел за умножението получаваме

$$F_1(p)\leftrightarrows\frac{1}{2}\int_0^t\tau\sin\tau\,d\tau=\frac{1}{2}(-t\cos t+\sin t)\,.$$

Тъй като $F(p)=F_1(p-2)$, то с помощта на теорема 13 за преместването намираме $F(p)\leftrightarrows\frac{1}{2}\,e^{2t}(-t\cos t+\sin t)$.

Теорема 15 (Теорема за образ на периодична функция). *Ако функцията* $f(t)$ *е оригинал и е периодична с период* $T>0$ *и* $f(t)\rightleftarrows F(p)$, *то*

$$F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}},\quad \textit{където}\ \ F_0(p)=\int_0^T f(t)\,e^{-p\,t}\,dt. \tag{39}$$

Доказателство. Имаме

$$\begin{aligned}F(p)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-p\,t}\,dt &= \int_0^T f(t)\,e^{-p\,t}\,dt+\int_T^\infty f(t)\,e^{-p\,t}\,dt\\ &= \int_0^T f(t)\,e^{-p\,t}\,dt+\int_0^\infty f(u+T)\,e^{-p\,(u+t)}\,du\\ &= \int_0^T f(t)\,e^{-p\,t}\,dt+e^{-pT}\int_0^\infty f(u)\,e^{-p\,u}\,du\\ &= \int_0^T f(t)\,e^{-p\,t}\,dt+e^{-pT}F(p),\end{aligned}$$

откъдето $(1-e^{-pT})\,F(p)=\int_0^T f(t)\,e^{-p\,t}\,dt$. Като решим относно $F(p)$, получаваме (39).

Забележка 5. *Функцията* $F_0(p)$ *може да се разглежда като образ на функцията* $f_0(t)$, *където* $f_0(t)=\begin{cases} f(t) & \text{за } 0\le t\le T,\\ 0 & \text{за } t<0 \ \text{ и за } t>T.\end{cases}$

Пример 39. *Намерете образа на* $f(t)=|\sin t|$.

Решение: Ще приложим горната теорема. Функцията $f(t)=|\sin t|$ е периодична с период $T=\pi$. Имаме

$$|\sin t|\rightleftarrows\frac{\int_0^\pi e^{-p\,t}\sin t\,dt}{1-e^{-p\,\pi}}=\frac{1+e^{-p\,\pi}}{(1+p^2)(1-e^{-p\,\pi})}=\frac{1}{1+p^2}\cdot\frac{e^{\frac{p\,\pi}{2}}+e^{-\frac{p\,\pi}{2}}}{e^{\frac{p\,\pi}{2}}-e^{-\frac{p\,\pi}{2}}}=\frac{\operatorname{cth}\frac{p\pi}{2}}{1+p^2}.$$

Теорема 16. *Нека* $f_1(t),\ f_2(t),\ f_2'(t)$ *са оригинали и* $f_1(t) \rightleftarrows F_1(p),\ f_2(p) \rightleftarrows F_2(p)$. *Тогава*

$$p\,F_1(p)\,F_2(p) \leftrightarrows f_1(t)\,f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)\,f_2'(t-\tau)\,d\tau \quad \textit{(\textbf{Формула на Дюамел})}. \tag{40}$$

Доказателство. Записваме лявата част на (40) във вида $p\,F_1(p)\,F_2(p) = F_1(p)\,f_2(0) + F_1(p)\Big[p\,F_2(p) - f_2(0)\Big]$. От (24) следва, че $pF_2(p) - f_2(0) \leftrightarrows f_2'(t)$, а от теоремата за умножението имаме $F_1(p)\,(pF_2(p) - f_2(0)) \leftrightarrows \int_0^t f_1(\tau)\,f_2'(t-\tau)\,d\tau$. Тогава, като вземем предвид линейността на преобразованието на Лаплас, получаваме

$$p\,F_1(p)\,F_2(p) = F_1(p)\,f_2(0) + F_1(p)\,(p\,F_2(p) - f_2(0)) \leftrightarrows f_1(t)\,f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)\,f_2'(t-\tau)\,d\tau, .$$

Формулата на Дюамел може да се запише и по-следния начин:

$$p\,F_1(p)\,F_2(p) \leftrightarrows \frac{d}{dt}\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{41}$$

Тъй като конволюцията е комутативна, то ако $f_1'(t)$ е оригинал, в сила е следната формула

$$p\,F_1(p)\,F_2(p) \leftrightarrows f_2(t)\,f_1(0) + \int_0^t f_2(\tau)\,f_1'(t-\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t f_2(\tau)\,f_1(t-\tau)\,d\tau.$$

Упражнения

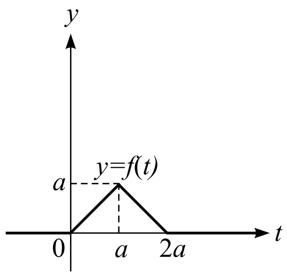
Задача 14. *Намерете* $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, *където:*
1. $f(t) = t\,e^{3t}\cos 2t$; 2. $f(t) = 1(t-1)\,(t-1)^2 e^{t-1}$; 3. $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2\,e^{\tau}\,d\tau$.

Отг. 1. $F(p) = \frac{(p-3)^2-4}{((p-3)^2+4)^2}$; 2. $F(p) = \frac{2\,e^{-p}}{(p-1)^3}$; 3. $F(p) = \frac{2}{p^3(p-1)}$.

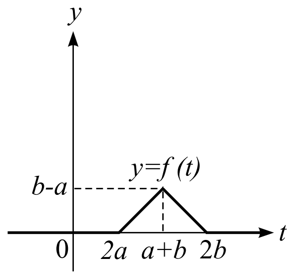
Задача 15. *Ако* $f(t) \rightleftarrows \dfrac{1}{p^2} + 5p$, *намерете образа* $F(p)$ *на:*
1. $e^{2t} f(2t)$; 2. $1(t-1)\,f(t-1)$; 3. $t\,e^t\,f(t)$.

Отг. 1. $F(p) = \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{(p-2)^2} + \frac{5}{2}(p-2)\Big)$; 2. $F(p) = e^{-p}(\frac{1}{p^2} + 5p)$; 3. $F(p) = \frac{2}{(p-1)^3} - 5$.

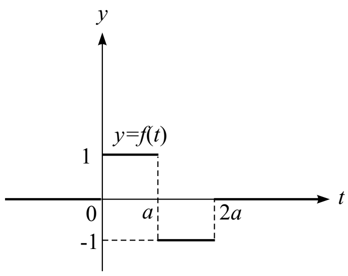
Задача 16. *Постройте графиката на функцията* $f(t)$ *и намерете* $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, *където:*
1. $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} 1(t-k)$; 2. $f(t) = 1(t-c)\,1(c+\tau-t),\ c>0, \tau>0$;
3. $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{2^k} 1(t-kc)\,1(kc+\tau-t),\ c>\tau>0$.



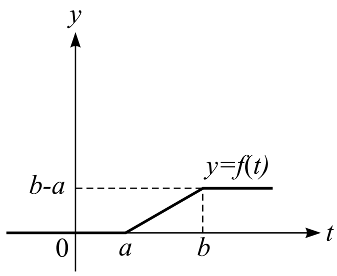
Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.



Фиг. 10.

Отг. 1. $F(p) = \frac{1}{p}\,(1+e^{-p})(1+e^{-2p})\,$; 2. $F(p) = \frac{(1-e^{-p\,\tau})\,e^{-p\,c}}{p}$;
3. $F(p) = \frac{1}{p}\,(1-e^{-p\,\tau})(1+\frac{1}{2}e^{-p\,c}+\frac{1}{4}e^{-2p\,c})\,.$

Задача 17. *Намерете* $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, *където:*

1. $f(t) = \begin{cases} 0 & за\ \ t < a, \\ e^{-b(t-a)} & за\ \ t > a,\ a > 0 \end{cases}$ 2. $f(t) = \begin{cases} 0 & за\ \ t < \frac{\pi}{18}, \\ \cos(3t - \frac{\pi}{6}) & за\ \ t > \frac{\pi}{18}. \end{cases}$

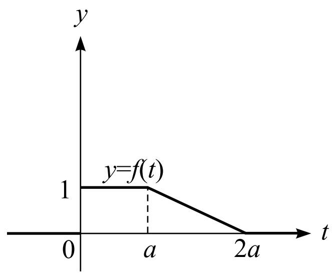
Отг. 1. $F(p) = \frac{e^{-a\,p}}{p+b}$; 2. $F(p) = \frac{p\,e^{-\frac{\pi\,p}{18}}}{p^2+9}$.

Задача 18. *Намерете* $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, *където:*

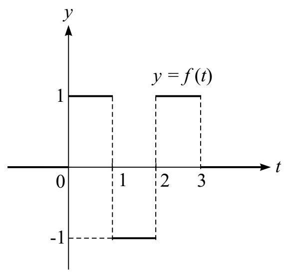
1. $f(t) = \begin{cases} t & за\ \ 0 < t < a, \\ 2a - t & за\ \ a < t < 2a, \\ 0 & за\ \ t < 0 \quad и\ за\ \ t > 2a\ \ (фиг.7); \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} t - 2a & за\ \ 2a < t < a+b,\ a > 0, \\ 2b - t & за\ \ a+b < t < 2b, \\ 0 & за\ \ t < 2a \quad и\ за\ \ t > 2b\ \ (фиг.\ 8); \end{cases}$

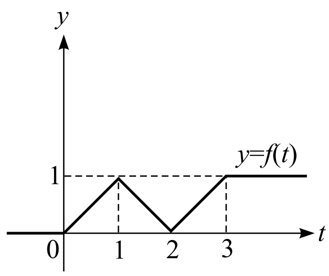
3. $f(t) = \begin{cases} 0 & за\ \ t < 0\ \ и\ за\ \ t > 2a, \\ 1 & за\ \ 0 < t < a, \\ -1 & за\ \ a < t < 2a\ \ (фиг.\ 9); \end{cases}$



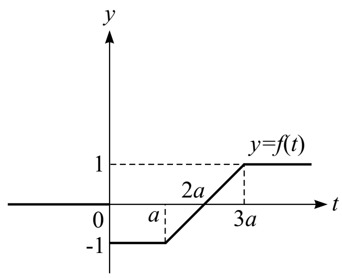
Фиг. 11.



Фиг. 12.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

Отг. $1.\, F(p) = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-a\,p})^2\,;$ $\quad 2.\, F(p) = \frac{1}{p^2}(e^{-a\,p} - e^{-b\,p})^2\,;$
$3.\, F(p) = \frac{1}{p}(1 - e^{-a\,p})^2\,;$

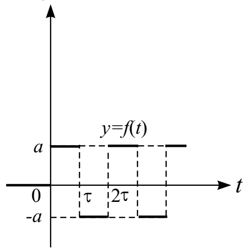
Задача 19. *Намерете* $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, *където графиката на* $f(t)$ *е дадена на:*
1. *фиг.* 10*;* 2. *фиг.* 11*;* 3. *фиг.* 12*;* 4. *фиг.* 13*;* 5. *фиг.* 14*;* 6. *фиг.* 15.

Отг. $1.\, F(p) = \frac{1}{p^2}(e^{-a\,p} - e^{-b\,p})\,;$ $\quad 2.\, F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{a\,p^2}(e^{-a\,p} - e^{-2a\,p})\,;$
$3.\, F(p) = \frac{1}{p}(1 - 2\,e^{-p} + 2\,e^{-2p} - e^{-3p})\,;$ $\quad 4.\, F(p) = \frac{1}{p^2}(1 - 2\,e^{-p} + 2\,e^{-2p} - e^{-3p})\,;$

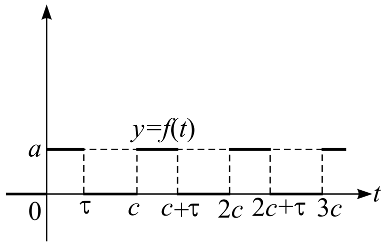
$5.\, F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{a\,p^2}(e^{-a\,p} - e^{-3a\,p})\,;$ $\quad 6.\, F(p) = \frac{a}{p}\,\frac{1-e^{-p\tau}}{1+e^{-p\tau}}\,.$

Задача 20. *Да се намери образът* $F(p)$ *на периодичен правоъгълен импулс със стойност* a, *период* c *и продължителност* τ $(\tau < c)$ *(фиг.* 16*).*

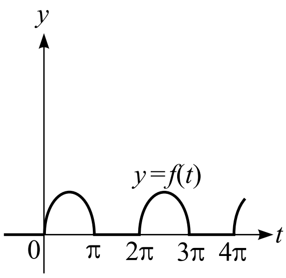
Отг. $F(p) = \frac{a}{p}\,\frac{1-e^{-p\tau}}{1-e^{-p\,c}}\,.$



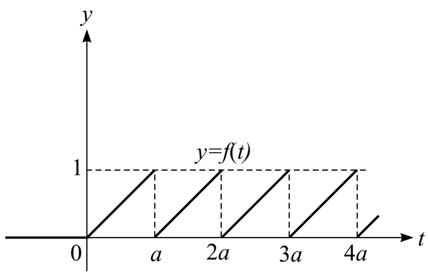
Фиг. 15.



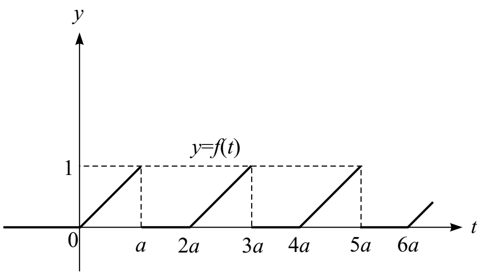
Фиг. 16.



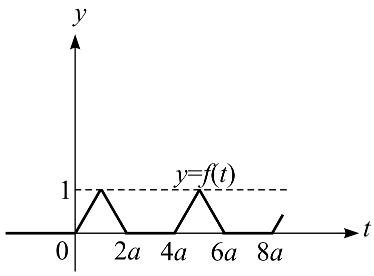
Фиг. 17.



Фиг. 18.



Фиг. 19.



Фиг. 20.

Задача 21. *Намерете образа $F(p)$ на периодичната функция оригинал $f(t)$ с период $T = 2\pi$ и*

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{за } 0 \le \ t \le \pi, \\ 0 & \text{за } \pi \le \ t \le \ 2\pi (\text{фиг. 17}). \end{cases}$$

Отг. $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)\,(1-e^{-p\,\pi})}$.

Задача 22. *Намерете образа $F(p)$ на функцията* $f(t) = \dfrac{\sin t}{|\sin t|}$.

Упътване. Очевидно функцията $f(t) = \frac{\sin t}{|\sin t|}$ е периодична с период $T = 2\pi$ и

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{за } 0 < t < \pi, \\ -1 & \text{за } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Тази функция се нарича правоъгълен синус.
Отг. $F(p) = \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\, p}{2}}{p \operatorname{ch} \frac{\pi\, p}{2}}$.

Задача 23. *Намерете образа $F(p)$ на периодичната функция $f(t)$, зададена графично на:*
1. *фиг.*18*;* 2. *фиг.* 19*;* 3. *фиг.*20.

Отг. $1.\, F(p) = \frac{ap+1-e^{ap}}{ap^2(1-e^{ap})}$; $2.\, F(p) = \frac{1-(1+ap)\,e^{-ap}}{ap^2(1-e^{-2ap})}$; $3.\, F(p) = \frac{(1-e^{-ap})^2}{ap^2(1-e^{-4ap})}$.

Задача 24. *Намерете* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$, *където:*

1. $F(p)=\frac{1-e^{-p}+(1+p)e^{-2\,p}}{p^2}$; 2. $F(p)=\frac{e^{-p}}{p^2+1}+\frac{p\,e^{-2\,p}}{p^2+4}$; 3. $F(p)=\frac{1}{p^3-p^2+p-1}$;

4. $F(p)=\frac{p^2+1}{p^2(p+1)}$; 5. $F(p)=\frac{1}{p^3(p^2+1)}$ 6. $F(p)=\frac{1}{p(1+e^{-p})}$;

7. $F(p)=\frac{16}{(p^2+4)^2}$; 8. $F(p)=\frac{p+2}{p^2+4p+5}$ 9. $F(p)=\frac{e^{-2\,p}}{p^2+4\,p+13}$.

Отг. 1. $f(t)=1(t)t-1(t-1)(t-1)+1(t-2)(t-1)$;
2. $f(t)=1(t-1)\,\sin(t-1)+1(t-2)\,\cos 2(t-2)$;
3. $f(t)=\frac{1}{2}(e^t-\cos t-\sin t)$;
4. $f(t)=t-1+2\,e^{-t}$;
5.$f(t)=\dfrac{t^2}{2}+\cos t-1$.

Решение: 6. Ако $\operatorname{Re} p>0$, то $0<|e^{-p}|<1$ и

$$F(p)=\frac{1}{p}\,(1-e^{-p}+e^{-2p}-e^{-3p}+\ldots)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\,e^{-p}+\frac{1}{p}\,e^{-2p}-\frac{1}{p}\,e^{-3p}+\ldots.$$

От $\dfrac{1}{p}\leftrightarrows 1$ и теорема 11 за закъснението имаме $\dfrac{1}{p}\,e^{-n\,p}\leftrightarrows 1(t-n)$. Към горния ред прилагаме свойството линейност (свойство 1), макар че то е доказано за краен брой събираеми. За оригинала $f(t)$ получаваме $f(t)=1-1(t-1)+1(t-2)-1(t-3)+\ldots$. Очевидно $f(t)=1$ за $0<t<1$, $f(t)=0$ за $1<t<2$, $f(t)=1$ за $2<t<3$, $f(t)=0$ за $3<t<4$ и т.н. Следователно оригиналът $f(t)$ е периодична функция с период $T=2$, равна на 1 за $0<t<1$ и равна на 0 за $1<t<2$. Налага се да направим проверка дали това е търсеният оригинал, защото приложихме свойство 1 за безкраен ред. Съгласно теорема 15 за образ на периодична функция имаме

$$\mathcal{L}(f(t))=\frac{\int_0^2 f(t)\,e^{-p\,t}\,dt}{1-e^{-2\,p}}=\frac{\int_0^1\,e^{-p\,t}\,dt}{1-e^{-2\,p}}=\frac{1-e^{-p}}{p\,(1-e^{-2\,p})}=\frac{1}{p\,(1-e^{-p})},$$

което съвпада с $F(p)$.
7. Представяме $F(p)$ във вида $F(p)=\dfrac{4}{p}.\dfrac{4\,p}{(p^2+4)^2}$. От $\dfrac{4}{p}\leftrightarrows 4$, $\dfrac{4\,p}{(p^2+4)^2}\leftrightarrows t\sin 2t$ и теорема 14 за умножението имаме

$$F(p)\leftrightarrows 4\int_0^t \tau\sin 2\tau\,d\tau=\sin 2t-2t\cos 2t.$$

Отг. 8. $f(t)=e^{-2\,t}\cos t$; 9. $f(t)=\frac{1}{3}\,1(t-2)\,e^{-2(t-2)}\sin 3(t-2)$.

5.Теореми за разлагане

Теоремите за разлагане дават един метод за намиране на оригинал по известен образ.

Нека образът $F(p)$ е правилна несъкратима рационална дроб, т.е. $F(p) = \dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$, където $F_1(p)$, $F_2(p)$ са полиноми от степени съответно m и n, $m < n$ без общи нули. За нулите на полинома $F_2(p)$ са възможни следните два случая:

Първи случай. Всички нули на полинома $F_2(p)$ са прости. Нека $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са тези нули (реални или комплексни). Ще покажем, че оригиналът се дава с формулата

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}\, e^{p_k\, t}\,. \tag{42}$$

Най-напред разлагаме $F(p)$ в сума от елементарни дроби:

$$F(p) = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \ldots + \frac{A_n}{p-p_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{p-p_k}. \tag{43}$$

За да определим константите A_k, умножаваме (43) с $p - p_k$ и след това правим граничен преход при $p \to p_k$. Имаме

$$\begin{aligned} \lim_{p\to p_k} (p-p_k)\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \quad &= \quad \lim_{p\to p_k} \left[\frac{A_1}{p-p_1}(p-p_k) + \ldots + \frac{A_{k-1}}{p-p_{k-1}}(p-p_k) + A_k + \right. \\ &\left. \frac{A_{k+1}}{p-p_{k+1}}(p-p_k) + \ldots + \frac{A_n}{p-p_n}(p-p_k)\right] = A_k \end{aligned}$$

откъдето

$$A_k = \lim_{p\to p_k} (p-p_k)\,\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \lim_{p\to p_k} \frac{F_1(p)}{\dfrac{F_2(p)-F_2(p_k)}{p-p_k}} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{44}$$

Заместваме (44) в (43) и намираме

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} . \frac{1}{p-p_k}. \tag{45}$$

От $\frac{1}{p-p_k} \rightleftarrows e^{p_k\, t}$ и свойството линейност за оригинала получаваме (42).

Забележка 6. *Ако коефициентите на полиномите* $F_1(p)$ *и* $F_2(p)$ *са реални и* $F_2(p)$ *има проста комплексна нула, например* $a+ib$, *то и* $a-ib$ *е също проста нула на този полином. Тогава в разлагането* (43) *ще участвуват събираемите* $\dfrac{A}{p-a-ib}+\dfrac{B}{p-a+ib}$, *където, съгласно* (44), *имаме* $A=\dfrac{F_1(a+ib)}{F_2'(a+ib)}$ *и* $B=\dfrac{F_1(a-ib)}{F_2'(a-ib)}=\overline{A}$. *Нека* $A=M+iN$. *След преобразуване, получаваме*

$$\frac{A}{p-a-ib}+\frac{B}{p-a+ib}=\frac{2M\,(p-a)-2N\,b}{(p-a)^2+b^2}\,. \tag{46}$$

Следователно в този случай двете събираеми в разлагането (43), *които отговарят на комплексно спрегнатите нули* $a\pm ib$, *можем да заместим с дясната страна на* (46), *където* $M=\operatorname{Re}\dfrac{F_1(a+ib)}{F_2'(a+ib)}$, $N=\operatorname{Im}\dfrac{F_1(a+ib)}{F_2'(a+ib)}$. *Оригиналът, съответстващ на дясната страна на* (46) *е* $2M\,e^{a\,t}\cos b\,t-2N\,e^{a\,t}\sin b\,t$.

Втори случай. Между нулите на $F_2(p)$ има и многократни. Нека нулите на $F(p)$ са $p_1,p_2,\dots,p_s$ от кратности съответно $n_1,n_2,\dots,n_s$, като $n_1+n_2+\ldots+n_s=n$. В този случай разлагането на $F(p)$ има вида

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_{kj}}{(p-p_k)^j}\,. \tag{47}$$

Може да се покаже, че

$$A_{kj}=\frac{1}{(n_k-j)!}\lim_{p\to p_k}[(p-p_k)^{n_k}F(p)]^{(n_k-j)},\quad j=1,2,\dots,n_k,\ k=1,2,\dots,s. \tag{48}$$

Тъй като $\dfrac{1}{p-p_k}\leftrightarrows e^{p_k\,t}$ и от теорема 5 за диференциране на изображение имаме $\dfrac{n!}{(p-p_k)^{n+1}}\leftrightarrows t^n\,e^{p_k\,t}$, то от (47) и свойството линейност получаваме за оригинала

$$f(t)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_{kj}}{(j-1)!}\,t^{j-1}\,e^{p_k\,t}\,. \tag{49}$$

От получената формула при $n_1=n_2=\ldots=n_s=1$ и $s=n$ получаваме (42).

Оригиналът $f(t)$ може да се запише и по друг начин, ако се обърне внимание на факта, че p_k е n_k-кратен полюс на функцията $F(p)\,e^{p\,t}$ и

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(F(p)\,e^{p\,t}; p_k\right) &= \frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}[(p-p_k)^{n_k}\,F(p)\,e^{p\,t}]^{(n_k-1)} \\
&= \frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\binom{n_k-1}{j}[(p-p_k)^{n_k}\,F(p)]^{(n_k-1-j)}\,(e^{p\,t})^{(j)} \\
&= \frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\sum_{j=1}^{n_k}\binom{n_k-1}{j-1}[(p-p_k)^{n_k}\,F(p)]^{(n_k-j)}\,(e^{p\,t})^{(j-1)} \\
&= \frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{(n_k-1)!}{(j-1)!\,(n_k-j)!}[(p-p_k)^{n_k}\,F(p)]^{(n_k-j)}\,t^{j-1}\,e^{p\,t} \\
&= \sum_{j=1}^{n_k}\frac{1}{(n_k-j)!}\lim_{p\to p_k}[(p-p_k)^{n_k}\,F(p)]^{(n_k-j)}\,\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{p\,t} \\
&= \sum_{j=1}^{n_k}A_{kj}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{p_k\,t}\,.
\end{aligned}$$

Следователно

$$f(t) = \sum_{k=1}^{s}\operatorname{Res}\left(F(p)\,e^{p\,t}; p_k\right). \tag{50}$$

Така доказахме следната теорема.

Теорема 17 (Втора теорема за разлагане). *Ако образът* $F(p) = \dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$, *където* $F_1(p)$ *и* $F_2(p)$ *са полиноми съответно от степен* m *и* n, $m < n$ *без общи нули и* p_k, $k = 1, 2, \ldots, s$ *са различните нули на* $F_2(p)$ *(реални или комплексни) съответно от кратности* n_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, $\sum_{k=1}^{s} n_k = n$, *то оригиналът* $f(t)$ *се дава с формулата* (49) , *където* A_{kj} *се получава с* (48). *Оригиналът* $f(t)$ *може да се намери и с формулата* (50).

Забележка 7. *Ако* $F(p)$ *е неправилна рационална дроб, т.е.* $F(p) = \dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$, *където* $F_1(p)$, $F_2(p)$ *са полиноми от степени съответно* m *и* n, $m > n$, *то* $F(p)$ *не може да бъде образ на някоя функция, защото за нея* $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) \neq 0$, *а за образите е необходимо* $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$ *(виж следствие 1).*

Оригиналът $f(t)$ може да се намери лесно по даден образ $F(p)$, ако за функцията $F(p)$ безкрайната точка $p = \infty$ е отстранима особена точка. Тогава лорановият ред на $F(p)$ в околност на $p = \infty$ има вида

$$F(p) = c_0 + \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \ldots + \frac{c_n}{p^n} + \ldots$$

при това трябва $c_0 = 0$, защото съгласно следствие 1 имаме $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$.

Теорема 18 (Първа теорема за разлагане). *Нека в околност на безкрайната точка за образа* $F(p)$ *е валидно развитието*

$$F(p) = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \ldots + \frac{c_n}{p^n} + \ldots, \quad |p| > R \ \text{ за някое } \ R > 0\,. \tag{51}$$

Тогава за оригинал на $F(p)$ *служи функцията* $1(t)\,f(t)$, *където*

$$f(t) = c_1 + \frac{c_2}{1!}\,t + \frac{c_3}{2!}\,t^2 + \ldots + \frac{c_n}{(n-1)!}\,t^{n-1} + \ldots. \tag{52}$$

При това $f(t)$ *е цяла функция от експоненциален тип, т.е.* $|f(t)| \le e^{\sigma_0 t}$.

Доказателство. Полагаме $p = \frac{1}{q}$ и разглеждаме функцията $\Phi(q) = F(\frac{1}{q})$. Функцията $\Phi(q) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, q^n$ е аналитична кръга $|q| \le \frac{1}{R_1}$, където $R_1 > R$ е произволно. От неравенствата на Коши за коефициентите на степенния ред имаме $|c_n| \le M\, R_1^n$, където $M = \max_{|q|=\frac{1}{R_1}} |\Phi(q)|$. Тогава

$$\left|\frac{c_n}{(n-1)!}\,t^{n-1}\right| \le \frac{MR_1(|t|R_1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

за всяко $t \in \mathbb{C}$ и тъй като редът $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{MR_1(|t|\,R_1)^{n-1}}{(n-1)!}$ е сходящ за всяко $t \in \mathbb{C}$, то редът (52) е сходящ (абсолютно) в $\mathbb{C}$. Следователно сумата му $f(t)$ е цяла функция. Освен това имаме

$$|f(t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|\,|t|^{n-1}}{(n-1)!} \le M\,R_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(R_1|t|)^n}{n!} = M\,R_1\,e^{R_1|t|}$$

за всяко $t \in \mathbb{C}$, откъдето $|f(t)| \le M\,R_1\,e^{R_1\,t}$ за $t \ge 0$. От направените разглеждания следва, че $1(t)\,f(t)$ е оригинал. Тъй като редът (52) е равномерно сходящ във всяко компактно подмножество на $\mathbb{C}$, той може да се умножи с e^{-pt} и да се интегрира почленно по t от 0 до произволно $T > 0$. Ако при това $\mathrm{Re}\,p > R$, то може да се интегрира от 0 до ∞. Нека $\mathrm{Re}\,p > R$. Имаме

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)\,e^{-p\,t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1}\,e^{-p\,t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n} = F(p)\,,$$

тъй като $\int_0^{\infty} t^{n-1}\,e^{-p\,t}\,dt = \mathcal{L}(t^{n-1}) = \frac{(n-1)!}{p^n}$.

Забележка 8. *Може да се докаже и обратното твърдение, а именно: ако оригиналът има вида* $1(t)\,f(t)$, *където* $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}\,t^n$ *е цяла функция, удовлетворяваща условието* $|f(t)| < M\,e^{\sigma_0\,|t|}$, *т.е.* $f(t)$ *е от експоненциален тип, то изображението* $F(p) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}}$.

Пример 40. *Намерете оригинала* $f(t)$ *на функцията* $F(p) = \dfrac{1}{p\,(p+1)^3}$.

Решение: Разлагаме рационалната функция $F(p)$ в сума от елементарни дроби. Имаме

$$F(p) = \frac{1}{p\,(p+1)^3} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D}{(p+1)^3}.$$

С помощта на формулите (44) и (48) за коефициентите намираме $A = 1,\ \ B = -1,\ \ C = -1,\ \ D = -1$. Следователно

$$F(p) = \frac{1}{p\,(p+1)^3} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)^3}.$$

От втората теорема за разлагане намираме $f(t) = 1 - e^{-t} - t\,e^{-t} - \frac{1}{2}t^2\,e^{-t}$.

Пример 41. *Намерете оригинала* $f(t)$ *на функцията* $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)\,(p^2+2p+2)}$.

Решение: Нулите на полинома в знаменателя са 1 и $-1 \pm i$. Разлагаме рационалната функция $F(p)$ в сума от елементарни дроби. Като вземем предвид забележка 6, имаме

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)\,(p^2+2p+2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{2M\,(p+1) - 2N}{(p+1)^2+1},$$

където

$$A = \frac{1}{\Big((p-1)\,(p^2+2p+2)\Big)'}\Big|_{p=1} = \frac{1}{5},$$

$$M + iN = \frac{1}{\Big((p-1)\,(p^2+2p+2)\Big)'}\Big|_{p=-1+i} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i.$$

Следователно $M = -\dfrac{1}{10},\ \ N = \dfrac{1}{5}$. Така получаваме

$$F(p) = \frac{1}{5(p-1)} - \frac{1}{5}\,\frac{p+1}{(p+1)^2+1} - \frac{2}{5}\,\frac{1}{(p+1)^2+1}$$

и

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{5}\,e^t - \frac{1}{5}\,e^{-t}\,\cos t - \frac{2}{5}\,e^{-t}\,\sin t\,.$$

Може да се работи и по-следния начин. За дадената функция $F(p)$ е валидно следното разлагане в сума от елементарни дроби:

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+2p+2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{M\,p+N}{p^2+2p+2}.$$

Лесно се намира, че $A = \frac{1}{5},\ \ M = -\frac{1}{5},\ \ N = -\frac{3}{5}$. Така получаваме

$$F(p) = \frac{1}{5(p-1)} - \frac{1}{5}\,\frac{p+3}{p^2+2p+2},$$

което записваме така:

$$F(p) = \frac{1}{5(p-1)} - \frac{1}{5}\,\frac{p+1}{(p+1)^2+1} - \frac{1}{5}\,\frac{2}{(p+1)^2+1},$$

откъдето

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{5}\,e^{t} - \frac{1}{5}\,e^{-t}\cos t - \frac{2}{5}\,e^{-t}\sin t\,.$$

Пример 42. *Намерете оригинала* $f(t)$ *на функцията* $F(p) = \dfrac{5p}{(p^2+4)\,(p^2+9)}$.

Решение: Нулите на полинома в знаменателя са $\pm 2i$ и $\pm 3i$. Разлагаме рационалната функция $F(p)$ в сума от елементарни дроби. Като вземем предвид забележка 6, имаме

$$F(p) = \frac{5p}{(p^2+4)\,(p^2+9)} = \frac{2M_1\,p - 4N_1}{p^2+4} + \frac{2M_2\,p - 6N_2}{p^2+9}\,,$$

където

$$M_1 + iN_1 = \frac{5p}{\Big((p^2+4)\,(p^2+9)\Big)'}\Bigg|_{p=2i} = \frac{1}{2}, \quad M_2 + iN_2 = \frac{5p}{\Big((p^2+4)\,(p^2+9)\Big)'}\Bigg|_{p=3i} = -\frac{1}{2}\,.$$

Следователно $M_1 = \dfrac{1}{2}$, $N_1 = 0$, $M_2 = -\dfrac{1}{2}$, $N_2 = 0$. Така получаваме

$$F(p) = \frac{5p}{(p^2+4)\,(p^2+9)} = \frac{p}{p^2+4} - \frac{p}{p^2+9}$$

и

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \cos 2t - \cos 3t\,.$$

Пример 43. *Намерете оригинала* $f(t)$ *на функцията* $F(p) = \dfrac{p^3 + 3\,p^2 - p + 1}{p\,(p+1)^2\,(p^2+1)}$ *с помощта на формула* (50).

Решение: Точките $p_1 = 0$ и $p_{2,3} = \pm\, i$ са прости полюси на функцията $F(p)\,e^{p\,t}$, а $z_4 = -1$ е двукратен полюс. За резидуумите намираме:

$$\operatorname{Res}\,(F(p)\,e^{p\,t}; 0) = \lim_{p\to 0} p\,F(p)\,e^{p\,t} = 1\,;$$

$$\operatorname{Res}\,(F(p)\,e^{p\,t}; i) = \lim_{p\to i}(p-i)\,F(p)\,e^{p\,t} = \frac{1}{2i}\,e^{i\,t} + \frac{1}{2}\,e^{i\,t}\,;$$

$$\operatorname{Res}\,(F(p)\,e^{p\,t}; -i) = \lim_{p\to -i}(p+i)\,F(p)\,e^{p\,t} = -\frac{1}{2i}\,e^{i\,t} + \frac{1}{2}\,e^{-i\,t}\,;$$

$$\operatorname{Res}\,(F(p)\,e^{p\,t}; -1) = \lim_{p\to -1}\Big((p+1)^2\,F(p)\,e^{p\,t}\Big)' = -2\,e^{-t} - 2t\,e^{-t}\,.$$

От (50) получаваме $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = 1 + \frac{1}{2i}\,e^{i\,t} + \frac{1}{2}\,e^{i\,t} - \frac{1}{2i}\,e^{i\,t} + \frac{1}{2}\,e^{-i\,t} - 2\,e^{-t} - 2t\,e^{-t} = 1 + \cos t + \sin t - 2\,e^{-t} - 2t\,e^{-t}$.

Пример 44. *Намерете оригинала* $f(t)$ *на функцията* $F(p) = \dfrac{p^4}{p^5-1}$.

Решение: Функцията $F(p) = \dfrac{p^4}{p^5-1}$ е аналитична в околността $|p| > 1$ на безкрайната точка. Следователно може да се развие в ред на Лоран в тази област. Имаме

$$F(p) = \frac{p^4}{p^5\left(1-\dfrac{1}{p^5}\right)} = \frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^5}+\frac{1}{p^{10}}+\dots\right) = \frac{1}{p}+\frac{1}{p^6}+\frac{1}{p^{11}}+\dots, \quad |p|>1.$$

От първата теорема за разлагане за оригинала $f(t)$ получаваме

$$f(t) = 1+\frac{t^5}{5!}+\frac{t^{10}}{10!}+\dots.$$

Пример 45. *Намерете оригинала* $f(t)$ *на функцията* $F(p) = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, $\sqrt{1}=1$.

Решение: Като използуваме известното развитие

$$(1+z)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}z+\frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!}\,z^2+\frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)}{3!}z^3+\dots,$$

валидно за $|z|<1$, намираме

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{p^2}+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\,\frac{1}{p^4}+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\,\frac{1}{p^6}+\dots\right)\\ &= \frac{1}{p}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{p^3}+\frac{1.3}{2^2\,2!}\,\frac{1}{p^5}-\frac{1.3.5}{2^3\,3!}\,\frac{1}{p^7}+\dots+\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k\,k!}\,\frac{1}{p^{2k+1}}+\dots \quad |p|>1. \end{aligned}$$

От първата теорема за разлагане за оригинала $f(t)$ получаваме

$$\begin{aligned} f(t) &= 1-\frac{1}{2}\,\frac{t^2}{2!}+\frac{1.3}{2^2\,2!}\,\frac{t^4}{4!}-\frac{1.3.5}{2^3\,3!}\,\frac{t^6}{6!}+\dots+\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k\,k!}\,\frac{t^{2k}}{(2k)!}+\dots\\ &= 1-\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^4}{2^4\,(2!)^2}-\frac{t^6}{2^6\,(3!)^2}\dots+\frac{(-1)^k\,t^{2k}}{2^{2k}\,(k!)^2}+\dots. \end{aligned}$$

Получената функция се означава с $\mathrm{J}_0(t)$ и се нарича **функция на Бесел от първи род и нулев ред** (За функция на Бесел виж раздел 6).
Така получихме

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \leftrightarrows \mathrm{J}_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,t^{2k}}{2^{2k}\,(k!)^2}.$$

Упражнения

Задача 25. *Намерете оригинала* $f(t)$ *на функцията* $F(p)$*, където:*

1. $F(p) = \frac{p^3-4p+1}{p\,(p-1)^3}$; 2. $F(p) = \frac{p+1}{(p^2+1)\,(p^2+4)}$; 3. $F(p) = \frac{p^2+1}{p^4-3\,p^3+4\,p^2-12\,p}$;

4. $F(p) = \frac{1}{(p-1)\,(p^2+1)}$; 5. $F(p) = \frac{p}{(p-1)\,(p^2+1)}$; 6. $F(p) = \frac{1}{p\,(p-1)\,(p^2+1)}$;

7. $F(p) = \frac{e^{-2\,p}}{(p+1)\,(p^2+2\,p+2)}$; 8. $F(p) = \frac{e^{-p}}{p\,(p-1)}$; 9. $F(p) = \frac{1}{(p^2-4p+5)^3}$.

Решение: 9. Представяме $F(p)$ във вида $F(p) = \dfrac{1}{((p-2)^2+1)^3}$. Разглеждаме функцията $F_1(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^3}$. Ако $f_1(t)$ е оригиналът на $F_1(p)$, то от (50) имаме

$$f_1(t) = \operatorname{Res}\,(F_1(p)\,e^{p\,t}; i) + \operatorname{Res}\,(F_1(p)\,e^{p\,t}; -i),$$

тъй като точките $\pm i$ са полюсите (трикратни) на функцията $F_1(p)\,e^{pt}$. За резидуумите намираме

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\,(F_1(p)\,e^{p\,t}; i) &= \frac{1}{2}\lim_{p\to i}\left[\frac{(p-i)^3\,e^{p\,t}}{(p^2+1)^3}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{p\to i}\left[\,e^{p\,t}(p+i)^{-3}\right]'' \\
&= \frac{1}{2}\lim_{p\to i}[\,e^{p\,t}\,t^2(p+i)^{-3} - 6e^{p\,t}\,t(p+i)^{-4} + 12e^{p\,t}(p+i)^{-5}] \\
&= \frac{e^{i\,t}}{8}(t^2\,i - 3t - 3i),
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}\,(F_1(p)\,e^{p\,t}; -i) = \frac{e^{-i\,t}}{8}(-t^2\,i - 3t + 3i)\,.$$

Тогава

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= \frac{1}{8}\Big[t^2\,i(e^{i\,t} - e^{-i\,t}) - 3t(e^{i\,t} + e^{-i\,t}) - 3i(e^{i\,t} - e^{-i\,t})\Big] \\
&= \frac{1}{8}(-2t^2\sin t - 6t\cos t + 6\sin t) = \frac{1}{4}(-t^2\sin t - 3t\cos t + 3\sin t).
\end{aligned}$$

Тъй като $F(p) = F_1(p-2)$, то от теорема 13 за преместването получаваме

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{e^{2t}}{4}(-t^2\sin t - 3t\cos t + 3\sin t).$$

Отг. 1. $f(t) = -1 + 2\,e^t + t\,e^t - t^2\,e^t$; 2. $f((t) = \frac{1}{3}(\cos t + \sin t - \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t)$;

3. $f(t) = -\frac{1}{12} + \frac{10}{39}\,e^{3t} - \frac{9}{52}\cos 2t + \frac{3}{26}\sin 2t$; 4. $f(t) = \frac{1}{2}(e^t - \sin t - \cos t)$;

5. $f(t) = \frac{1}{2}(e^t + \sin t - \cos t)$; 6. $f(t) = \frac{1}{2}(e^t + \cos t - \sin t - 2)$;

7. $f(t) = e^{-(t-2)} - e^{-(t-2)}\cos(t-2)$;

8. $f(t) = e^{t-1}\,1(t-1) - 1(t-1)$.

Задача 26. *Намерете оригинала* $f(t)$ *на функцията* $F(p)$, *където:*

1. $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{1}{p}}}{p^{n+1}},\ n=0,1,\dots$; 2. $F(p)=\frac{1}{p}\,e^{-\frac{1}{p^2}}$; 3. $F(p)=\log(1+\frac{1}{p})$;

4. $F(p)=\frac{p^2}{p^4-1}$; 5. $F(p)=\sin\frac{1}{p}$; 6. $F(p)=\frac{1}{1+p^{10}}$.

Решение: 1. Функцията $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{1}{p}}}{p^{n+1}}$ е аналитична в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Като използваме развитието на експоненциалната функция $e^z=1+\frac{z}{1!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$, валидно в $\mathbb{C}$, за лорановото развитие на $\dfrac{e^{-\frac{1}{p}}}{p^{n+1}}$ получаваме

$$\frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p^{n+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}.\frac{1}{p^{k+n+1}},\quad |p|>0.$$

От първата теорема за разлагане получаваме за оригинала

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}.\frac{t^{n+k}}{(n+k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}.\frac{(\sqrt{t})^{2n+2k}}{(n+k)!}=t^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}.\frac{(\sqrt{t})^{n+2k}}{(n+k)!}.$$

Функцията $\mathrm{J}_n(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(\frac{z}{2})^{n+2k}}{k!(n+k)!}$ се нарича **функция на Бесел от първи род и n-ти ред**. Така получихме

$$\frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p^{n+1}}\leftrightarrows t^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{J}_n(2\sqrt{t})$$

и при $n=0$ имаме $\dfrac{e^{-\frac{1}{p}}}{p}\leftrightarrows J_0(2\sqrt{t})$.

3. За функцията $\log z,\ \log 1=0$ е валидно развитието

$$\log(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots$$

в кръга $|z|<1$. Тогава за функцията $F(p)=\log(1+\frac{1}{p})$ получаваме

$$\log(1+\frac{1}{p})=\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{np^n}+\ldots$$

за $|p|>1$. С първата теорема за разлагане намираме за оригинала

$$f(t)=1-\frac{1}{2}\,\frac{t}{1!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots=1-\frac{t}{2!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{n!}+\ldots=\frac{1-e^{-t}}{t}.$$

Отг.

2. $f(t) = \sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{t^{2n}}{n!(2n)!}$; 4. $f(t) = \sum\limits_{0}^{\infty} \dfrac{t^{4n+1}}{(4n+1)!}$

5. $f(t) = \sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{t^{2n}}{(2n)!(2n+1)!}$; 6. $f(t) = \sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{t^{10n+9}}{(10n+9)!}$.

6. Изображения, свързани със специални функции

I. **Гама функция**

Гама функцията се дефинира с помощта на равенството

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt. \tag{53}$$

Интегралът от дясната страна на горното равенство се нарича **интеграл на Ойлер от втори род**. Той е несобствен поради безкрайната си горна граница, а при $x < 1$ и поради неограничеността на функцията $e^{-t}\, t^{x-1}$ за $t = 0$. Този интеграл е сходящ за $x > 0$. Гама функцията не е елементарна функция. Тя се отнася към т.н. специални функции, които често се срещат в приложните задачи.

Ще отбележим някои свойства на функцията $\Gamma(x)$.

1. **Формула за приведение**

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x). \tag{54}$$

Ако $x = n,\ n \in \mathbb{N}$ и вземем предвид, че $\int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$, от (54) получаваме

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Да запишем (54) във вида $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$. Това дава възможност да дефинираме $\Gamma(x)$ и за $-1 < x < 0$. Наистина, за такива x имаме $x + 1 > 0$ и $\Gamma(x+1)$ се определя еднозначно с (53). Аналогично от $\Gamma(x+2) = (x+1)\,\Gamma(x+1) = (x+1)\,x\,\Gamma(x)$ имаме $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+2)}{(x+1)\,x}$, с което можем да дефинираме $\Gamma(x)$ за $-2 < x < -1$. По такъв начин може да дефинираме $\Gamma(x)$ за всички отрицателни x, с изключение на $x = -1, -2, \ldots$. За тези значения на x, а също и за $x = 0$ функцията не е дефинирана.

2. **Формула за допълване**

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi\, x}. \tag{55}$$

От тази формула при $x = \frac{1}{2}$ получаваме $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

В комплексната равнина гама функцията се определя също с интеграла на Ойлер. т.е. с равенството

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt,$$

където $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$. Може да се покаже, че този интеграл е сходящ в полуравнината $\mathrm{Re}\, z > 0$ и че в тази полуравнина $\Gamma(z)$ е аналитична функция, за която са валидни (54) и (55). Тя може да се продължи аналитично в цялата комплексна равнина, след което $\Gamma(z)$ става аналитична в цялата комплексна равнина $\mathbb{C}$, с изключение на точките $z = 0, -1, -2, \ldots$, в които има прости полюси.
Ще отбележим още едно свойство на $\Gamma(z)$.

3.**Формула на Лежандър**

$$\Gamma(z)\,\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\,\Gamma(2z). \tag{56}$$

От тук при $z = n$ получаваме

$$\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big) = \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!}\,\sqrt{\pi}. \tag{57}$$

Чрез $\Gamma(z)$ се изразяват изображенията на Лаплас на дробните степени на t.

Пример 46. *Да се намери изображението $F(p)$ на t^ν, $\nu > -1$.*

Решение: По дефиниция имаме $F(p) = \int_0^\infty t^\nu\, e^{-pt}\, dt$, $p-$комплексна променлива. Нека отначало приемем, че p е положителна величина и да направим смяната $pt = \tau$, откъдето $t = \frac{\tau}{p}$. Получаваме

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-\tau}\left(\frac{\tau}{p}\right)^\nu \frac{d\tau}{p} = \frac{1}{p^{\nu+1}}\int_0^\infty e^{-\tau}\,\tau^\nu\, d\tau = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}.$$

Следователно при $p > 0$ и $\nu > -1$ има смисъл $F(p)$, при това трябва $p^{\nu+1} > 0$, т.е. $p^{\nu+1} = e^{(\nu+1)\ln p}$. Нека сега p е комплексна променлива. Функцията $\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$, където $p^{\nu+1} = e^{(\nu+1)\mathrm{Log}_0 p}$, $\mathrm{Log}_0 p = \ln|p| + i\mathrm{Arg}\, p$ е главната стойност на логаритъма ($-\pi < \mathrm{Arg}\, p \le \pi$) е аналитична в полуравнината $\mathrm{Re} p > 0$. Тъй като, съгласно теоремата за единственост, коя да е аналитична функция се определя еднозначно със значенията си върху крива от дефиниционната си област, то образът на Лаплас на t^ν се определя напълно със значенията си върху положителната част на реалната ос и следователно

$$t^\nu \rightleftarrows \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}},\ \ \nu > -1,\ \ \mathrm{Re}\, p > 0, \tag{58}$$

където $p^{\nu+1} = e^{(\nu+1)\,\mathrm{Log}_0 p}$. При $\nu = n \in \mathbb{N}$ от горната формула получаваме известния резултат $t^n \rightleftarrows \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}$ При $\nu = -\frac{1}{2}$ имаме $\frac{1}{\sqrt{t}} \rightleftarrows \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$ или

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\, t}} \rightleftarrows \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Ще отбележим, че при $-1 < \nu < 0$ функцията t^ν има изображение, но не удовлетворява условията за оригинал, тъй като $t^\nu \to \infty$ при $t \to +0$.

Пример 47. *Намерете изображенията на функциите:*
1. $f(t) = \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$; 2. $f(t) = \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}$.

Решение: 1.Нека $p > 0$. Формулите, които ще получим ще са валидни и за комплексни p, което може да се докаже с теоремата за единственост на аналитичните функции. От $\frac{1}{\sqrt{t}} \rightleftarrows \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$ и теорема 13 за преместването имаме

$$\frac{e^{i\,t}}{\sqrt{t}} \rightleftarrows \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p-i}}, \qquad \frac{e^{-i\,t}}{\sqrt{t}} \rightleftarrows \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+i}}$$

Тогава

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \frac{e^{i\,t} - e^{-i\,t}}{2i\sqrt{t}} \rightleftarrows \frac{\sqrt{\pi}}{2i}\Big(\frac{1}{\sqrt{p-i}} - \frac{1}{\sqrt{p+i}}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2i}\,\frac{\sqrt{p+i} - \sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Като използваме формулите

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right), \text{ ако } b \geq 0,$$

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right), \text{ ако } b < 0,$$

намираме

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \rightleftarrows \frac{\sqrt{\pi}}{2i}\,\frac{2i\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{2}}}{\sqrt{p^2+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{p^2+1}}.$$

2.Имаме

$$\frac{\cos t}{\sqrt{t}} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2\sqrt{t}} \rightleftarrows \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{p-i}} + \frac{1}{\sqrt{p+i}}\Big) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+1}+p}{p^2+1}}.$$

Пример 48. *Намерете изображенията на интегралите на Френел*

$$S(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi\,t}}\,dt, \qquad C(t) = \int_0^t \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi\,t}}\,dt.$$

Решение: От предния пример имаме

$$\frac{\sin t}{\sqrt{2\pi\,t}} \rightleftarrows \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{p^2+1}}, \qquad \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi\,t}} \rightleftarrows \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+1}+p}{p^2+1}}.$$

Теорема 6 за интегриране на оригинал дава

$$S(t) \rightleftarrows \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{p^2+1}}, \qquad C(t) \rightleftarrows \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+1}+p}{p^2+1}}.$$

Пример 49. *Намерете образа на функцията* $f(t) = \sin 2\sqrt{t}$.

Решение: Имаме
$$\sin 2\sqrt{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n+1}}{(2n+1)!}\, t^{n+\frac{1}{2}}.$$

Нека $\sin 2\sqrt{t} \rightleftarrows F(p)$. По формула (58), като вземем предвид (57), намираме
$$t^{n+\frac{1}{2}} \rightleftarrows \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{p^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\, n!\, p^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Тогава
$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{n!\, p^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^n}{n!}$$

или
$$F(p) = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{1}{p}}.$$

Функцията $F(p)$ е аналитична в околност на безкрайната точка и
$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{n!} \frac{1}{p^{n+\frac{3}{2}}}, \quad |p| > 0,$$

затова $F(p)$ удовлетворява условията на теорема 18. Следователно
$$\sin 2\sqrt{t} \rightleftarrows \frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{1}{p}}.$$

II Беселова функция

Диференциалното уравнение

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0, \tag{59}$$

където $y(t)$ е неизвестната функция, ν е реален параметър, се нарича **уравнение на Бесел**. Решението на това уравнение търсим във вид на следния ред:

$$y(t) = t^\alpha\,(a_0 + a_1\,t + \ldots + a_n\,t^n + \ldots), \quad a_0 \neq 0. \tag{60}$$

Като заместим в уравнението и приравним към нула коефициентите пред всички степени на t, получаваме най-напред, че трябва $\alpha = \pm\nu$. Ако $\alpha = \nu \geq 0$, то от останалите зависимости намираме $a_{2k+1} = 0$, $k = 0, 1.\ldots$ и

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k\,a_0}{2^{2k}\,k!\,(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

така получаваме

$$y(t) = a_0\,t^\nu\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,t^{2k}}{2^{2k}\,k!\,(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}\Big)\,. \tag{61}$$

Редът в (61) е сходящ за всяко реално t, което може да се покаже с признака на Даламбер. Като даваме на a_0 различни стойности, получаваме различни решения на уравнението (59). Решението, което се получава при $a_0 = \frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}$ се означава с $\mathrm{J}_\nu(t)$ и се нарича **функция на Бесел от първи род и ν-ти ред.** От формулата (54) за приведение следва, че $(\nu+1)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+2)$, $(\nu+2)(\nu+1)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+3)$ и т.н. Тогава от (61) намираме

$$\mathrm{J}_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2k+\nu}. \tag{62}$$

Ако $\nu \neq 0$ и положим $\alpha = -\nu$, по същия начин получаваме

$$\mathrm{J}_{-\nu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2k-\nu}$$

Ако $\nu = n \in \mathbb{N}$, тогава $\mathrm{J}_{-n}(t) = (-1)^n\,\mathrm{J}_n(t)\,.$

В сила е следната рекурентна формула

$$\mathrm{J}_{\nu+1}(t) = \mathrm{J}_{\nu-1}(t) - 2\mathrm{J}'_\nu(t). \tag{63}$$

При $\nu = 0$, вземайки предвид, че $\mathrm{J}_{-1}(t) = -\mathrm{J}_1(t)$, получаваме $\mathrm{J}_1(t) = -\mathrm{J}'_0(t)$.

Пример 50. *Намерете образа на функцията* $\mathrm{J}_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение: В пример 45 намерихме, че $\mathrm{J}_0(t) \rightleftarrows \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, $\sqrt{1} = 1$. От теорема 4 за диференциране на оригинал имаме $\mathrm{J}_0'(t) \rightleftarrows p\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} - \mathrm{J}_0(0) = \frac{p-\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}}$, тъй като $\mathrm{J}_0(0) = 1$. От $\mathrm{J}_1(t) = -\mathrm{J}_0'(t)$ следва, че

$$\mathrm{J}_1((t) \rightleftarrows \frac{\sqrt{1+p^2}-p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Ще докажем по индукция, че

$$\mathrm{J}_n((t) \rightleftarrows \frac{\left(\sqrt{1+p^2}-p\right)^n}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{64}$$

Показахме по-горе, че формулата (64) е вярна за $n = 0$ и $n = 1$. Нека тя е вярна за всяко n до $n = m$. Ще покажем, че тя е вярна и за $n = m + 1$. От (63) имаме $\mathrm{J}_{m+1}(t) = \mathrm{J}_{m-1}(t) - 2\mathrm{J}_m'(t)$. Освен това $\mathrm{J}_m(0) = 0$ при $m > 0$. Тогава

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_{m+1} &\rightleftarrows \frac{\left(\sqrt{1+p^2}-p\right)^{m-1}}{\sqrt{1+p^2}} - 2p\frac{\left(\sqrt{1+p^2}-p\right)^m}{\sqrt{p^2+1}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{1+p^2}-p\right)^{m-1}}{\sqrt{p^2+1}}(1-2p\sqrt{1+p^2}+2p^2) = \frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{m+1}}{\sqrt{p^2+1}}.
\end{aligned}$$

С това формулата (64) е доказана.

Пример 51. *Намерете образа на функцията* $t^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{J}_n(2\sqrt{t})$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение: От (62) имаме

$$t^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{J}_n(2\sqrt{t}) = t^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{2\sqrt{t}}{2}\right)^{2k+n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\,t^{k+n}.$$

Като вземем предвид забележка 8 за образа $F(p)$ получаваме

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}.\frac{1}{p^{k+n+1}} = \frac{1}{p^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{p}\right)^k}{k!} = \frac{1}{p^{n+1}}\,e^{-\frac{1}{p}}.$$

Очевидно функцията $\frac{1}{p^{n+1}}\,e^{-\frac{1}{p}}$ удовлетворява условията на първата теорема за разлагане (теорема 18), откъдето следва коректността на решението.

III. Функция на грешките

В теория на вероятностите се разглежда следната функция

$$\mathrm{erf}\,(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\tau^2}\,d\tau.$$

Тази функция се нарича **функция на грешките или функция на Лаплас**. Може да се покаже, че тя е цяла функция. Използува се още и функцията

$$\mathrm{Erf}\,(z) = 1 - \mathrm{erf}\,(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau.$$

Ще разгледаме някои задачи, в които или оригиналът, или образът се изразяват чрез функцията $\operatorname{erf}(z)$. При решаването на някои от тези задачи считаме $p > 0$, после продължаваме аналитично и се позоваваме на теоремата за единственост на аналитичните функции.

Пример 52. *Намерете образа на функцията* e^{-t^2}.

Решение: По дефиниция на образ имаме

$$e^{-t^2} \rightleftarrows \int_0^\infty e^{-p\,t}\, e^{-t^2}\, dt = \int_0^\infty e^{-(t^2+p\,t)}\, dt = \int_0^\infty e^{-(t+\frac{p}{2})^2}\, e^{\frac{p^2}{4}}\, dt = e^{\frac{p^2}{4}} \int_0^\infty e^{-(t+\frac{p}{2})^2}\, dt.$$

В последния интеграл правим смяната $t+\frac{p}{2} = \tau$, като считаме $p > 0$. Така получаваме

$$e^{-t^2} \rightleftarrows e^{\frac{p^2}{4}} \int_{\frac{p}{2}}^\infty e^{-\tau^2}\, d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right).$$

С аналитично продължение резултатът се пренася и за комплексни p.

Пример 53. *Намерете образа на функцията* $\operatorname{erf}(t)$.

Решение: В предния пример получихме, че $e^{-t^2} \rightleftarrows \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right)$. По правилото за интегриране на оригинал (теорема 6) получаваме

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2}\, d\tau \rightleftarrows \frac{1}{p}\, e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right).$$

Пример 54. *Намерете оригинала* $f(t)$ *на функцията* $F(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p}\,(p-1)}$.

Решение: В пример 46 намерихме, че $\frac{1}{\sqrt{p}} \leftrightarrows \frac{1}{\sqrt{\pi\, t}}$. Освен това имаме $\frac{1}{p-1} \leftrightarrows e^t$. Тогава, прилагайки теорема 14 за умножение, намираме

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\, \frac{1}{p-1} \leftrightarrows \frac{1}{\sqrt{\pi\, t}} * e^t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\, \tau}}\, e^{t-\tau}\, d\tau = \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}}\, d\tau = f(t).$$

В последния интеграл правим смяната $u = \sqrt{\tau}$ и получаваме

$$f(t) = \frac{2\, e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\, du = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}).$$

Пример 55. *Намерете образа на функцията* $\operatorname{erf}(\sqrt{t})$.

Решение: От предния пример имаме $e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \rightleftarrows \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}} = F(p)$. От теорема 13 за преместването получаваме $e^{-t}\, e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \rightleftarrows F(p+1) = \frac{1}{p\,\sqrt{p+1}}$, т.е. $\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \rightleftarrows \frac{1}{p\,\sqrt{p+1}}$.

Пример 56. *Намерете образа на функцията* $\operatorname{Erf}(\sqrt{t})$.

Решение: Имаме

$$\mathrm{Erf}\,(\sqrt{t}) = 1 - erf\,(\sqrt{t}) \rightleftarrows \frac{1}{p} - \frac{1}{p\,\sqrt{p+1}} = \frac{\sqrt{p+1}-1}{p\,\sqrt{p+1}} = \frac{1}{p+1+\sqrt{p+1}}.$$

Пример 57. *Намерете оригинала $f(t)$ на функцията $F(p) = \dfrac{\sqrt{p+\alpha}}{p}$, $\alpha > 0$.*

Решение: Представяме $F(p)$ във вида $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p+\alpha}} + \frac{\alpha}{p\,\sqrt{p+\alpha}}$. От $\frac{1}{\sqrt{p}} \leftrightarrows \frac{1}{\sqrt{\pi\,t}}$ и теорема 13 за преместването имаме $\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}} \leftrightarrows e^{-\alpha\,t}\frac{1}{\sqrt{\pi\,t}}$. Като приложим теорема 6 за интегриране на оригинал, получаваме

$$\frac{\alpha}{p\,\sqrt{p+\alpha}} \leftrightarrows \alpha \int_0^t \frac{e^{-\alpha\,\tau}}{\sqrt{\pi\,\tau}}\,d\tau = \sqrt{\alpha}\,\mathrm{erf}\,(\sqrt{\alpha\,t}).$$

За оригинала намираме

$$f(t) = e^{-\alpha\,t}\frac{1}{\sqrt{\pi\,t}} + \sqrt{\alpha}\,\mathrm{erf}\,(\sqrt{\alpha\,t}).$$

7. Формула за обръщане

Доказаните досега формули, правила и теореми на операционното смятане дават възможност да се намери изображение по даден оригинал и оригинал по дадено изображение. Ако това не е достатъчно, то за намиране на образ може да се опита да се пресметне интеграла на Лаплас. Какво да се прави, ако тези формули, правила и теореми не стигат за намиране на оригинала? Оказва се, че съществува формула, която дава възможност за доста широк клас образи $F(p)$ да се намери оригинала. Това е т.н. формула за обръщане.

Нека $f(t)$ е функция оригинал с показател на растене σ_0 и $f'(t)$ съществува в точките на непрекъснатост на $f(t)$. Разглеждаме изображението на Лаплас

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-p\,t}\, dt, \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

Нека $\varphi(t) = e^{-b\,t} f(t), \quad b = \text{const} > \sigma_0$. Очевидно тази функция удовлетворява условията на теорема 1 и може да се представи с формулата (5) на Фурие. Като отчетем, че $f(t) = 0$ за $t < 0$, получаваме във всяка точка $t > 0$, в която $f(t)$ е непрекъсната

$$e^{-b\,t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\lambda \int_0^\infty e^{-b\xi} f(\xi)\, e^{i\lambda\,(t-\xi)}\, d\xi\,,$$

където интегралът по λ се разбира в смисъл на главно значение. След преобразуване намираме

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{(b+i\lambda)\,t} \Big(\int_0^\infty f(\xi)\, e^{-(b+i\lambda)\,\xi}\, d\xi \Big)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(b+i\lambda)\, e^{(b+i\lambda)\,t}\, d\lambda\,,$$

където

$$F(b+i\lambda) = \int_0^\infty f(\xi)\, e^{-(b+i\lambda)\,\xi}\, d\xi\,.$$

Да направим смяната $b + i\lambda = p\,, \quad d\lambda = \dfrac{dp}{i}$. Когато λ описва реалната права, комплексната променлива p описва правата $\operatorname{Re} p = b$, успоредна на имагинерната ос. Така получаваме

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p)\, e^{p\,t}\, dp,$$

където интегралът се разбира в смисъл на главно значение, а именно:

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p)\, e^{p\,t}\, dp = \lim_{R\to\infty} \int_{b-iR}^{b+iR} F(p)\, e^{p\,t}\, dp\,.$$

И така, ако $f(t)$ е оригинал с показател на растене σ_0, ако в точките на непрекъснатост на $f(t)$ съществува $f'(t)$ и ако

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-p\,t}\, dt,\ \mathrm{Re}\, p > \sigma_0 \tag{65}$$

то във всяка точка $t > 0$, в която $f(t)$ е непрекъсната

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p)\, e^{p\,t}\, dp, \tag{66}$$

където интегрирането става по коя да е права $\mathrm{Re}\, p = b > \sigma_0$. Формулата (66) се нарича **формула за обръщане на преобразованието на Лаплас** или **формула на Риман-Мелин**.

От формулата за обръщане следва, че ако два оригинала $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имат едно и също изображение $F(p)$, то в точките на непрекъснатост те са равни, тъй като се изразяват чрез $F(p)$ с един и същи интеграл по формулата (66). Това и доказва теоремата за единственост на оригинала (теорема 3).

Естествено възниква въпросът дали може да се твърди обратното, т. е., че от (66) следва (65). В общия случай не може. Необходими са допълнителни условия за $F(p)$.

Теорема 19 (Теорема за обръщане). *Нека функцията $F(p)$ е аналитична в полуравнината $\mathrm{Re}\, p > \sigma_0 > 0$ и нека удовлетворява условията:*
1. $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(b + i\tau)|\, d\tau$ *е сходящ за $\forall\, b > \sigma_0$, т.е. $F(p)$ е абсолютно интегруема по всяка права $\mathrm{Re}\, p = b,\ b > \sigma_0$;*
2. $|F(p)| \to 0$, *когато $|p| \to \infty$ равномерно относно $\arg p$ във всяка полуравнина $\mathrm{Re}\, p \geq b > \sigma_0$.*

Тогава функцията $F(p)$ е изображение и функцията $f(t)$ от (66), където $b > \sigma_0$ и интегралът се разбира в смисъл на главно значение, е оригинал на $F(p)$. При $t < 0$ формулата (66) дава $f(t) = 0$.

Доказателство. Най-напред ще докажем, че интегралът в (66) не зависи от избора на $b, b > \sigma_0$. Нека L е правоъгълният контур с върхове в точките $A(b - iR)$, $B(b_1 - iR)$, $C(b_1 + iR)$ и $D(b + iR)$, $b_1 > b > \sigma_0$. Според основната теорема на Коши $\int_L F(p)\, e^{p\,t} dp = 0$ или

$$\int_{AB} F(p)\, e^{p\,t} dp + \int_{BC} F(p)\, e^{p\,t} dp + \int_{CD} F(p)\, e^{p\,t} dp + \int_{DA} F(p)\, e^{p\,t} dp = 0.$$

Интегралите по хоризонталните отсечки AB и CD клонят към нула при $R \to \infty$ поради условието 2 на теоремата. Следователно

$$\lim_{R\to\infty} \int_{b-iR}^{b+iR} F(p)\, e^{p\,t} dp = \lim_{R\to\infty} \int_{b_1-iR}^{b_1+iR} F(p)\, e^{p\,t} dp,$$

т.е. интегралът (66) не зависи от b и се явява функция на t.

Сега ще покажем, че функцията $f(t)$ от (66) е оригинал. Интегралът в (66) е сходящ поради условието 1 и имаме при $t > 0 \quad (p = b + i\tau)$

$$|f(t)| \le \frac{e^{b\,t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(b+i\tau)| d\tau = M\, e^{b\,t},$$

където $M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(b+i\tau)|d\tau$. От горната оценка следва равномерната сходимост по t във всеки краен интервал $[0,T]$ на интеграла (66) и непрекъснатостта на $f(t)$ за $t \ge 0$.

За да покажем, че $f(t) = 0$ за $t < 0$ ще разгледаме окръжността с център $p = 0$, минаваща през точките $b \pm iR$ и нека l_R е дъгата от тази окръжност с краища тези точки, която лежи в полуравнината $\mathrm{Re}\, p > b$. Ако L_R е контурът, който се състои от отсечката $[b - iR, b + iR]$ и дъгата l_R, то съгласно основната теорема на Коши

$$\int_{b+iR}^{b-iR} F(p)\, e^{p\,t} dp + \int_{l_R} F(p)\, e^{p\,t} dp = 0.$$

Може да се докаже, че $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{l_R} F(p)\, e^{p\,t} dp = 0$ при $t < 0$. Следователно

$$2\pi\, i f(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{b-iR}^{b+iR} F(p)\, e^{p\,t} dp = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p)\, e^{p\,t} dp = 0, \quad t < 0.$$

Остава да покажем, че образът на функцията $f(t)$ е равен на $F(p)$. Нека p_0, $\mathrm{Re}\, p_0 > \sigma_0$ е произволно и нека $\sigma_0 < b < \mathrm{Re}\, p_0$. Имаме

$$\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p_0\, t} dt = \frac{1}{2\pi\, i} \int_0^{\infty} e^{-p_0\, t} \Big[\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p)\, e^{p\,t} dp \Big] dt.$$

След смяна на реда на интегриране (няма да обосноваваме законността на тази смяна), получаваме

$$\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p_0\, t} dt = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p) dp \int_0^{\infty} e^{(p-p_0)t} dt = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{F(p)}{p_0 - p} dp. \qquad (67)$$

Избираме $R > 0$ толкова голямо, че точката p_0 да лежи вътре в контура L_R. Според основната формула на Коши

$$\frac{1}{2\pi\, i} \int_{L_R} \frac{F(p)}{p - p_0} dp = F(p_0)$$

или

$$\frac{1}{2\pi\, i} \int_{b+i\infty}^{b-i\infty} \frac{F(p)}{p - p_0} dp + \frac{1}{2\pi\, i} \int_{l_R} \frac{F(p)}{p - p_0} dp = F(p_0). \qquad (68)$$

Не е трудно да се покаже, че $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{l_R} \frac{F(p)}{p - p_0} dp = 0$. Затова като направим граничен преход при $R \to \infty$ в (68) и вземем предвид (67), получаваме

$$\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-p_0\, t} dt = F(p_0).$$

Тъй като p_0 е произволна точка от областта $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, то $f(t) \rightleftarrows F(p)$.

С това теоремата е доказана.

В приложенията обикновено се постъпва по-следния начин. Формулата (66) се записва във вида

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi\, i} \int_{b-iR}^{b+iR} F(p)\, e^{p\,t}\, dp\,. \tag{69}$$

Функцията $F(p)\, e^{p\,t}$ се интегрира по подходяща затворена крива, в която е включена отсечката $[b-iR, b+iR]$ и след това се прави граничен преход. Това дава възможност да се използува теоремата за резидуумите. Така например, ако $F(p)$ има само краен брой особени точки, интегрирането става по затворена крива, състояща се отсечката AB, където $A = b - iR$, $B = b + iR$, $b > \sigma_0$ е произволно и лявата полуокръжност с диаметър AB, като $R > 0$ е толкова голямо, че всички особени точки на $F(p)\, e^{p\,t}$ да са вътре в тази крива. Ако в израза за $F(p)$ участвуват, например, p^α, α не е цяло число или $\log p$ и се налага да се използува подходящ еднозначен клон, тогава се правят и подходящи разрези.

При пресмятане на получените интеграли е полезна следната **лема на Жордан**: Ако функцията $F(z)$ е аналитична в областта $\left\{ \begin{array}{l} |z| \geq R_0, \quad R_0 > 0 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{array} \right.$ и $M(R) = \max_{z\in l_R} |F(z)| \to 0$ при $R \to \infty$, където l_R е полуокръжността $\left\{ \begin{array}{l} |z| = R, \quad R > R_0 \\ \operatorname{Im} z \geq 0, \end{array} \right.$ то

$$\lim_{R\to\infty} \int_{l_R} F(z)\, e^{itz}\, dz = 0 \;\; (\, t > 0\,).$$

В случая е по-удобно да се използува следната формулировка на лемата, която се получава от дадената посредством смяната $iz = p$: Ако функцията $F(p)$ е аналитична в областта $\left\{ \begin{array}{l} |p| \geq R_0, \quad R_0 > 0 \\ \operatorname{Re} p \leq 0 \end{array} \right.$ и $M(R) = \max_{p\in L_R} |F(p)| \to 0$ при $R \to \infty$, където L_R е полуокръжността $\left\{ \begin{array}{l} |p| = R, \quad R > R_0 \\ \operatorname{Re} p \leq 0, \end{array} \right.$ то

$$\lim_{R\to\infty} \int_{L_R} F(p)\, e^{p\,t}\, dp = 0 \;\; (\, t > 0\,).$$

Пример 58. *Да се намери оригинала на функцията* $F(p) = \frac{1}{p^2\,(p^2-1)}$.

Решение: Оригиналът $f(t)$ може да се намери с използуваните досега методи. Ще покажем как може да се намери с теоремата за обръщане. Функцията $F(p) = \frac{1}{p^2\,(p^2-1)}$ е аналитична в полуравнината $\operatorname{Re} p > 1$ и лесно се проверява, че $|F(p)| \to 0$, когато $|p| \to \infty$ равномерно относно $\arg p$ и че $F(p)$ е абсолютно интегруема върху всяка права $\operatorname{Re} p = b > 1$. Следователно съгласно теорема 19 за обръщане оригиналът на $F(p)$ е

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi\, i} \int_{b-iR}^{b+iR} F(p)\, e^{p\,t}\, dp\,.$$

Разглеждаме функцията $F(p)\, e^{p\,t}$. Единствените особени точки на тази функция са двукратния полюс $p_1 = 0$ и простите полюси $p_2 = 1$, $p_3 = -1$. Интегрираме тази функция по контура, състоящ се от отсечката AB, където $A = b - iR$, $B = b + iR$, $b > 1$ и полуокръжността $L_R : |p - b| = R$, $\operatorname{Re} p \le b$, където R толкова голямо, че полюсите на $F(p)\, e^{p\,t}$ да са вътре в този контур и прилагаме теоремата за резидуумите. Получаваме

$$\int_{b-iR}^{b+iR} F(p)\, e^{p\,t}\, dp + \int_{L_R} F(p)\, e^{p\,t}\, dp = 2\pi\, i \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Res}\left(F(p)\, e^{p\,t}; p_k\right). \tag{70}$$

Оставяме $R \to \infty$ в (70). Във втория интеграл правим смяната $p = q + b$. При това на полуокръжността L_R отговаря полуокръжността $L'_R : \begin{cases} |q| = R \\ \operatorname{Re} q \le 0, \end{cases}$ и

$$\int_{L_R} F(p)\, e^{p\,t}\, dp = \int_{L'_R} F(q+b)\, e^{(q+b)\,t}\, dq = e^{b\,t} \int_{L'_R} F_1(q)\, e^{q\,t}\, dq\,,$$

където

$$|F_1(q)| = |F(q+b)| = \left| \frac{1}{(q+b)^2((q+b)^2 - 1)} \right| \to 0$$

при $|q| = R \to \infty$ равномерно относно $\arg q$. От теоремата на Жордан следва, че

$$\lim_{R\to\infty} \int_{L'_R} F_1(q)\, e^{q\,t}\, dq = 0.$$

След граничния преход получаваме

$$2\pi\, i\, f(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{b-iR}^{b+iR} F(p)\, e^{p\,t}\, dt = 2\pi\, i \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Res}\left(F(p)\, e^{p\,t}; p_k\right).$$

Пресмятаме резидуумите. Имаме

$$\operatorname{Res}\left(F(p)\, e^{p\,t}; 0\right) = \lim_{p\to 0} \left[p^2\, \frac{e^{p\,t}}{p^2\,(p^2 - 1)} \right]'_p = -t\,,$$

$$\operatorname{Res}\left(F(p)\, e^{p\,t}; \pm 1\right) = \left. \frac{\dfrac{e^{p\,t}}{p^2}}{2p} \right|_{p=\pm 1} = \pm \frac{e^{\pm\,t}}{2}\,.$$

Така намираме $f(t) = -t + \dfrac{e^t}{2} - \dfrac{e^{-t}}{2} = -t + \operatorname{sh} t\,.$

Пример 59. *Намерете оригинала $f(t)$ на функцията $F(p) = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$, $a > 0$, където $\sqrt{p}$ е този еднозначен клон, за който $\sqrt{p} > 0$ при $p > 0$.*

Решение: Функцията $F(p)$ удовлетворява при $\operatorname{Re} p > 0$ условията на теорема 19 за обръщане. Нека $b > 0$ е произволно, $R > b$ и l_R е окръжността с център $p = 0$, която минава през точките $A = b - iR$, $B = b + iR$ $\left(l_R : |p| = \sqrt{R^2 + b^2} = R_1\right)$, а l_ρ е окръжността $|p| = \rho$, $\rho < b$. Интегрираме функцията $F(p)\, e^{p\,t}$ по контура

L_R, състоящ се от хордата AB на окръжността l_R, дъгата $l_R^1 : |p| = R_1$, $\mathrm{Re}\, p < b$, $\mathrm{Im}\, p > 0$ на тази окръжност, горния бряг на разреза $\gamma : \mathrm{Im}\, p = 0$, $-R_1 \le \mathrm{Re}\, p \le -\rho$, окръжността l_ρ, долния бряг на разреза $\gamma : \mathrm{Im}\, p = 0$, $-\rho \ge \mathrm{Re}\, p \ge -R_1$ и дъгата $l_R^2 : |p| = R_1$, $\mathrm{Re}\, p < b$, $\mathrm{Im} < 0$. Тя няма особени точки вътре и по L_R и съгласно теоремата на Коши

$$\int_{L_R} F(p)\, e^{p\,t}\, dp = 0\,. \tag{71}$$

Нека $p = r\, e^{i\theta}$. На горния бряг на разреза $\theta = \pi$, $p = -r$, $\sqrt{p} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{r}$, а на долния бряг $\theta = -\pi$, $p = -r$, $\sqrt{p} = \sqrt{r}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{r}$. От (71) имаме

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\, i}\int_{b-iR}^{b+iR} F(p)\, e^{p\,t}\, dp \quad &- \quad \frac{1}{2\pi}\int_\rho^{R_1} \frac{e^{ia\sqrt{r}} + e^{-ia\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\, e^{-rt}\, dr + \frac{1}{2\pi\, i}\int_{l_R^1} F(p)\, e^{p\,t}\, dp \\ &+ \quad \frac{1}{2\pi\, i}\int_{l_R^2} F(p)\, e^{p\,t}\, dp - \frac{1}{2\pi\, i}\int_{l_\rho} F(p)\, e^{p\,t}\, dp = 0\,, \end{aligned} \tag{72}$$

като интегрирането по l_R^1, l_R^2 и l_ρ става по посока, обратна на часовниковата стрелка.

В (72) оставяме $R \to \infty$, $\rho \to 0$. Върху l_R^1 имаме $p = R_1\, e^{i\theta}$, $0 < \alpha < \theta < \pi$, където $\cos\alpha = \frac{b}{R_1}$ и

$$|F(p)| = \Big|\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\Big| = \frac{e^{-a\sqrt{R_1}\,\cos\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{R_1}} \le \frac{1}{\sqrt{R_1}} < \frac{1}{\sqrt{R}} \to 0$$

при $R \to \infty$. Разделяме дъгата l_R^1 на две части $\{l_R^1, \mathrm{Re}\, p < 0\}$ и $\{l_R^1, \mathrm{Re}\, p > 0\}$. От лемата на Жордан следва, че

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\{l_R^1,\ \mathrm{Re}\, p<0\}} F(p)\, e^{p\,t}\, dp = 0, \quad t > 0.$$

Сега да разгледаме интеграла, взет върху онази част от дъгата l_R^1, която лежи в дясната полуравнина. Там имаме $p = R_1\, e^{i\theta}$, $0 < \alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$ и $|e^{p\,t}| = e^{tR_1\cos\theta} \le e^{tR_1\cos\alpha} = e^{b\,t}$. Тогава

$$\Big|\int_{\{l_{R^1}, \mathrm{Re}\, p>0\}} F(p)\, e^{p\,t}\, dp\Big| \le \frac{e^{bt}}{\sqrt{R_1}}\, s < \frac{e^{bt}}{\sqrt{R}}\, s \to 0, \ \ t > 0$$

при $R \to \infty$, защото дължината s на тази дъга е ограничена ($s = R_1(\frac{\pi}{2} - \alpha) = R_1 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)\, \frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = b\, \frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)} \to b$).

Аналогично се доказва, че

$$\int_{l_R^2} F(p)\, e^{p\,t}\, dp \to 0, \ \ t > 0$$

при $R \to \infty$.

Ще покажем, че $\int_{l_\rho} F(p)\, e^{p\,t}\, dp \to 0$ при $\rho \to 0$. Върху l_ρ имаме $p = \rho\, e^{i\theta}$, където $-\pi < \theta < \pi$. Тогава

$$|F(p)\, e^{p\,t}| = \Big|e^{p\,t}\, \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\Big| = e^{t\rho\cos\theta}\, \frac{e^{-a\sqrt{\rho}\,\cos\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{\rho}} \le \frac{e^{t\rho}}{\sqrt{\rho}}$$

и

$$\Big| \int_{l_\rho} F(p)\, e^{p\,t}\, dp \Big| \le \frac{e^{t\rho}}{\sqrt{\rho}}\, 2\pi\rho = 2\pi\, e^{t\rho}\, \sqrt{\rho} \to 0$$

при $\rho \to 0$.

От теоремата за обръщане имаме

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi\, i} \int_{b-iR}^{b+iR} F(p)\, e^{p\,t}\, dp = f(t)\,.$$

След граничния преход при $R \to \infty$ в (72) получаваме

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ia\sqrt{r}} + e^{-ia\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\, e^{-rt}\, dr = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(a\sqrt{r})}{\sqrt{r}}\, e^{-rt}\, dr\,. \tag{73}$$

Известно е, че

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax\, dx = e^{-a^2}\, \sqrt{\pi} \;\; \text{(Интеграл на Поасон)}\,.$$

Този интеграл може да се пресметне с помощта на теоремата за резидуумите. В интеграла от (73) правим смяната $r\,t = u^2$ и като използуваме горния резултат, получаваме

$$f(t) = \frac{2}{\pi\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-u^2} \cos \frac{a\,u}{\sqrt{t}}\, du = \frac{1}{\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \cos 2\Big(\frac{a\,u}{2\sqrt{t}}\Big)\, du = \frac{1}{\pi\sqrt{t}}\, e^{-\frac{a^2}{4t}}\, \sqrt{\pi} = \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi\, t}}\,.$$

Така намираме

$$f(t) = \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi\, t}}\,.$$

Пример 60. *Намерете оригинала* $f(t)$ *на функцията* $F(p) = e^{-a\sqrt{p}},\;\; a > 0$.

Решение: Нека $e^{-a\sqrt{p}} \leftrightarrows f(t)$. От правилото за диференциране на образ (теорема 5) получаваме $-\frac{a}{2\sqrt{p}}\, e^{-a\sqrt{p}} \leftrightarrows -t\, f(t)$, откъдето $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \leftrightarrows \frac{2}{a} t\, f(t)$. От предния пример имаме $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \leftrightarrows \dfrac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi\, t}}$. От теорема 3 за единственост следва, че $\dfrac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi\, t}} = \frac{2}{a} t\, f(t)$, откъдето $f(t) = \dfrac{a\, e^{-\frac{a^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi\, t^3}}$ или

$$e^{-a\sqrt{p}} \leftrightarrows \frac{a\, e^{-\frac{a^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi\, t^3}}.$$

Пример 61. *Намерете оригинала* $f(t)$ *на функцията* $F(p) = \frac{1}{p}\, e^{-a\sqrt{p}},\;\; a > 0$.

Решение: От $e^{-a\sqrt{p}} \leftrightarrows \dfrac{a\, e^{-\frac{a^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi\, t^3}}$ и теорема 6 за интегриране на оригинал имаме

$$\frac{1}{p}\, e^{-a\sqrt{p}} \leftrightarrows \int_0^t \frac{a\, e^{-\frac{a^2}{4\tau}}}{2\sqrt{\pi\, \tau^3}}\, d\tau\,.$$

Полагаме $\frac{a^2}{4\tau} = u^2$ или $\frac{a}{2\sqrt{\tau}} = u$ $\left(du = -\frac{a\,d\tau}{4\sqrt{\tau^3}}\right)$. Тогава

$$\int_0^t \frac{a\,e^{-\frac{a^2}{4\tau}}}{2\sqrt{\pi\,\tau^3}}\,d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).$$

Така получихме

$$\frac{1}{p}\,e^{-a\sqrt{p}} \leftrightarrows \operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).$$

С помощта на теоремата за обръщане може да се докаже следната теорема.

Теорема 20. *Нека мероморфната функция* $F(p)$ *е аналитична в полуравнината* $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, $\sigma_0 > 0$ *и нека удовлетворява условията:*
1. $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(b+i\tau)|\,d\tau$ *е сходящ за* $\forall\, b > \sigma_0$, *т.е.* $F(p)$ *е абсолютно интегруема по всяка права* $\operatorname{Re} p = b$, $b > \sigma_0$*;*
2. *Съществува система от окръжности*
$l_n : |p| = R_n$, $R_1 < R_2 < \ldots$, $R_n \to \infty$ $(n \to \infty)$
такива, че $\max_{p\in l_n} |F(p)| \to 0$ $(n \to \infty)$ *равномерно относно* $\arg p$.

Тогава функцията $F(p)$ *е изображение и нейният оригинал е*

$$f(t) = \sum_{p_k} \operatorname{Res}\,(F(p)\,e^{p\,t}; p_k), \tag{74}$$

където сумирането става по всички полюси p_k *на* $F(p)$.

Доказателство. Функцията $F(p)$ удовлетворява условията на теорема 19 за обръщане и следователно нейният оригинал е

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p)\,e^{p\,t}\,dp. \tag{75}$$

Нека $l_n' : \begin{cases} |p| = R_n \\ \operatorname{Re} p \le b \end{cases}$, $b \pm ib_n$ са пресечните точки на окръжността $|p| = R_n$ с правата $\operatorname{Re} p = b$ и нека L_n е затвореният контур, който се състои от отсечката $[b - ib_n, b + ib_n]$ и дъгата l_n'. От теоремата за резидуумите имаме

$$\int_{l_n'} F(p)\,e^{p\,t}\,dp + \int_{b-ib_n}^{b+ib_n} F(p)\,e^{p\,t}\,dp = 2\pi\, i \sum_{p_k} \operatorname{Res}\,(F(p)\,e^{p\,t}; p_k), \tag{76}$$

като сумирането става по онези полюси p_k, които лежат вътре в L_n. В (76) правим граничен преход при $n \to \infty$. При $t > 0$ може да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{l_n'} F(p)\,e^{p\,t}\,dp = 0$. Тъй като интегралът (75) се разбира в смисъл на главно значение и $b_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_{b-ib_n}^{b+ib_n} F(p)\,e^{p\,t}\,dp = 2\pi\, i f(t).$$

Тъй като при $n \to \infty$ имаме $R_n \to \infty$, то след граничния преход сумирането в дясната част на (76) ще стане по всички полюси на $F(p)$, тъй като надясно от правата $\operatorname{Re} p = b$ функцията няма полюси. Така получаваме

$$2\pi i f(t) = 2\pi i \sum_{p_k} \operatorname{Res}\,(F(p)\, e^{p\,t}; p_k),$$

където сумирането става по всички полюси p_k на $F(p)$.

С това теоремата е доказана.

Когато $F(p) = \dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$, където $F_1(p)$, $F_2(p)$ са полиноми от степени m и n съответно, без общи нули и $m < n$, тогава получаваме втората теорема за разлагане (теорема 17), по-точно формулата (50).

Пример 62. *Намерете оригинала* $f(t)$ *на функцията* $F(p) = \dfrac{1}{p \operatorname{ch} p}$.

Решение: Ще приложим формула (74). Функцията $F(p)$ има безбройно много полюси $p_0 = 0$, $p_k = \pm\, i(k - \frac{1}{2})\pi$, $k = 1, 2, \ldots$ и всички са прости. За резидуумите намираме $\operatorname{Res}\,(F(p)\, e^{p\,t}; 0) = 1$,

$$\operatorname{Res}\,(F(p)\, e^{p\,t}; i\Big(k - \frac{1}{2}\Big)\pi) = \frac{(-1)^k\, e^{i(k-\frac{1}{2})\pi\, t}}{(k - \frac{1}{2})\pi}, \ \operatorname{Res}\,(F(p)\, e^{p\,t}; -i\Big(k - \frac{1}{2}\Big)\pi) = \frac{(-1)^k\, e^{-i(k-\frac{1}{2})\pi\, t}}{(k - \frac{1}{2})\pi}.$$

С формулата (74) получаваме

$$f(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(k - \frac{1}{2})\pi\, t}{(k - \frac{1}{2})\pi}.$$

8. Приложение за решаване на диференциални уравнения и системи

Преобразованието на Лаплас е важен метод за решаване на някои видове диференциални уравнения и системи. С него те се свеждат към по-прости, често алгебрични уравнения или системи.

I. Линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти

Нека е дадено следното линейно диференциално уравнение от n-ти ред с постоянни коефициенти

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n\, y = f(t)\,, \tag{77}$$

където $a_k = const,\ \ k = 1, 2, \ldots, n,\ \ \ y = y(t)$ е неизвестната функция и $f(t)$ е дадена функция.

Разглеждаме следната задача на Коши: да се намери решение $y(t)$ на (77), което удовлетворява следните начални условия:

$$y(0) = y_0,\ \ y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}\,, \tag{78}$$

където $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ са дадени числа. Нека $f(t)$ е оригинал, $f(t) \rightleftarrows F(p)$. Търсим решение $y(t)$ на задачата (77), (78), за което $y(t) = 0$ за $t < 0$. Ако $y(t)$ е такова решение, то може да се покаже, че $y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)$ са оригинали. Нека $y(t) \rightleftarrows Y(p)$. Прилагаме към двете страни на (77) преобразованието на Лаплас. От правилото за диференциране на оригинал (теорема 4) и свойството линейност, като преминем към изображения в (77), получаваме

$$p^n\, Y(p) - p^{n-1}\, y(0) - \ldots - p\, y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0) + a_1 \Big(p^{n-1}\, Y(p) - p^{n-2}\, y(0) - \ldots$$
$$- p\, y^{(n-3)}(0) - y^{(n-2)}(0)\Big) + \ldots + a_{n-1}\Big(p\, Y(p) - y(0)\Big) + a_n\, Y(p) = F(p)\,.$$

Като вземем предвид условията (78) и направим приведение, получаваме $(p^n + a_1\, p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, p + a_n)\, Y(p) - y_0\, (p^{n-1} + a_1\, p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) - y_1\, (p^{n-2} + a_1\, p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) - \ldots - y_{n-2}\, (p + a_1) - y_{n-1} = F(p)$ или

$$A(p)\, Y(p) - B(p) = F(p)\,, \tag{79}$$

където $A(p) = p^n + a_1\, p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, p + a_n$ е характеристичният полином на уравнението (77), а

$$\begin{aligned} B(p) &= y_0(p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\ldots+a_{n-1})+y_1(p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-2}) \\ &+ \ldots+y_{n-2}(p+a_1)+y_{n-1} \end{aligned}$$

е полином от степен, ненадминаваща $n-1$. Уравнението (79) се нарича уравнение в образи или операторно уравнение, отговарящо на диференциалното уравнение (77). От (79) намираме

$$Y(p)=\frac{B(p)+F(p)}{A(p)}\,. \tag{80}$$

Ако имаме нулеви начални условия, то

$$Y(p)=\frac{F(p)}{A(p)}\,. \tag{81}$$

Получихме образа на търсеното решение. За да намерим самото решение, трябва по образа $Y(p)$ да възстановим оригинала $y(t)$. При практическото приложение на операционното смятане за това обикновено се използуват таблици за оригинали и техните изображения. В частност, ако $f(t)$ е квазиполином, т.е. линейна комбинация на функции от вида $t^k\,e^{\lambda t}$, то $Y(p)$ е рационална функция. За намиране на оригинала често е удобно тази функция да се представи като сума от елементарни дроби (виж раздел 5, теорема 17). Оригиналът може да се намери и с формулата за обръщане (виж раздел 7, теорема 19)). Операционният метод за решаване на уравнението (77) с начални условия (78) дава възможност веднага да се намери търсеното частно решение, докато, ако решаваме същата задача с класическите методи, трябва най-напред да намерим общото решение и след това по дадените начални условия да намерим стойностите на влизащите в общото решение n произволни константи. В същото време с операционния метод може, ако се наложи, да се намери и общото решение на уравнението (77). За тази цел е достатъчно в израза за полинома $B(p)$ да положим $y_k=C_{k+1},\ \ k=0,1,\ldots,n-1$, където считаме $C_{k+1},\ \ k=0,1,\ldots,n-1$ за произволни константи.

Забележка 9. *Ако началните условия са зададени не при $t=0$, а при $t=t_0$, то със смяната $\tau=t-t_0$ свеждаме задачата към задача за решаване отново на линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти, но вече с начални условия при $\tau=0$.*

Пример 63. *Решете уравнението $y''-3y'+2y=6\,e^{-t}$ с начални условия $y(0)=2$, $y'(0)=0$.*

Решение: Нека $y(t)\rightleftarrows Y(p)$. Тогава
$y'(t)\rightleftharpoons p\,Y(p)-y(0)=p\,Y(p)-2\,,$
$y''(t)\rightleftharpoons p^2\,Y(p)-p\,y(0)-y'(0)=p^2\,Y(p)-2p\,.$
Преминаваме към изображения в даденото уравнение и получаваме
$p^2\,Y(p)-2p-3p\,Y(p)+6+2Y(p)=\frac{6}{1+p}\,,$
откъдето $Y(p)=\frac{2p}{p^2-1}$. Тъй като $\frac{p}{p^2-1}\leftrightarrows \mathrm{ch}\,t$, то $y(t)=2\mathrm{ch}\,t\,.$

Пример 64. *Решете уравнението* $y'' + 9y = \cos 3t$.

Решение: Нека $y(t) \rightleftarrows Y(p)$. Тогава
$y'(t) \risingdotseq p\,Y(p) - y(0) = p\,Y(p) - C_1$,
$y''(t) \risingdotseq p^2\,Y(p) - p\,y(0) - y'(0) = p^2\,Y(p) - C_1 p - C_2$, където $C_1 = y(0), C_2 = y'(0)$.
Преминаваме към изображения в даденото уравнение и получаваме
$p^2\,Y(p) - C_1 p - C_2 + 9Y(p) = \frac{p}{p^2+9}$ или $Y(p) = \frac{p}{(p^2+9)^2} + C_1\frac{p}{p^2+9} + \frac{C_2}{p^2+9}$, откъдето намираме $y(t) = \frac{1}{6}t\sin 3t + C_1 cos3t + \frac{1}{3}\sin 3t$.

Пример 65. *Решете уравнението* $y'' + y = 1(t-\pi)$ *с начални условия* $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение: Нека $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогава $y''(t) \risingdotseq p^2\,Y(p)$. Имаме още $1(t-\pi) \risingdotseq \frac{e^{-\pi\,p}}{p}$. За уравнението в образи получаваме $p^2\,Y(p) + Y(p) = \frac{e^{-\pi\,p}}{p}$, откъдето

$$Y(p) = \frac{e^{-\pi\,p}}{p\,(p^2+1)} = \frac{e^{-\pi\,p}}{p} - \frac{e^{-\pi\,p}\,p}{p^2+1}\,.$$

От $1(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, $\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}$ и теорема 11 за закъснението намираме $y(t) = 1(t-\pi) - 1(t-\pi)\,\cos(t-\pi)$. Решението $y(t)$ може да се запише и така:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{за } t < \pi, \\ 1 - \cos(t-\pi) & \text{за } t \geq \pi. \end{cases}$$

Пример 66. *Решете уравнението* $y'' + 4y = 1(t) + t\,1(t-3)$ *с начални условия* $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение: Нека $y(t) \rightleftarrows Y(p)$. Тогава $y''(t) \risingdotseq p^2\,Y(p)$. Освен това $1(t) + t\,1(t-3) = 1(t) + [(t-3)+3]\,1(t-3) \rightleftarrows \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{p^2} + \frac{3}{p}\right)e^{-3\,p}$. За уравнението в образи получаваме

$$(p^2+4)\,Y(p) = \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{p^2} + \frac{3}{p}\right)e^{-3\,p},$$

откъдето

$$Y(p) = \frac{1}{p\,(p^2+4)} + \left(\frac{1}{p^2\,(p^2+4)} + \frac{3}{p\,(p^2+4)}\right)e^{-3p}\,.$$

Тъй като

$$\frac{1}{p\,(p^2+4)} = \frac{p^2+4-p^2}{4p\,(p^2+4)} = \frac{1}{4\,p} - \frac{p}{4\,(p^2+4)} \leftrightarrows \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t\,,$$

$$\frac{1}{p^2\,(p^2+4)} = \frac{p^2+4-p^2}{4p^2\,(p^2+4)} = \frac{1}{4\,p^2} - \frac{1}{4\,(p^2+4)} \leftrightarrows \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t\,,$$

то $y(t) = \frac{1}{4}(1-\cos 2t)\,1(t) + \left(\frac{t-3}{4} - \frac{1}{8}\sin 2(t-3) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos 2(t-3)\right)1(t-3)$.

Забележка 10. *В предните два примера дясната част на диференциалното уравнение не е непрекъсната функция. В различните интервали тя се задава с различни изрази, но операционният метод дава възможност уравнението да се решава така, сякаш дясната част е зададена с една формула, в което се състои и едно от неговите предимства в сравнение с класическите методи за решаване на диференциални уравнения.*

Пример 67. *Решете уравнението* $y'' - 3\,y' + 2y = t\,e^{3t}$ *с начални условия* $y(1) = y'(1) = 1$.

Решение: В тази задача началният момент е $t = 1$, а не $t = 0$. Полагаме $t - 1 = \tau$ или $t = \tau + 1$ (виж забележка 9). Тогава уравнението и началните условия приемат вида $y'' - 3y' + 2y = (\tau + 1)\,e^{3\tau}\,e^{3}$, $y(0) = y'(0) = 1$. Нека $y(\tau) \rightleftharpoons Y(p)$. Тогава $y' \rightleftharpoons p\,Y(p) - 1$, $y'' \rightleftharpoons p^2\,Y(p) - p - 1$. Имаме още $(\tau + 1)\,e^{3\tau} = \tau\,e^{3\tau} + e^{3\tau} \rightleftharpoons \frac{1}{(p-3)^2} + \frac{1}{p-3} = \frac{p-2}{(p-3)^2}$. За уравнението в образи получаваме

$$(p^2 - 3p + 2)\,Y(p) = e^3\frac{p-2}{(p-3)^2} + p - 2\,,$$

откъдето

$$Y(p) = e^3\frac{1}{(p-1)(p-3)^2} + \frac{1}{p-1}\,.$$

Тъй като $\frac{1}{p-1} \leftrightarrows e^{\tau}$,

$$\frac{1}{(p-1)(p-3)^2} = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-3} + \frac{2}{(p-3)^2}\Big] \leftrightarrows \frac{1}{4}(e^{\tau} - e^{3\tau} + 2\tau\,e^{3\tau})\,,$$

то $y(\tau) = \frac{1}{4}\,e^3(e^{\tau} - e^{3\tau} + 2\tau\,e^{3\tau}) + e^{\tau}$. Като се върнем към старата променлива t, намираме $y(t) = \frac{e^3+4}{4\,e}\,e^{t} + \frac{2t-3}{4}\,e^{3\,t}$.

Формулата (41) на Дюамел може да се прилага за решаване на някои диференциални уравнения.

Нека искаме да решим уравнението

$$y^{(n)} + a_1\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n\,y = f(t), \quad a_k = \text{const},\ \text{k} = 1, 2, \ldots, \text{n} \tag{82}$$

с начални условия $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$. Разглеждаме и уравнението

$$z^{(n)} + a_1\,z^{(n-1)} + \ldots + a_n\,z = 1 \tag{83}$$

с начални условия $z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-1)}(0) = 0$. Нека $z(t)$ е решение на (83), удовлетворяващо нулевите начални условия и нека $z(t) \rightleftarrows Z(p)$. Като преминем към изображения в (83), получаваме $(p^n + a_1\,p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,p + a_n)\,Z(p) = \frac{1}{p}$, откъдето, ако означим $A(p) = p^n + a_1\,p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,p + a_n$, получаваме

$$Z(p) = \frac{1}{p\,A(p)}\,. \tag{84}$$

Нека $y(t) \rightleftarrows Y(p)$, $f(t) \rightleftarrows F(p)$. Показахме по-рано (виж (81)), че $Y(p) = \dfrac{F(p)}{A(p)}$. Като сравним с (84), получаваме $Y(p) = p\,F(p)\,Z(p)$, откъдето, вземайки предвид формулата на Дюамел (41), намираме

$$y(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\,z(t-\tau)\,d\tau \quad \text{или} \quad y(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t z(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Следователно, ако знаем решението на (82) при $f(t) = 1$ и нулеви начални условия, можем да намерим решението на същото уравнение при произволно $f(t)$ и нулеви начални условия.

Методът на решение на диференциални уравнения, основан на формулата на Дюамел, се прилага, като правило, в тези случаи, в които възниква трудност при намирането образа $F(p)$ на дясната част $f(t)$ на уравнението (82), а също така при необходимост от многократно решаване на (82) с различни функции $f(t)$. Със следващия пример, макар че образът на дясната част е известен, ще демонстрираме този метод.

Пример 68. *Решете с помощта на формулата на Дюамел уравнението* $y''+y' = t$ *с начални условия* $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение: Най-напред решаваме уравнението $z''+z' = 1$ с нулеви начални условия. Ако $z(t) \rightleftarrows Z(p)$, то уравнението в образи е $(p^2+p)\,Z = \frac{1}{p}$, откъдето

$$Z(p) = \frac{1}{p^2\,(p+1)} = \frac{1+p^2-p^2}{p^2\,(p+1)} = \frac{p^2+(1-p^2)}{p^2\,(p+1)} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \leftrightarrows e^{-t}+t-1 = z(t).$$

Тогава

$$y(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t (e^{-\tau}+\tau-1)(t-\tau)\,d\tau = (e^{-\tau}+\tau-1)(t-\tau)\Big|_{\tau=t} + \int_0^t (e^{-\tau}+\tau-1)\,d\tau = \frac{t^2}{2}-t+1-e^{-t}\,.$$

Пример 69. *Решете уравнението* $y'' - a^2\,y = b\,e^{-t^2}$ *с начални условия* $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение: Най-напред решаваме уравнението $z'' - a^2\,z = 1$ с нулеви начални условия. Ако $z(t) \rightleftarrows Z(p)$, то уравнението в образи е $(p^2-a^2)\,Z = \frac{1}{p}$. Тъй като $\frac{1}{p^2-a^2} \leftrightarrows \frac{1}{a}\operatorname{sh} at$, то от теорема 6 за интегриране на оригинал имаме

$$Z(p) = \frac{1}{p\,(p^2-a^2)} \leftrightarrows \frac{1}{a}\int_0^t \operatorname{sh} a\tau\,d\tau = \frac{1}{a^2}\,(\operatorname{ch} a\,t - 1) = z(t).$$

Тогава

$$y(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{b}{a^2}\,e^{-\tau^2}\,(\operatorname{ch} a(t-\tau) - 1)\,d\tau = \frac{b}{a}\int_0^t e^{-\tau^2}\operatorname{sh} a(t-\tau)\,d\tau.$$

Като преобразуваме, получаваме

$$y(t) = \frac{b\sqrt{\pi}}{4a}\,e^{\frac{a^2}{4}}\Big(e^{a\,t}\operatorname{erf}\big(t+\frac{a}{2}\big) - e^{-a\,t}\operatorname{erf}\big(t-\frac{a}{2}\big) - 2\operatorname{erf}\big(\frac{a}{2}\big)\operatorname{ch} a\,t\Big).$$

Да разгледаме сега следната задача на Коши: да се намери решение на уравнението

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(t), \quad a, b, c = \text{const}, \quad f(t) - \text{дадена функция}, \tag{85}$$

удовлетворяващо следните начални условия: $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$. Ще покажем, че единственото решение на тази задача се дава с формулата

$$y(t) = u(t) + (h * f)(t)\,, \tag{86}$$

където $u(t)$ е решение на хомогенното уравнение

$$a\,u'' + b\,u' + c\,u = 0, \quad u(0) = y_0,\ u'(0) = y_1\,, \tag{87}$$

а $h(t)$ е функция, чийто изображение на Лаплас е $H(p) = \dfrac{1}{a\,p^2 + b\,p + c}$.

Най-напред да разгледаме задачата

$$a\,v'' + b\,v' + c\,v = f(t), \quad v(0) = 0,\ v'(0) = 0\,.$$

Уравнението е отново (85), но с нулеви начални условия. Нека $v(t)$ е решение на тази задача и нека $v(t) \rightleftarrows V(p)$, $f(t) \rightleftarrows F(p)$. Преминаваме към изображения и получаваме $(a\,p^2 + b\,p + c)\,V(p) = F(p)$, откъдето, ако означим $H(p) = \dfrac{1}{a\,p^2 + b\,p + c}$, намираме $V(p) = F(p)\,H(p)$ и, следователно, $v(t) = (h * f)(t)$, $h(t)$ е функция, чийто изображение на Лаплас е $H(p)$.

Нека сега $u(t)$ е решение на задачата (87). Тогава $y(t) = u(t) + v(t)$ удовлетворява уравнението (85) и $y(0) = u(0) + v(0) = y_0$, $y'(0) = u'(0) + v'(0) = y_1$, т.е. $y(t) = u(t) + v(t)$ е решение на дадената задача.

Пример 70. *Решете уравнението* $y'' + y = \operatorname{tg} t$ *с начални условия* $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение: Разглеждаме задачата $u'' + u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 2$. Нека $u(t)$ е решение на тази задача и $u(t) \rightleftarrows U(p)$. Като преминем към образи, получаваме $p^2\,U(p) - p - 2 + U(p) = 0$, откъдето $U(p) = \dfrac{p+2}{p^2+1}$ и $u(t) = \cos t + 2\sin t$. В този случай $H(p) = \dfrac{1}{p^2+1}$ и $h(t) = \sin t$. Освен това

$$\begin{aligned}(h * f)(t) &= \int_0^t \sin(t-\tau)\operatorname{tg}\tau\,d\tau = \sin t \int_0^t \sin\tau\,d\tau - \cos t \int_0^t \frac{\sin^2\tau}{\cos\tau}\,d\tau \\ &= \sin t + \cos t\,\ln\frac{\cos t}{1+\sin t}.\end{aligned}$$

Следователно решението е $y(t) = \cos t + 3\sin t + \cos t\,\ln\dfrac{\cos t}{1+\sin t}$.

II. Системи линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти

Системите линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти също могат да се решават с операционния метод. При това не се налагат никакви предварителни преобразования на изходната система, например привеждане в нормална форма. Те се решават по същата схема, както изложената по-горе за едно линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти.

Пример 71. *Решете системата уравнения*

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) + y'(t) + x(t) + y(t) = t \\ x''(t) - y'(t) + 2x(t) = 3(e^{-t} - 1) \end{array} \right.$$

с начални условия $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

Решение: Нека $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогава $x'(t) \risingdotseq p\,X(p) - x(0) = p\,X(p)$, $x''(t) \risingdotseq p^2\,X(p) - p\,x(0) - x'(0) = p^2\,X(p) + 1$, $y'(t) \risingdotseq p\,Y(p) - y(0) = p\,Y(p)$. Като преминем към изображения в дадената система, получаваме

$$\left| \begin{array}{l} p\,X(p) + p\,Y(p) + X(p) + Y(p) = \frac{1}{p^2} \\ p^2\,X(p) + 1 - p\,Y(p) + 2\,X(p) = 3(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}), \end{array} \right.$$

откъдето $X(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}$, $Y(p) = \frac{1}{p^2}$ и $x(t) = e^{-t} - 1$, $y(t) = t$.

III. Линейни диференциални уравнения със степенни (полиномни) коефициенти

Да разгледаме линейното уравнение

$$a_0(t)\,y^{(n)} + a_1(t)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\,y' + a_n(t)\,y = f(t), \tag{88}$$

където $a_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ са полиноми на t от степен $\leq m$, $y = y(t)$ е неизвестната функция, а $f(t)$ е дадена функция оригинал.

Разглеждаме следната задача на Коши: да се намери решение $y(t)$ на уравнението (88), което удовлетворява началните условия: $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$,..., $y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$, където $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ са дадени числа. Ако тази задача има решение $y(t)$, което е оригинал и $y(t \rightleftarrows Y(p)$, то като приложим към двете страни на уравнението (88) преобразованието на Лаплас, получаваме в общия случай за образа $Y(p)$ диференциално уравнение. Ако $m = 1$), задачата значително се опростява.

Пример 72. *Решете уравнението* $t\,y'' - t\,y' - y = 0$ *с начално условие* $y(0) = 0$.

Решение: Нека $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Прилагаме преобразованието на Лаплас към даденото уравнение. От формула (24) за диференциране на оригинал и формула (28) за диференциране на образ имаме
$y' \rightleftarrows p\,Y(p) - y(0) = p\,Y(p)$, $y'' \rightleftarrows p^2\,Y(p) - p\,y(0) - y'(0) = p^2\,Y(p) - y'(0)$,

$t\,y' \rightleftarrows -(p\,Y(p))' = -p\,Y'(p) - Y(p),\;\; t\,y'' \rightleftarrows -(p^2\,Y(p) - y'(0))' = -p^2\,Y'(p) - 2p\,Y(p)\,.$
За операторното уравнение получаваме
$-p^2\,Y'(p) - 2p\,Y(p) + p\,Y'(p) + Y(p) - Y(p) = 0\,.$
След приведение стигаме до следното линейно диференциално уравнение от първи ред

$$Y'(p) + \frac{2}{p-1}\,Y(p) = 0.$$

За решението му намираме

$$Y(p) = C\,e^{-\int \frac{2}{p-1}\,dp} = \frac{C}{(p-1)^2}.$$

Решението на даденото уравнение е $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{C}{(p-1)^2}\Big) = C\,t\,e^t\,.$

Пример 73. *Решете уравнението* $y''+(t+1)\,y'+t\,y = 0$ *с начални условия* $y(0) = 1$, $y'(0) = -1\,.$

Решение: Записваме уравнението по следния начин: $y'' + t(y' + y) + y' = 0\,.$ Нека $y \rightleftarrows Y(p)\,.$ Тогава $y' \rightleftarrows p\,Y(p) - 1$, $y'' \rightleftarrows p^2\,Y(p) - p + 1$, $y' + y \rightleftarrows (p+1)\,Y(p) - 1$, $t\,(y' + y) \rightleftarrows -\Big((p+1)\,Y(p) - 1\Big)' = -Y(p) - (p+1)\,Y'(p)\,.$ За уравнението в образи получаваме

$$p^2\,Y(p) - p + 1 - Y(p) - (p+1)\,Y'(p) + p\,Y(p) - 1 = 0$$

или след приведение $(p^2 + p - 1)\,Y(p) - p = (p+1)\,Y'(p)$, откъдето

$$Y'(p) = \frac{p^2+p-1}{p+1}\,Y(p) - \frac{p}{p+1}.$$

За решението на това линейно диференциално уравнение от първи ред намираме $Y(p) = \frac{C\,e^{\frac{p^2}{2}}+1}{p+1}\,.$ От $\lim\limits_{p\to\infty} p\,Y(p) = y(0) = 1$ (следствие 2), получаваме $C = 0\,.$ Следователно $Y(p) = \frac{1}{p+1}$ и $y(t) = e^{-t}\,.$

Пример 74. *Решете уравнението* $t\,y'' + (1-t)\,y' + n\,y = 0,$ n *цяло число и* $n > 0.$ *(* ***Уравнение на Лагер****).*

Решение: Записваме уравнението по следния начин: $t(y'' - y') + y' + n\,y = 0\,.$ Нека $y \rightleftarrows Y(p)\,.$ Тогава $y' \rightleftarrows p\,Y(p) - y(0)$, $y'' \rightleftarrows p^2\,Y(p) - p\,y(0) - y'(0)$, $y'' - y' \rightleftarrows (p^2 - p)\,Y(p) - p\,y(0) - y'(0) + y(0)$, $t\,(y'' - y') \rightleftarrows -\Big((p^2 - p)\,Y(p) - p\,y(0) - y'(0) + y(0)\Big)' = -[(2p-1)Y(p) + (p^2-p)Y'(p) - y(0)]\,.$ За уравнението в образи получаваме

$$(-p + n + 1)Y(p) = p(p-1)Y'(p),$$

откъдето

$$\frac{Y'(p)}{Y(p)} = \frac{-p+n+1}{p(p-1)}.$$

За решението на това диференциално уравнение от първи ред с разделящи се променливи намираме

$$Y(p) = \frac{C\,(p-1)^n}{p^{n+1}} = \frac{C}{p}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n = \frac{C}{p}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{p}\Big)^k = C\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,n!}{k!(n-k)!\,p^{k+1}}.$$

Като приложим първата теорема за разлагане (теорема 18), получаваме

$$y(t) = C\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,n!\,t^k}{(k!)^2(n-k)!}.$$

Решенията, които удовлетворяват условието $y(0) = n!$ се наричат **полиноми на Лагер** и се означават с $L_n(t)$. Имаме

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big(\frac{n!}{k!}\Big)^2\frac{t^k}{(n-k)!},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Пример 75. *Решете уравнението* $t\,y'' + y' + t\,y = 0$ *с начални условия* $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение: Записваме уравнението по следния начин: $t(y''+y)+y' = 0$. Нека $y \rightleftarrows Y(p)$. Тогава $y' \rightleftarrows p\,Y(p)-1$, $y'' \rightleftarrows p^2\,Y(p)-p$, $y''+y \rightleftarrows (p^2+1)\,Y(p)-p$, $t\,(y''+y) \rightleftarrows -\Big((p^2+1)\,Y(p)-p)' = -(2p\,Y(p)+(p^2+1)\,Y'(p)-1)$. За уравнението в образи получаваме

$$-2p\,Y(p)-(p^2+1)\,Y'(p)+1+p\,Y(p)-1 = 0$$

или след приведение $(p^2+1)\,Y'(p) = -p\,Y(p)$, откъдето

$$\frac{Y'(p)}{Y(p)} = -\frac{p}{p^2+1}.$$

За решението на това диференциално уравнение от първи ред с разделящи се променливи намираме $Y(p) = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}}$. От $\lim\limits_{p\to\infty} p\,Y(p) = y(0) = 1$ (следствие 2), получаваме $C = 1$. Следователно $Y(p) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$. Ако под $\sqrt{1+p^2}$ разбираме този еднозначен клон, за който $\sqrt{1} = 1$, то от пример 45 имаме

$$y(t) = \mathrm{J}_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,t^{2n}}{2^{2n}\,(n!)^2}.$$

.

IV. Линейни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент

Уравненията от вида

$$y^{(n)}(t)+a_1\,y^{(n-1)}(t-c_{n-1})+a_2\,y^{(n-2)}(t-c_{n-2})+\ldots+a_{n-1}\,y'(t-c_1)+a_n\,y(t-c_0) = f(t), \tag{89}$$

където a_k =const, $k = 1, 2, \ldots, n$ c_k=const≥ 0, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $0 \leq t < \infty$, $f(t)$- дадена функция оригинал, се наричат линейни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент. Такива уравнения се срещат в редица практически задачи, особено в теорията на автоматичното регулиране, където се разглеждат физически системи с процеси на последействие. За такива уравнения е приложим операционният метод. За простота ще търсим решение $y(t)$ на (89), което е оригинал и удовлетворява началните условия $y(0) = y'(0) = \ldots - y^{(n-1)}(0) = 0$.

Пример 76. *Решете уравнението* $y''(t) - 2\,y'(t-1) = t$ *с начални условия* $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение: Нека $y(t) \rightleftarrows Y(p)$. Тогава $y'(t) \rightleftarrows p\,Y(p)$, $y''(t) \rightleftarrows p^2\,Y(p)$ и от теоремата за закъснението $y'(t-1) \rightleftarrows e^{-p}\,p\,Y(p)$. За образите получаваме уравнението $p^2\,Y(p) - 2e^{-p}\,p\,Y(p) = \dfrac{1}{p^2}$, откъдето

$$Y(p) = \frac{1}{p^3\,(p - 2\,e^{-p})} = \frac{1}{p^4}\cdot\frac{1}{1 - \frac{2\,e^{-p}}{p}} = \frac{1}{p^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\,e^{-p\,n}}{p^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\,e^{-p\,n}}{p^{n+4}}\,.$$

Търсеното решение е $y(t) \leftrightarrows Y(p)$ и то има вида

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(n+3)!}\,(t-n)^3\,1(t-n)\,.$$

Пример 77. *Решете уравнението* $y''(t) + 2\,y'(t-2) + y(t-4) = t$ *с начални условия* $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение: Нека $y(t) \rightleftarrows Y(p)$. Тогава $y'(t) \rightleftarrows p\,Y(p)$, $y''(t) \rightleftarrows p^2\,Y(p)$ и от теоремата за закъснението $y'(t-2) \rightleftarrows e^{-2p}\,p\,Y(p)$, $y(t-4) \rightleftarrows e^{-4p}\,Y(p)$ За образите получаваме уравнението $p^2\,Y(p) + 2p\,e^{-2p}\,Y(p) + e^{-4p}\,Y(p) = \dfrac{1}{p^2}$, откъдето

$$Y(p) = \frac{1}{p^2\,(p + e^{-2p})^2} = \frac{1}{p^4}\left(1 + \frac{e^{-2p}}{p}\right)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(n+1)e^{-2p\,n}}{p^{n+4}}.$$

Търсеното решение е $y(t) \leftrightarrows Y(p)$ и то има вида

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(n+1)(t-2n)^{n+3}}{(n+3)!}1(t-2n).$$

IV. Интегрални и интегрално-диференциални уравнения

Операционният метод успешно се прилага за решаване на някои интегрални уравнения.

Интегрално уравнение се нарича уравнение, в което неизвестната функция $y(t)$ се намира под знака на интеграла. Важен клас интегрални уравнения са линейните интегрални уравнения от вида

$$a\,y(t) = f(t) + b\int_0^t k(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau,$$

които при $a = 0$ се наричат линейни интегрални уравнения на Волтер от първи род, а при $a \neq 0$ линейни интегрални уравнения на Волтер от втори род. Функциите $f(t)$ и $k(t,\tau)$ са дадени, $y(t)$ е неизвестната функция, a, b са константи. Функциията $k(t,\tau)$ се нарича ядро. Ако ядрото $k(t,\tau)$ зависи само от разликата $t-\tau$, т. е. $k(t,\tau) = k(t-\tau)$, тогава интегралът

$$\int_0^t k(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = k(t) * y(t)$$

е конволюция на функциите $k(t)$ и $y(t)$ и уравнението може да се реши с операционния метод.

Нека е дадено уравнението

$$a\,y(t) = f(t) + b\int_0^t k(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau. \tag{90}$$

където a, b=const, $y(t)$ е неизвестната функция, $f(t)$ и $k(t)$ са дадени функции оригинали. Нека $f(t) \rightleftarrows F(p)$, $k(t) \rightleftarrows K(p)$ и нека $y(t)$ е решение на (90), което също е оригинал, $y(t) \rightleftarrows Y(p)$. Като приложим към двете страни на (90) преобразованието на Лаплас и вземем предвид теорема 14 на Борел за умножението получаваме следното операторно уравнение

$$a\,Y(p) = F(p) + b\,K(p)\,Y(p),$$

откъдето

$$Y(p) = \frac{F(p)}{a - b\,K(p)}\,.$$

Оригиналът $y(t)$ на получената функция $Y(p)$, ако съществува, е решение на даденото уравнение (90)

Пример 78. *Решете уравнението*

$$y(t) = e^{-t} + \int_0^t y(\tau)\,\sin(t-\tau)\,d\tau.$$

Решение: Нека $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогава $\int_0^t y(\tau)\,\sin(t-\tau)\,d\tau = y(t) * \sin t \risingdotseq \frac{Y(p)}{p^2+1}$. Като преминем към изображения в уравнението, получаваме
$Y(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{Y(p)}{p^2+1}$, откъдето $Y(p) = \frac{p^2+1}{p^2\,(p+1)} = \frac{(1-p^2)+2p^2}{p^2\,(p+1)} = \frac{1-p}{p^2} + \frac{2}{p+1} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{2}{p+1}$ и $y(t) = t - 1 + 2\,e^{-t}$.

Пример 79. *Решете уравнението*

$$y(t) = \sin t + \int_0^t (t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau\,.$$

Решение: Нека $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$. Тогава $\int_0^t (t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = t * y(t) \rightleftharpoons \frac{Y(p)}{p^2}$. Като преминем към изображения, получаваме

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{Y(p)}{p^2}\,,$$

откъдето $Y(p) = \frac{p^2}{(p^2-1)(p^2+1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2-1}\Big)$ и $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t + \operatorname{sh} t)$.

Пример 80. *Решете уравнението*

$$t^2\, e^t = \int_0^t e^{2(t-\tau)}\, y(\tau)\, d\tau\,.$$

Решение: Нека $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$. Тогава $\int_0^t e^{2(t-\tau)}\, y(\tau)\, d\tau = e^{2t} * y(t) \rightleftarrows \frac{Y(p)}{p-2}$. Като преминем към изображения, получаваме

$$\frac{2!}{(p-1)^3} = \frac{Y(p)}{p-2},$$

откъдето $Y(p) = \frac{2(p-2)}{(p-1)^3} = \frac{2p}{(p-1)^3} - \frac{4}{(p-1)^3}$. От $(t^2\, e^t)' \rightleftarrows \frac{2p}{(p-1)^3}$ имаме $y(t) = 2t\, e^t - t^2\, e^t$.

Интегрално-диференциални уравнения се наричат уравненията, в които неизвестната функция $y(t)$ се среща както под знака на интеграла, така и под знака на някоя производна. За някои от тях е приложим операционният метод.

Пример 81. *Решете интегрално-диференциалното уравнение*

$$y''(t) + \int_0^t \sin(t-\tau)\,(y''(\tau) + y(\tau))\, d\tau = 2\cos t$$

с начални условия $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение: Нека $y(t) \rightleftarrows Y(p)$. Тогава, вземайки предвид началните условия, $y''(t) \rightleftarrows p^2\, Y(p)$. Имаме още $\cos t \rightleftarrows \frac{p}{p^2+1}$, $\sin t \rightleftarrows \frac{1}{p^2+1}$ и съгласно теорема 14 на Борел за умножение

$$\int_0^t \sin(t-\tau)\,(y''(\tau) - y(\tau))\, d\tau \rightleftarrows \frac{1}{p^2+1}[p^2\, Y(p) + Y(p)] = Y(p)\,.$$

Като приложим преобразованието на Лаплас към даденото уравнение получаваме следното операторно уравнение

$$p^2\, Y(p) + Y(p) = \frac{2p}{p^2+1},$$

откъдето $Y(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$. Оригиналът $y(t) = t\,\sin t$ е решение на даденото уравнение, удовлетворяващо началните условия.

Операционният метод може да се приложи и към някои системи интегрални или интегрално-диференциални уравнения.

Пример 82. *Решете следната система интегрални уравнения*

$$\left| \begin{array}{ll} x(t) = & e^t + \int_0^t x(\tau)\, d\tau - \int_0^t e^{t-\tau}\, y(\tau)\, d\tau \\ y(t) = & -t - \int_0^t (t-\tau)\, x(\tau) d\tau + \int_0^t y(\tau)\, d\tau \end{array} \right.$$

Решение: Нека $x(t) \rightleftarrows X(p),\ \ y(t) \rightleftarrows Y(p)$. Като приложим преобразованието на Лаплас към дадената система и веземем предвид теорема 14 за умножение, получаваме следната операторна система

$$\left| \begin{array}{ll} X(p) = & \frac{1}{p-1} + \frac{X(p)}{p} - \frac{Y(p)}{p-1} \\ Y(p) = & -\frac{1}{p^2} - \frac{X(p)}{p^2} + \frac{Y(p)}{p}, \end{array} \right.$$

откъдето намираме $X(p) = \frac{1}{p-2}$ и $Y(p) = -\frac{1}{p\,(p-2)}$. Оригиналите $x(t) = e^{2t}$ и $y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{2t}$ дават решението на дадената система.

Пример 83. *Да се реши следната система интегрално-диференциални уравнения*

$$\left| \begin{array}{l} 2x'(t) + x(t) - 2y(t) + \int_0^t (1+t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = 0 \\ x'(t) - y'(t) + x(t) + \int_0^t e^{t-\tau}\, x(\tau)\, d\tau = 0 \end{array} \right.$$

с начални условия $x(0) = 0,\ \ y(0) = 1$.

Решение: Нека $x(t) \rightleftarrows X(p),\ \ y(t) \rightleftarrows Y(p)$. При дадените начални условия $x'(t) \rightleftarrows p\,X(p),\ \ y'(t) \rightleftarrows p\,Y(p) - 1$. От теорема 14 за умножението имаме

$$\int_0^t (1+t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = (1+t) * y(t) \rightleftarrows \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\Big) Y(p),$$
$$\int_0^t e^{t-\tau}\, x(\tau)\, d\tau = e^t * x(t) \rightleftarrows \frac{1}{p-1}\, X(p).$$

Като приложим преобразованието на Лаплас към дадената система, получаваме следната операторна сисстема

$$\left| \begin{array}{l} 2p\,X(p) + X(p) - 2Y(p) + \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\Big) Y(p) = 0 \\ p\,X(p) - p\,Y(p) + 1 + X(p) + \frac{1}{p-1}\, X(p) = 0, \end{array} \right.$$

откъдето $X(p) = \frac{1}{p^2}$ и $Y(p) = \frac{1}{p-1}$. Оригиналите $x(t) = t,\ y(t) = e^t$ дават решението на дадената система.

V. Частни диференциални уравнения

Операционният метод е приложим и за някои частни диференциални уравнения. Най-напред разглеждаме задачата за трептенето на струна $0 < x < l$ със закрепени краища, като се предполага, че началните скорости на точките на струната и началното отклонение са зададени. Задачата се поставя по-следния начин: да се намери решение $u(x,t)$ на уравнението

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ t > 0 \tag{91}$$

с нулеви гранични условия $u(0,t) = u(l,t) = 0$ и дадени начални условия $u(x,0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x)$.

За функциите $u_0(x)$ и $u_1(x)$ се предполага, че са достатъчно гладки и удовлетворяват някои допълнителни условия в краищата на отсечката $[0,l]$, които осигурявят съществуването на достатъчно гладко решение на горната задача.

Нека $u(x,t)$ е решение на (91), удовлетворяващо дадените гранични и начални условия и нека $u(x,t)$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, разглеждани като функции на t, са оригинали. Тогава на оригинала $u(x,t)$ ще съответства изображение, явяващо се функция на x и p, т. е. $u(x,t) \rightleftarrows U(x,p)$, където $U(x,p) = \int_0^\infty u(x,t)\, e^{-pt}\, dt$. От теорема 9 за диференциране по параметър, предполагайки, че можем да сменим реда на диференциране и интегриране в интеграла на Лаплас, получаваме

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \rightleftarrows \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u(x,t)\, e^{-pt} dt = \int_0^\infty \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\, e^{-pt}\, dt = \frac{dU(x,p)}{dx}, \tag{92}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \rightleftarrows \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty u(x,t)\, e^{-pt} dt = \int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\, e^{-pt}\, dt = \frac{d^2 U(x,p)}{dx^2}. \tag{93}$$

От теорема 4 за диференциране на оригинал, вземайки предвид началните условия, намираме

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \rightleftarrows pU(x,p) - u(x,0) = pU(x,p) - u_0(x). \tag{94}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \rightleftarrows p^2 U(x,p) - p\, u(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = p^2 U(x,p) - p\, u_0(x) - u_1(x). \tag{95}$$

В уравнението (91) преминаваме към образи. Като вземем предвид (93) и (95), получаваме уравнението

$$a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - p^2 U(x,p) + p\, u_0(x) + u_1(x) = 0. \tag{96}$$

От граничните условия за $u(x,t)$ имаме

$$U(0,p) = U(l,p) = 0. \tag{97}$$

Ако $U(x,p)$ е решение на задачата (96), (97), то оригиналът $u(x,t)$, съответстващ на $U(x,p)$, е решение на дадената задача.

Пример 84. *Решете уравнението*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

с нулеви гранични условия $u(0,t) = u(1,t) = 0$ *и следните начални условия* $u(x,0) = \sin \pi x$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$.

Решение: Сега уравнението (96) в образи има вида

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - p^2 U = -p \sin \pi x \,. \tag{98}$$

Търсим решение $U(x,p)$ на това линейно диференциално уравнение от втори ред, удовлетворяващо условията (97) при $l = 1$. На p гледаме като параметър. То може да се намери или по класическия начин, или с операционния метод.

Ако решим уравнението (98) по класическия начин, за общото му решение получаваме

$$U(x,p) = C_1 e^{p x} + C_2 e^{-p x} + \frac{p}{\pi^2 + p^2} \sin \pi x.$$

От граничните условия $U(0,p) = U(1,p) = 0$ намираме $C_1 = C_2 = 0$. Следователно

$$U(x,p) = \frac{p}{\pi^2 + p^2} \sin \pi x \;\text{ и }\; u(x,t) = \cos \pi t \, \sin \pi x.$$

Пример 85. *Решете уравнението*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

с гранични условия $u(0,t) = 0$, $\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \sin t$ *и нулеви начални условия* $u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$.

Решение: Нека $u(x,t) \rightleftarrows U(x,p)$. Тогава $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \rightleftarrows p^2 U(x,p) - p\, u(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = p^2 U(x,p)$. Имаме още $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \rightleftarrows \frac{dU(x,p)}{dx}$ и $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \rightleftarrows \frac{d^2 U(x,p)}{dx^2}$. Като преминем към образи в даденото уравнение и в граничните условия, получаваме

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = p^2 U, \quad U(0,p) = 0, \quad \frac{dU(1,p)}{dx} = \frac{1}{p^2+1}.$$

Общото решение на полученото линейно диференциално уравнение от втори ред е $U(x,p) = C_1 e^{p x} + C_2 e^{-p x}$. От $U(0,p) = C_1 + C_2 = 0$ следва $C_2 = -C_1$ и $U(x,p) = 2C_1 \mathrm{sh}\, p x$. От $\frac{dU(1,p)}{dx} = 2C_1\, p\, \mathrm{ch}\, p = \frac{1}{p^2+1}$ имаме $C_1 = \frac{1}{2p(p^2+1)\mathrm{ch}\, p}$. Така получаваме

$$U(x,p) = \frac{\mathrm{sh}\, p x}{p(p^2+1)\mathrm{ch}\, p}.$$

За намиране на оригинала $u(x,t)$ на $U(x,p)$ ще използваме формулата (74). Нека $G(x,p) = U(x,p)\,e^{p\,t}$. Тя има полюси в точките $\pm\,i$ и $\pm\,ip_k$, където $p_k = (k-\frac{1}{2})\pi$, $k = 1,2,\ldots$. Всички полюси са прости. Имаме

$$u(x,t) = \mathrm{Res}\,(G(x,p);i) + \mathrm{Res}\,(G(x,p);-i) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\mathrm{Res}\,(G(x,p);ip_k) + \mathrm{Res}\,(G(x,p);-ip_k)\Big)\,.$$

За резидуумите намираме:

$$\mathrm{Res}\,(G(x,p);i) = \left.\frac{\dfrac{e^{p\,t}\,\mathrm{sh}\,p\,x}{p\,\mathrm{ch}\,p}}{2p}\right|_{p=i} = -\frac{i\,e^{i\,t}\sin x}{2\cos 1}\,;$$

$$\mathrm{Res}\,(G(x,p);-i) = \left.\frac{\dfrac{e^{p\,t}\,\mathrm{sh}\,p\,x}{p\,\mathrm{ch}\,p}}{2p}\right|_{p=-i} = \frac{i\,e^{-i\,t}\sin x}{2\cos 1}\,;$$

$$\mathrm{Res}\,(G(x,p);ip_k) = \left.\frac{\dfrac{e^{p\,t}\,\mathrm{sh}\,p\,x}{p\,(p^2+1)}}{\mathrm{sh}\,p}\right|_{p=ip_k} = (-1)^{k+1}\frac{i\,e^{i\,p_k\,t}\,\sin p_k\,x}{p_k({p_k}^2-1)}\,;$$

$$\mathrm{Res}\,(G(x,p);-ip_k) = \left.\frac{\dfrac{e^{p\,t}\,\mathrm{sh}\,p\,x}{p\,(p^2+1)}}{\mathrm{sh}\,p}\right|_{p=-ip_k} = (-1)^{k}\frac{i\,e^{-ip_k\,t}\,\sin p_k\,x}{p_k(p_k^2-1)}\,;$$

За решението $u(x,t)$ получаваме

$$u(x,t) = \frac{\sin x\sin t}{\cos 1} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin p_k\,x\sin p_k\,t}{p_k(p_k^2-1)}\,.$$

Сега разглеждаме уравнението на топлопроводимостта. Търсим разпределението на топлината в полубезкраен тънък хомогенен прът $0 < x < \infty$ при предположение, че началната температура на пръта е равна на нула, а на левия край се поддържа зададен температурен режим. Задачата се поставя така: да се намери ограничено решение $u(x,t)$ на уравнението

$$\frac{\partial\,u}{\partial\,t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\,x^2}, \quad x > 0, \;\; t > 0 \tag{99}$$

при следните условия

$$u(x,0) = 0, \;\; u(0,t) = f(t). \tag{100}$$

Нека $f(t)$ е оригинал и $f(t) \rightleftarrows F(p)$, $u(x,t) \rightleftarrows U(x,p)$. Тогава, вземайки предвид първото условие от (100), имаме $\frac{\partial\,u}{\partial\,t} \rightleftarrows p\,U$. Освен това $\frac{\partial^2 u}{\partial\,x^2} \rightleftarrows \frac{d^2U}{dx^2}$. Като преминем в (99) и (100) към образи, получаваме следната задача:

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{p}{a^2}U = 0, \quad U(0,p) = F(p), \;|U(x,p)| < \infty\,. \tag{101}$$

Общото решение на полученото линейно диференциално уравнение е $U(x,p) = C_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$. От условието $|U(x,p)| < \infty$ следва $C_1 = 0$, а от условието $U(0,p) = F(p)$ следва $C_2 = F(p)$. Така получаваме, че

$$U(x,p) = F(p)\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

е решение на задача (101). За да намерим оригинала $u(x,t)$ представяме $U(x,t)$ във вида $U(x,p) = p\,F(p)\,\frac{1}{p}\,e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$. В раздел 7 показахме (пример 61), че

$$\frac{1}{p}\,e^{-a\sqrt{p}} \leftrightarrows \operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau,$$

откъдето получаваме

$$\frac{1}{p}\,e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \leftrightarrows \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau = G(x,t)\,.$$

От формулата (40) на Дюамел имаме

$$U(x,p) \leftrightarrows \int_0^t f(\tau)\,\frac{\partial}{\partial t}G(x,t-\tau)\,d\tau = u(x,t)\,.$$

Тъй като

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x,t-\tau) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

то

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau\,.$$

Ако положим $\xi = \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}$ за решението $u(x,t)$ получаваме

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f(t - \frac{x^2}{4a^2\,\xi^2})\,e^{-\xi^2}\,d\xi\,.$$

Упражнения

Решете следните уравнения:

Задача 27. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 4\,.$

Отг. $y(t) = 2\,e^t - e^{-2t}$ ($Y(p) = \frac{p+5}{(p-1)(p+2)} = \frac{2}{p-1} - \frac{1}{p+2}$).

Задача 28. $y^{IV} + 2\,y'' + y = \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0\,.$

Отг. $y(t) = \frac{3}{8}\,\sin t - \frac{3}{8}\,t\,\cos t - \frac{1}{8}\,t^2 \sin t$ ($Y(p) = \frac{1}{(p^2+1)^3}$).

Задача 29. $y^{VI} - y = 0, \quad y(0) = 1, \; y^{(k)}(0) = 0, \; k = 1,2,3,4,5\,.$

Отг. $y(t) = 1 + \frac{t^6}{6!} + \ldots + \frac{t^{6n}}{(6n)!} + \ldots \quad (Y(p) = \frac{p^5}{p^6-1} = \frac{1}{p}\,\frac{1}{1-\frac{1}{p^6}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^7} + \ldots + \frac{1}{p^{6n+1}} + \ldots)$.

Задача 30. $y'' + y = t, \quad y(0) = y'(0) = 1\,.$

Отг. $y(t) = t + \cos t \quad (Y(p) = \frac{1+p^2+p^3}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1})\,.$

Задача 31. $y'' + 3y' + 2y = 2t + 5, \quad y(0) = y'(0) = 1\,.$

Отг. $y(t) = 1 + t \quad \Big(Y(p) = \frac{2}{p^2(p+2)(p+1)} + \frac{5}{p(p+2)(p+1)} + \frac{4}{(p+2)(p+1)} + \frac{p}{(p+2)(p+1)}\Big)\,.$

Задача 32. $y'' + 4y = 8\,\sin 2t, \quad y(0) = C_1, \;\; y'(0) = C_2\,.$

Отг. $y(t) = C_1\,\cos 2t + \frac{C_2}{2}\,\sin 2t + \sin 2t - 2t\,\cos 2t \quad (Y(p) = \frac{16}{(p^2+4)^2} + \frac{C_1\,p}{p^2+4} + \frac{C_2}{p^2+4})\,.$
Упътване. Оригиналът на $\frac{16}{(p^2+4)^2}$ може да се намери като се използуват формулите $\frac{4\,p}{(p^2+4)^2} \leftrightarrows t\,\sin 2t$ и $\frac{1}{p} \leftrightarrows 1$ и теоремата за умножение. Имаме

$$\frac{16}{(p^2+4)^2} = \frac{4}{p}.\frac{4p}{(p^2+4)^2} \leftrightarrows 4 * t\,\sin 2t = 4\int_0^t \tau\,\sin 2\tau\,d\tau = \sin 2t - 2t\,\cos 2t\,.$$

Задача 33. $y'' + 2y' + y = 2\,e^{1-t}1(t-1)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0\,.$

Отг. $y(t) = (t-1)^2\,e^{1-t}\,1(t-1) \quad \Big(Y(p) = \frac{2\,e^{-p}}{(p+1)^3}\Big)\,.$

Задача 34. $y'' - y = f(t), \;\; y(0) = y'(0) = 0,$ *където графиката на* $f(t)$ *е дадена на фиг.11.*

Отг. $y(t) = \operatorname{ch} t - 1 - \frac{1}{a}\,1(t-a)\,[\operatorname{sh}(t-a) - (t-a)] + \frac{1}{a}\,1(t-2a)\,[\operatorname{sh}(t-2a) - (t-2a)]\,.$

Задача 35. $y'' + 2y' + y = f(t), y(0) = y'(0) = 0,$ *където* $f(t) = \begin{cases} 0, \; t < 0 \\ 1, \; 0 < t < 2 \\ 3, \; t > 2. \end{cases}$

Отг. $y(t) = 1 - e^{-t} - t\,e^{-t} + 2\Big(1 - e^{-(t-2)} - (t-2)\,e^{-(t-2)}\Big)1(t-2)\,.$

Задача 36. $t\,y'' - t\,y' - y = 0, \;\; y(0) = 0\,.$

Отг. $y(t) = C\,t\,e^t\,.$

Задача 37. $t\,y'' + t\,y' - y = 0, \;\; y(0) = 0\,.$

Отг. $y(t) = C\,t\,.$

Задача 38. $t\,y'' - (t-1)\,y' + y = 0, \;\; y(0) = 1\,.$

Отг. $y(t) = 1 - t\,.$

Задача 39. $t\,y'' - (t+1)\,y' + 2(1-t)\,y = 0\,.$

Отг. $y(t) = (C + y(0))\,e^{2t} - C(3t+1)\,e^{-t}.$

Задача 40. $t\,y'' + (t+1)\,y' = e^{-t}$.

Отг. $y(t) = C + 1 - e^{-t}$.

Задача 41. $y'(t) = y(t-1) + 1,\ \ y(0) = 0$.

Отг. $y(t) = \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{(t-n)^{n+1}}{(n+1)!}\, 1(t-n)$.

Задача 42. $y''(t) - 2y'(t-1) + y(t-2) = 1,\ \ y(0) = y'(0) = 0$.

Отг. $y(t) = \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{(n+1)(t-n)^{n+2}}{(n+2)!}\, 1(t-n)$

Задача 43. *Решете с помощта на формулата* (86) *уравнението* $y'' + 4y' + 3y = 2t\,e^{-t},\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2$.

Отг. $y(t) = \frac{11}{4}\,e^{-t} - \frac{1}{2}t\,e^{-t} + \frac{1}{2}t^2\,e^{-t} - \frac{7}{4}\,e^{-3t}$.

Решете следните интегралните уравнения:

Задача 44.

$$\int_0^t e^{t-\tau}\,y(\tau)\,d\tau = t\,.$$

Отг. $y(t) = 1 - t$ ($Y(p) = \frac{p-1}{p^2}$).

Задача 45.

$$\int_0^t sh(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = 1 - \cos t\,.$$

Отг. $y(t) = 2\cos t - 1$ ($Y(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2+1)}$).

Задача 46.

$$y(t) = e^t + \int_0^t e^{t-\tau}\,y(\tau)\,d\tau\,.$$

Отг. $y(t) = e^{2t}$ ($Y(p) = \frac{1}{p-2}$).

Задача 47.

$$6\,y(t) = 2t^3 + \int_0^t (t-\tau)^3\,y(\tau)\,d\tau\,.$$

Отг. $y(t) = -\sin t + \operatorname{sh} t$ ($Y(p) = \frac{2}{p^4-1}$).

Задача 48. $y(t) = \operatorname{ch} t - \int_0^t e^{-3(t-\tau)}\,y(\tau)\,d\tau$.

Отг. $y(t) = \frac{2}{5}\,e^{t} + \frac{1}{3}\,e^{-t} + \frac{4}{15}\,e^{-4t},\ \ \left(Y(p) = \frac{p(p+3)}{(p+4)(p^2-1)}\right)$.

Задача 49. $y(t) = t + 2\int_0^t (t - \tau - \sin(t-\tau))\,y(\tau)\,d\tau$.

Отг. $y(t) = \frac{1}{3}\,e^{t} - \frac{1}{3}\,e^{-t} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\,t,\ \ \left(Y(p) = \frac{p^2+1}{(p^2+2)(p^2-1)}\right).$

Решете следните интегрално-диференциални уравнения:

Задача 50. $y'(t) = 3\cos t + \int_0^t \cos(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau,\ \ y(0) = 5\,.$

Отг. $y(t) = \frac{5}{2}t^2 + 3t + 5\,.$

Задача 51. $y'(t) - y(t) + \int_0^t \sin(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = 1 - \sin t,\ \ y(0) = 0\,.$

Отг. $y(t) = t\,.$

Задача 52. $y''(t) - 2\int_0^t e^{-(t-\tau)}\,y(\tau)\,d\tau = 0,\, y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Отг. $y(t) = \frac{2}{5}\,e^{t} + \frac{1}{5}\,e^{-t}\sin t + \frac{3}{5}\,e^{-t}\cos t),\ \ \left(Y(p) = \frac{p(p+1)}{p^3+p^2-2}\right).$

Решете следните системи:

Задача 53. $\left|\begin{array}{l} x' = 5y - 3x \\ y' = y - x, \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 1. \end{array}\right.$

Отг. $x(t) = e^{-t}\,(2\cos t + \sin t),\ \ y(t) = e^{-t}\,\cos t$
$\left(\,X(p) = \frac{2(p+1)+1}{(p+1)^2+1},\ \ Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1}\,\right).$

Задача 54. $\left|\begin{array}{l} x' + 3x + y = 0 \\ y' - x + y = 0, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 1. \end{array}\right.$

Отг. $x(t) = e^{-2t}\,(1 - 2t),\ \ y(t) = e^{-2t}\,(1 + 2t)$
$\left(\,X(p) = \frac{p}{(p+2)^2},\ \ Y(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2}\,\right).\ \ Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1}\,\Big).$

Задача 55. $\left|\begin{array}{l} x'' + x' + y'' - y = e^{t} \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t}, \quad x(0) = y(0) = y'(0) = 0,\ x'(0) = 1. \end{array}\right.$

Отг. $x(t) = \frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,t + \frac{3}{4}\,t\,e^{-t},\ \ y(t) = \frac{3}{4}\,t\,\mathrm{sh}\,t$
$\left(\,X(p) = \frac{2p-1}{2(p+1)^2(p-1)},\ \ Y(p) = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}\,\right).$

Задача 56. $\left|\begin{array}{l} x' - 2x - 4y = \cos t \\ y' + x + 2y = \sin t, \qquad x(0) = y(0) = 0. \end{array}\right.$

Отг. $x(t) = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t,\ \ y(t) = -2t + 2\sin t\ \ \ (\,X(p) = \frac{p^2+2p+4}{p^2\,(p^2+1)},$
$Y(p) = -\frac{2}{p^2\,(p^2+1)}\,).$

Задача 57. $\left|\begin{array}{l} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y, \quad x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = 0. \end{array}\right.$

Отг. $x(t) = \frac{2}{3}\,e^{-t} + \frac{1}{3}\,e^{2t},\ \ y(t) = z(t) = \frac{1}{3}\,e^{2t} - \frac{1}{3}\,e^{-t}\quad (\,X(p) = \frac{p-1}{(p+1)\,(p-2)},$
$Y(p) = \frac{1}{(p+1)\,(p-2)},\ Z(p) = \frac{1}{(p+1)\,(p-2)}\,).$

Задача 58. $\left| \begin{array}{ll} x(t) = & e^t + \int_0^t x(\tau)\,d\tau - \int_0^t e^{t-\tau}\,y(\tau)\,d\tau \\ y(t) = & -t - \int_0^t (t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau + \int_0^t y(\tau)\,d\tau\,. \end{array} \right.$

Отг. $x(t) = e^{2t},\ y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,e^{2t}\,.$

Задача 59. $\left| \begin{array}{ll} x(t) = & 2 - \int_0^t (t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau - 4\int_0^t y(\tau)\,d\tau \\ y(t) = & 1 - \int_0^t x(\tau)\,d\tau - \int_0^t (t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau\,. \end{array} \right.$

Отг. $x(t) = 2\,e^{-t}\,(1-t),\ y(t) = (1-t)\,e^{-t}\,.$

Задача 60. $\left| \begin{array}{l} 2x'(t) + x(t) - 2y(t) + \int_0^t (1+t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = 0 \\ x'(t) - y'(t) + x(t) + \int_0^t e^{t-\tau}\,x(\tau)\,d\tau = 0,\ x(0) = 0,\ y(0) = 1\,. \end{array} \right.$

Отг. $x(t) = t,\ y(t) = e^t\,.$

Задача 61. *Решете уравнението*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ t > 0,\ 0 < x < l$$

със следните гранични и начални условия
$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = A\sin\frac{n\pi x}{l},\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,\ n \in \mathbb{N},\ A = const.$

Отг. $u(x,t) = A\cos\frac{n\pi at}{l}\,\sin\frac{n\pi x}{l}\ \ (\,U(x,p) = \dfrac{Ap}{p^2 + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}}\,\sin\frac{n\pi x}{l}\,).$

Задача 62. *Решете уравнението*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = a^2\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\ t > 0,\ 0 < x < l$$

със следните гранични и начални условия
$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = A\sin\frac{n\pi x}{l},,\ n \in \mathbb{N},\ A = const.$

Отг. $u(x,t) = Ae^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2 l^2}t}\,\sin\frac{n\pi x}{l}\ \ (\,U(x,p) = \dfrac{A}{p + \frac{n^2\pi^2}{l^2 a^2}}\,\sin\frac{n\pi x}{l}\,).$

9. Импулсна функция

Физици и инженери понякога разглеждат сили, които действуват за много малък интервал от време, но произвеждат голям ефект. Такава е, например, силата, която действува по време на земетресение. Това води до идеята за въвеждане на единична импулсна функция $\delta(t)$.

Нека h е положителна константа и да разгледаме функцията

$$\delta(t,h) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & 0 < t < h \\ 0, & t < 0 \text{ и } t > h. \end{cases} \tag{102}$$

Имаме $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t,h)\,dt = \int_0^h \frac{1}{h}\,dt = 1$. Поради това при малко h функцията $\delta(t,h)$ може физически да се разглежда като сила с големина $\frac{1}{h}$, действуваща в продължение на малък интервал от време h с импулс (за времето на действие), равен на 1. Тази сила, приложена към материална точка с маса $m = 1$, придава на тази точка за времето на действието си скорост $v = 1$ и за това време точката се премества на разстояние $s = \frac{h}{2}$ и след това продължава да се движи с постоянна скорост $v = 1$. За приложенията се оказва полезно да се разглежда функцията

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0} \delta(t,h)\,. \tag{103}$$

Тук границата не е в строго математически смисъл, а във физически. Тази функция се нарича **единична импулсна функция** от нулев ред или **δ-функция на Дирак**. Имаме

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

и $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$. Това не е функция в обичайния смисъл, Тя може да се тълкува като мигновенно действуваща безкрайно голяма сила с импулс, равен на единица. Тя придава на материална точка с единична маса единична мигновенна скорост. Въвеждането на тази функция значително опростява изчисленията при различни приложни задачи, в които се разглеждат величини с характер на мигновенни импулси - удар на тяло или включване към електрическа верига на голяма електродвижеща сила за много кратък период от време.

Умножението на единичната импулсна функция $\delta(t)$ с константа C дава импулсна функция $C\,\delta(t)$ с големина C.

С помощта на единичната функция представяме $\delta(t,h)$ по следния начин:

$$\delta(t,h) = \frac{1(t) - 1(t-h)}{h}\,, \tag{104}$$

откъдето

$$\mathcal{L}(\delta(t,h)) = \frac{1}{h}\Big(\frac{1}{p} - \frac{e^{-h\,p}}{p}\Big) = \frac{1-e^{-h\,p}}{h\,p}\,. \qquad (105)$$

Дефинираме

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \lim_{h\to 0}\mathcal{L}(\delta(t,h)) = \lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-h\,p}}{h\,p} = 1\,. \qquad (106)$$

И така по дефиниция $\delta(t) \rightleftarrows 1$. Тази дефиниция се оправдава и от следните съображения. От $\delta(t) = \lim\limits_{h\to 0}\delta(t,h)$ и (104) можем формално да приемем, че $\delta(t) = 1'(t)$. От теоремата за диференциране на оригинал и $1(t) \rightleftarrows \frac{1}{p}$, приемайки $1(t) = 0$ за $t = 0$, имаме $\delta(t) = 1'(t) \rightleftarrows p.\frac{1}{p} = 1$. Получаваме същия резултат.

Лесно се проверява, че за $\delta(t)$ са в сила основните теореми на операционното смятане. За закъсняващата импулсна функция $\delta(t-c)$ от теоремата за закъснението имаме $\delta(t-c) \rightleftarrows e^{-cp}$.

Разглеждат се също единични импулсни функции от първи, втори и т. н. ред. Така например, единична импулсна функция от първи ред $\delta_1(t)$ се въвежда по аналогия с (103) и (104) по следния начин:

$$\delta_1(t) = \lim_{h\to 0}\delta_1(t,h),$$

където

$$\delta_1(t,h) = \frac{\delta(t,h) - \delta(t-h,h)}{h}\,.$$

Имаме

$$\delta_1(t,h) = \frac{1(t) - 2\,1(t-h) + 1(t-2h)}{h^2} = \begin{cases} \frac{1}{h^2}, & 0 < t < h \\ -\frac{1}{h^2}, & h < t < 2h \\ 0, & t < 0 \text{ и } t > 2h \end{cases}$$

и $\int_{-\infty}^{\infty}\delta_1(t,h)\,dt = 0$. Тази функция може физически да се разглежда като сила с постоянна големина $\dfrac{1}{h^2}$, действуваща за време h в една посока, а за следващия период от време h в противоположната посока. Пълният импулс на тази сила за времето на действие е равен на нула. Тази сила, приложена към материална точка с маса $m = 1$, предизвиква преместване на точката на разстояние $s = 1$ и в момента $t = 2h$ точката спира да се движи.

Единичната импулсна функция от първи ред $\delta_1(t) = \lim\limits_{h\to 0}\delta_1(t,h)$ може да се тълкува физически като две мигновенно последователно действуващи противоположно насочени безкрайно големи сили, които предизвикват мигновенно преместване на материална точка с единична маса на разстояние единица и не придават на точката нито скорост, нито ускорение.

Имаме

$$\mathcal{L}(\delta_1(t,h)) = \frac{1}{h^2}\Big[\frac{1}{p} - \frac{2\,e^{-h\,p}}{p} + \frac{e^{-2h\,p}}{p}\Big]\,.$$

От тук

$$\mathcal{L}(\delta_1(t)) = \lim_{h\to 0} \mathcal{L}(\delta_1(t,h)) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(1-e^{-h\,p}\right)^2}{p\,h^2} = p\,.$$

Аналогично се въвеждат импулсни функции $\delta_n(t)$ от n-ти ред ($n \geq 2$). За тях се получават формулите $\delta_n(t) \rightleftarrows p^n$ и $\delta_n(t-c) \rightleftarrows p^n\,e^{-cp}$.

Импулсните функции получават строго обосноваване в теорията на обобщените функции.

Пример 86. *Решете уравнението* $y'' + 4y' + 13y = 3\delta(t)$ *с начални условия* $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение: Нека $y(t) \rightleftarrows Y(p)$. При дадените начални условия $y'(t) \rightleftarrows pY(p)$, $y''(t) \rightleftarrows p^2\,Y(p)$. За операторното уравнение получаваме $(p^2+4p+13)\,Y(p) = 3$, откъдето

$$Y(p) = \frac{3}{p^2+4p+13} = \frac{3}{(p+2)^2+3^2}.$$

Оригиналът $y(t) = e^{-2t}\sin 3t$ е решение на даденото уравнение.

Пример 87. *Решете уравненията:*
1. $y'' = \delta(t-c)$; 2. $y'' = \delta_1(t-c)$
с нулеви начални условия.

Решение: Нека $y(t) \rightleftarrows Y(p)$. Тогава за уравненията в образи получаваме:
1. $p^2\,Y(p) = e^{-cp}$; 2. $p^2\,Y(p) = p\,e^{-cp}$,
откъдето
1. $Y(p) = \frac{1}{p^2}e^{-cp}$; 2. $Y(p) = \frac{1}{p}\,e^{-cp}$.
За решенията намираме
1. $y(t) = 1(t-c)\,(t-c)$; 2. $y(t) = 1(t-c)$.

Получените резултати потвърждават направените физически тълкувания на импулсните функции. Закъсняващата импулсна сила от нулев ред $\delta(t-c)$ придава на материалната точка с единична маса, намираща се първоначално в покой, в момента $t = c$ постоянна скорост $v = 1$, а закъсняващата импулсна сила от първи ред $\delta_1(t-c)$ придава на материалната точка при аналогични условия мигновенно преместване на разстояние с дължина единица, без да придава на точката нито скорост, нито ускорение.

Като следващ пример разглеждаме диференциалното уравнение на хармоничния осцилатор при произволни начални условия със закъсняващи импулсни сили от нулев и първи ред.

Пример 88. *Решете уравненията:*
1. $y'' + \omega^2\,y = v_0\delta(t-c)$; 2. $y'' + \omega^2\,y = h\delta_1(t-c)$
с начални условия $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$.

Решение: 1. Нека $y(t) \rightleftarrows Y(p)$. За уравнението в образи получаваме $(p^2{+}\omega^2)\,Y(p) = y_0\,p + y_1 + v_0\,e^{-cp}$, откъдето $Y(p) = \dfrac{y_0\,p + y_1 + v_0\,e^{-cp}}{p^2+\omega^2}$ и

$$y(t) = y_0 \cos\omega\,t + \frac{y_1}{\omega}\sin\omega\,t + \frac{v_0}{\omega}\,1(t-c)\sin\omega(t-c).$$

2. Нека $y(t) \rightleftarrows Y(p)$. За уравнението в образи получаваме $(p^2+\omega^2)\,Y(p) = y_0\,p + y_1 + h\,p\,e^{-cp}$, откъдето $Y(p) = \dfrac{y_0\,p + y_1 + h\,p\,e^{-cp}}{p^2+\omega^2}$ и

$$y(t) = y_0 \cos\omega\,t + \frac{y_1}{\omega}\sin\omega\,t + h\,1(t-c)\cos\omega(t-c).$$

Както се вижда от получените решения, до момента $t = c$ двете хармонични колебания са тъждествени (както и трябваше да се очаква), а в момента $t = c$ в първия случай движещата се точка получава мигновенна допълнителна скорост v_0, а във втория случай - мигновенно допълнително преместване h, откъдето и в двата случая се променя характера на движението по-нататък.

Пример 89. *Материална точка с маса m е окачена на идеално пъргава пружина. В началния момент $t = 0$ точката е отклонена от равновесното си положение, като и е зададена начална скорост y_1 по верикалата. Нека началното отклонение е y_0. Съпротивлението на средата се пренебрегва. Какви импулси от нулев и първи ред по направление на движението трябва да се приложат към точката в момента $t = c$, за да спре движението?*

Решение: Нека в момента t отклонението е $y(t)$. Съгласно закона на Хук пружината противодействува и се стреми да се върне в равновесното си положение със сила, пропорционална на отклонението, т.е. със сила $F = -k\,y$, $k > 0$, където константата k зависи от качеството на пружината. Ако приложим импулс от нулев ред с големина A и импулс от първи ред с големина B, тогава, прилагайки закона на Нютон, получаваме уравнението

$$m\,y'' = -k\,y + A\delta(t-c) + B\delta_1(t-c)\,, \tag{107}$$

което, като разделим на m, приема вида

$$y'' + \omega^2\,y = v_0\delta(t-c) + h\delta_1(t-c),$$

където

$$\frac{k}{m} = \omega^2;\quad \frac{A}{m} = v_0;\quad \frac{B}{m} = h\,.$$

Ако $y(t) \rightleftarrows Y(p)$, то, като преминем към образи, получаваме уравнението

$$(p^2+\omega^2)\,Y(p) = y_0\,p + y_1 + v_0\,e^{-cp} + h\,p\,e^{-cp},$$

откъдето

$$Y(p) = \frac{y_0\,p + y_1 + v_0\,e^{-cp} + h\,p\,e^{-cp}}{p^2+\omega^2}\,.$$

За решението намираме

$$y(t) = y_0 \cos \omega\, t + \frac{y_1}{\omega} \sin \omega\, t + 1(t-c)\Big(h \cos \omega(t-c) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega(t-c)\Big)\,.$$

Като преобразуваме израза за $y(t)$ при $t > c$, т.е. полагаме $1(t-c) = 1$, получаваме

$$y(t) = \Big(y_0 + h\cos\omega\, c - \frac{v_0}{\omega}\sin\omega\, c\Big)\cos\omega\, t + \Big(\frac{y_1}{\omega} + h\sin\omega\, c + \frac{v_0}{\omega}\cos\omega\, c\Big)\sin\omega\, t\,. \tag{108}$$

Движението ще спре, ако коефициентите пред $\cos\omega\, t$ и $\cos\omega\, t$ са равни на нула. Получаваме системата

$$\left|\begin{array}{rr} y_0 + h\cos\omega\, c - \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega\, c = & 0 \\ \dfrac{y_1}{\omega} + h\sin\omega\, c + \dfrac{v_0}{\omega}\cos\omega\, c = & 0\,. \end{array}\right.$$

Като решим системата относно h и v_0, намираме

$$h = -\Big(y_0\cos\omega\, c + \frac{y_1}{\omega}\sin\omega\, c\Big) = -\lim_{t\to c-0} y(t) = -y(c-0);$$

$$v_0 = -(-y_0\omega\sin\omega\, c + y_1\cos\omega\, c) = -\lim_{t\to c-0} y'(t) = -y'(c-0)\,.$$

Полученият резултат е очакван. На точката трябва да се приложи такъв импулс от нулев ред, който да погаси скоростта на точката, получена в момента $t = c$ и такъв импулс от първи ред, който да погаси отместването, получено в момента $t = c$, т.е. да върне точката в равновесното положение.

Пример 90. *Сега разглеждаме трептене на полуограничена струна $0 < x < \infty$, като нейният край $x = 0$ е закрепен и в началния момент струната е в покой. Нека в момента $T > 0$ върху края $x = 0$ се нанася мигновен удар. Задачата се поставя така: да се намери решение $u(x,t)$ на уравнението*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \infty, \;\; a > 0 - \textit{константа} \tag{109}$$

с начални условия

$$u|_{t=0} = 0, \;\; \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{110}$$

и гранично условие

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = v_0\delta(t-T), \tag{111}$$

където $\delta(t)$ е фунцията на Дирак, $v_0 \neq 0$ е константа.

Решение: Прилагаме преобразованието на Лаплас към уравнението (109) и условието (111). Нека $u(x,t) \rightleftarrows U(x,p)$. Като вземем предвид (110), получаваме линейното диференциално уравнение (на p гледаме като на параметър)

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2}U = 0 \quad (0 < x < \infty) \tag{112}$$

и условието

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} = v_0\, e^{-pT}. \tag{113}$$

Общото решение на (112) е $U(x,p) = C_1\, e^{\frac{p}{a}x} + C_2\, e^{-\frac{p}{a}x}$. От условието $U(p,x) \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to \infty$ (виж следствие 1) и условието (113) получаваме $U(x,p) = -\frac{av_0}{p}\, e^{-\frac{p}{a}x - pT}$. За оригинала $u(x,t)$ намираме $u(x,t) = -a\, v_0\, 1(t - T - \frac{x}{a})$.

Упражнения

Задача 63. *Намерете:*

1. $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{p}{p-1}\Big)$; 2. $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{p^2}{p^2+1}\Big)$.

Отг. 1. $f(t) = e^t + \delta(t)$; 2. $f(t) = -\sin t + \delta(t)$.

Решете следните уравнения:

Задача 64. $y'' + 4y' + 3y = 2\delta(t-1),\ y(0) = y'(0) = 0$.

Отг. $y(t) = (-e^{3-3t} + e^{1-t})1(t-1)$.

Задача 65. $y'' - 2y' + 2y = a\, e^t + v_0\, \delta(t-c),\ y(0) = y'(0) = 0,\ c{>}0$.

Отг. $y(t) = a\, e^t\, (1 - \cos t) + v_0\, 1(t-c) e^{t-c} \sin(t-c)$.

10.Таблица на някои оригинали и техните изображения

	$f(t)$ - **оригинал**	$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-p\,t}\, dt$ -**изображение**
1	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
2	$f'(t)$	$p\, F(p) - f(0)$
3	$f^{(n)}(t),\ n \in \mathbb{N}$	$p^n\, F(p) - p^{n-1}\, f(0) - \ldots - p\, f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
4	$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
5	$t^n\, f(t),\ n \in \mathbb{N}$	$(-1)^n\, F^{(n)}(p)$
6	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(u)\, du$
7	$1(t-c)),\, c > 0$	$\frac{1}{p} e^{-c\,p}$
8	$1(t-c)\, f(t-c),\, c > 0$	$e^{-c\,p}\, F(p)$
9	$e^{\alpha\,t}\, f(t),\, \alpha \in \mathbb{C}$	$F(p-\alpha)$
10	$e^{\alpha\,t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$
11	$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
12	$t^n\, e^{\alpha\,t}$	$\dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
13	$\sin \alpha\, t$	$\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
14	$\cos \alpha\, t$	$\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$
15	$\mathrm{sh}\, \alpha\, t$	$\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
16	$\mathrm{ch}\, \alpha\, t$	$\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$
17	$t\, \sin \alpha\, t$	$\dfrac{2\alpha\, p}{(p^2+\alpha^2)^2}$
18	$t\, \cos \alpha\, t$	$\dfrac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$
19	$e^{\alpha\,t}\, \sin \beta\, t$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
20	$e^{\alpha\,t}\, \cos \beta\, t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
21	$\delta(t)$	1

Литература

[1] Mathews J., Russell H., Complex analysis for mathematics and engineering, Jones and Bartlett Publishers, 1997.

[2] Петрова-Денева А., Димова-Нанчева В., Милушева С., Йоакимов С., Генев В., Сборник от задачи по висша математика, част IV, София, 1979.

[3] Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И., Лекции по теории функций комплексного переменного, Москва, 1982.

[4] Шахно К. У.,Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления, Минск,1975.

[5] Шостак П. Я., Операционное исчисление, Москва, 1968.

[6] Мартыненко Б. С., Операционное исчисление, Издательство Киевского Университета, 1968.