

Лекция 33

§33. Преобразование на Лаплас и z -преобразование

1. Определение и примери. Преобразованието на Лаплас дава възможност за обосновка на операционното смятане, което представлява основният апарат за моделиране в теорията на стационарните системи.

Ще разглеждаме функции $f(t)$, определени за всяко $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяващи следните условия.

1) $f(t) = 0$ за $t < 0$.

2) Във всеки краен интервал $[0, A]$, $A > 0$, функцията $f(t)$ е непрекъсната или има краен брой прекъсвания от първи род.

3) $f(t)$ расте не по-бързо от експонента при $t \rightarrow \infty$, т.е.

$$(33.1) \quad |f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}, \quad t \geq 0,$$

за някои константи $M \geq 0$ и $\sigma_0 \in \mathbb{R}$.

Всяка функция $f(t)$, която изпълнява посочените три условия ще наричаме **оригинал**. От условие 2) следва, че във всяка точка $t_0 \in \mathbb{R}$ съществуват двете едностранни граници $f(t_0 + 0)$ и $f(t_0 - 0)$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $f(t)$ няма "изкуствени" прекъсвания, което означава, че ако $f(t_0 + 0) = f(t_0 - 0)$, то функцията $f(t)$ ще разглеждаме непрекъсната в точката t_0 , при което разбира се $f(t_0) = f(t_0 + 0) = f(t_0 - 0)$. Ако $f(t)$ има прекъсване от първи род в точката t_0 , $f(t_0 + 0) \neq f(t_0 - 0)$, то конкретната стойност $f(t_0)$ няма особено значение за теорията, която ще изложим по-надолу. За удобство можем да предполагаме, че $f(t_0) = f(t_0 + 0)$, което означава, че $f(t)$ е непрекъсната отдясно в точката t_0 . По този начин всеки оригинал $f(t)$ представлява функция, която е непрекъсната отдясно във всяка точка $t_0 \in \mathbb{R}$.

Точната долна граница $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(f)$ на всичките σ_0 , за които е валидно равенството (33.1) се нарича **показател за (експоненциален) ръст** на функцията $f(t)$. Това означава, че за всяко $\sigma_0 > \hat{\sigma}$ съществува константа M такава, че е изпълнено (33.1), а за всяко $\sigma_0 < \hat{\sigma}$ не може да се намери такава константа (може да се случи $\hat{\sigma} = -\infty$). Непосредствено се вижда, че ако $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_m(t)$ са оригинали, то всяка тяхна линейна комбинация

$$f(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \dots + \alpha_m f_m(t),$$

където α_k , $k = 1, 2, \dots, m$, са константи, също представлява оригинал, при което показателят за ръст на $f(t)$ не надвишава най-големия от показателите на ръст за съставлящите функции.

При всяко цяло n и всяко $\sigma > 0$ от правилото на Лопитал следва, че

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-\sigma t} = 0,$$

следователно за функцията $f(t) = t^n$ имаме $\hat{\sigma} = 0$. От тук следва, че ако $P(t)$ е полином, то също $\hat{\sigma} = 0$. Изобщо, ако $f(t)$ е квазиполином от вида

$$f(t) = \sum_{k=1}^n P_k(t)(a_k \cos \alpha_k t + b_k \sin \alpha_k t)e^{\beta_k t},$$

където $P_k(t)$ са полиноми, $a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k, k=1,2,\dots,n$, са константи, при уговорката $f(t)=0$ за $t < 0$, то $f(t)$ е оригинал, при което $\hat{\sigma} \leq \max(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Определение 33.1. Ако функцията $f(t)$ е оригинал, то **преобразоване на Лаплас** на $f(t)$ се нарича следният несобствен интеграл

$$(33.2) \quad F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

разглеждан като функция на комплексната променлива $p = \sigma + i\omega$ при $\sigma > \hat{\sigma}$, където $\hat{\sigma}$ е показателят за ръст на $f(t)$.

Функцията $F(p)$ се нарича **образ** на оригинала $f(t)$. В този случай пишем

$$f(t) \Leftrightarrow F(p), \quad F(p) = \mathbf{L}\{f(t)\}, \quad f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(p)\}.$$

Например нека $\eta(t)$ е функцията на Хевисайд (рис. 33.1)

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

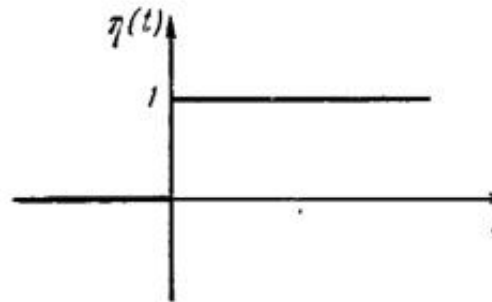


Рис. 33.1.

Тогава за нейния образ имаме

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} dpt = \frac{-1}{p} \int_0^{\infty} de^{-pt} = \frac{-1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p} \left[1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} \right] = \frac{1}{p},$$

понеже при $p = \sigma + i\omega$ с $\sigma > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-pt}| = \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-\sigma t - i\omega t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-\sigma t}| |e^{i\omega t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} = 0.$$

При намирането на тези интеграли винаги се предполага, че $\sigma = \operatorname{Re} p$ е фиксирано отнапред **достатъчно голямо**. Следователно

$$(33.3) \quad \eta(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p}.$$

Функцията $\eta(t)$ има ролята на **единична функция**, която по първото изискване за оригинал е равна на нула за отрицателни стойности на t . Затова понякога функцията на Хевисайд се означава с $1(t)$. Когато например използваме познатите функции $\sin t$, $\cos t$, e^t и т.н. в качеството на оригинали се има предвид, че те съвпадат със съответните функции за $t \geq 0$ и са равни на нула за $t < 0$ (рис. 33.2).

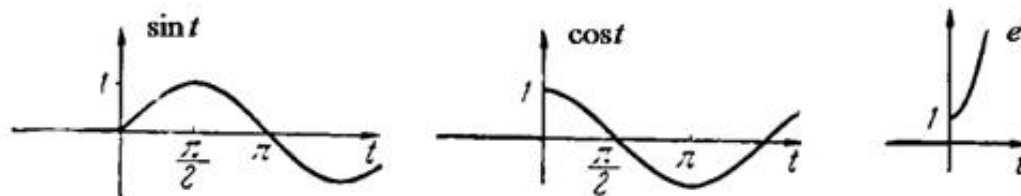


Рис. 33.2.

Формално за тези оригинали можем да пишем $\eta(t)\sin t$, $\eta(t)\cos t$, $\eta(t)e^t$, което обаче води до малко полезни означения.

Нека $f(t)$ е оригинал с показател за ръст $\hat{\sigma}$. Тогава за всяко $\sigma_0 > \hat{\sigma}$ съществува константа $M > 0$, за която $|f(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}$, $t \geq 0$, откъдето лесно се получава, че преобразованието на Лаплас представлява абсолютно (и равномерно за всички p с $\sigma = \operatorname{Re} p > \sigma_0$) сходящ интеграл, понеже при $\sigma > \sigma_0$ имаме

$$\left| \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t} dt = \int_0^\infty |f(t)|e^{-(\sigma - \sigma_0)t} dt = \int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t} dt,$$

$$\left| \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \right| \leq M \int_0^\infty e^{\sigma_0 t} e^{-\sigma t} dt = M \frac{-1}{\sigma - \sigma_0} e^{-(\sigma - \sigma_0)t} \Big|_0^\infty = \frac{M}{\sigma - \sigma_0} \left[1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\sigma - \sigma_0)t} \right] = \frac{M}{\sigma - \sigma_0}.$$

Всъщност е валидна следната обща теорема.

Теорема 33.1. Нека $f(t)$ е оригинал с показател за ръст $\hat{\sigma}$. Тогава преобразованието на Лаплас $F(p)$ представлява аналитична функция в полуравнината $\sigma = \operatorname{Re} p > \hat{\sigma}$ (рис. 33.3), чиито производни могат да се намерят посредством диференциране под знака на интеграла,

$$F^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-t)^n f(t)e^{-pt} dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и разбира се също представляват аналитични функции в полуравнината $\operatorname{Re} p > \hat{\sigma}$. $\square$

Например

$$F'(p) = - \int_0^\infty t f(t)e^{-pt} dt, \quad \operatorname{Re} p > \hat{\sigma}(f).$$

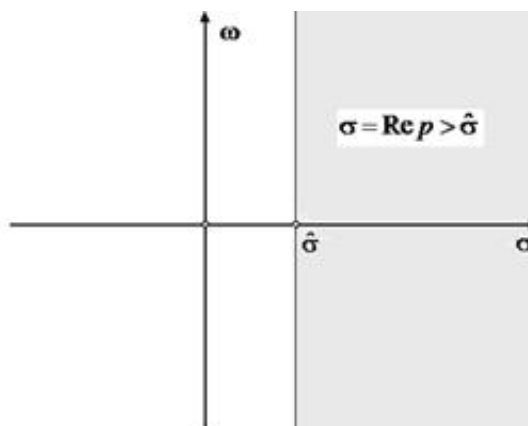


Рис. 33.3.

Да намерим образа на функцията $f(t) = e^{at}$, където $a = \alpha + i\beta$ е някакво комплексно число. Тук $|e^{at}| = |e^{\alpha t} e^{i\beta t}| = |e^{\alpha t}|$, следователно $\hat{\alpha} = \alpha$. При $\operatorname{Re} p > \alpha$ имаме

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{-1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a} \left[1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(p-a)t} \right] = \frac{1}{p-a},$$

следователно

$$(33.4) \quad e^{at} \Leftrightarrow \frac{1}{p-a}.$$

Функцията $F(p)$ от общи съображения знаем, че е аналитична в полуравнината $\operatorname{Re} p > \alpha$. От нейния конкретен вид обаче се вижда, че тя е аналитична в цялата комплексна равнина с изключение на точката a .

Получената ситуация е типична за елементарните приложения. **Образите обикновено се получават аналитични в цялата равнина с изключение на краен брой изолирани особени точки** (полюси). Всъщност именно резидуумите на $F(p)$ в тези полюси, както ще се убедим по-нататък, идентифицират по единствен начин оригинала $f(t)$, който поражда $F(p)$. Всичките тези полюси задължително лежат в другата полуравнина $\operatorname{Re} p < \hat{\alpha}(f)$ или по вертикалната права $\operatorname{Re} p = \hat{\alpha}$, понеже $F(p)$ със сигурност е аналитична в полуравнината $\operatorname{Re} p > \hat{\alpha}$ и не може да има там особени точки.

2. Основни свойства. Причината поради която преобразованието на Лаплас работи толкова добре в математическото моделиране е начинът, по който задава съответствието между оригинали и образи. По-нататък ще се убедим, че това съответствие при никакви естествени уговорки е взаимно еднозначно. Освен това съществуват и прости връзки между образът на дадена функция и образите на нейните производни и интеграли. В определен смисъл диференциалното и интегралното смятане за дадени функции се превръща в своеобразно смятане над техните образи, при което последното в технически план е значително по-лесно. Следва да се има предвид, че **операционното смятане**, както още се нарича цялата технология на работа с оригинали и образи, е било открито и използвано от английския електроинженер Оливър Хевисайд преди да му бъде придадена строга математическа форма, намерила окончателен вид в работите на

полския математик Ян Микусински.

Тук ще разгледаме основните свойства на преобразованието на Лаплас.

1) Линеиност. Поради линейното свойство на интеграла, преобразованието на Лаплас също е линейно, т.е. образ на линейна комбинация е равен на съответната линейна комбинация от образи, т.е.

$$\mathbf{L}\{\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \dots + \lambda_m f_m(t)\} = \lambda_1 \mathbf{L}\{f_1(t)\} + \lambda_2 \mathbf{L}\{f_2(t)\} + \dots + \lambda_m \mathbf{L}\{f_m(t)\}.$$

Например да намерим образа на функцията $f(t) = \sin \beta t$. Имаме

$$\sin \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i},$$

а от друга страна пресметнахме

$$e^{\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{p - \alpha},$$

следователно

$$(33.5) \quad \sin \beta t \Leftrightarrow \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p - i\beta} + \frac{1}{p + i\beta} \right] = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}.$$

Аналогично пресмятаме

$$(33.6) \quad \cos \beta t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \beta^2}.$$

2) Формула за отместването. Ако $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то

$$e^{\alpha t} f(t) \Leftrightarrow F(p - \alpha).$$

По определение

$$\mathbf{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-\alpha)t} dt = F(p - \alpha).$$

Например от (33.5) и от формулата за отместването имаме

$$(33.7) \quad e^{\alpha t} \sin \beta t \Leftrightarrow \frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} \quad \text{и} \quad e^{\alpha t} \cos \beta t \Leftrightarrow \frac{(p - \alpha)}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

3) Формула за закъснението. Нека $f(t) \Leftrightarrow F(p)$ и $a > 0$. Тогава можем да разгледаме функцията $f(t - a)$ (рис. 33.4), която също представлява оригинал. За образа на $f(t - a)$ е в сила формулата

$$f(t - a) \Leftrightarrow e^{-pa} F(p).$$

Имаме

$$\mathbf{L}\{f(t - a)\} = \int_0^{\infty} f(t - a) e^{-pt} dt = \int_a^{\infty} f(t - a) e^{-pt} dt,$$

понеже $f(t-a)=0$ за $t < a$.

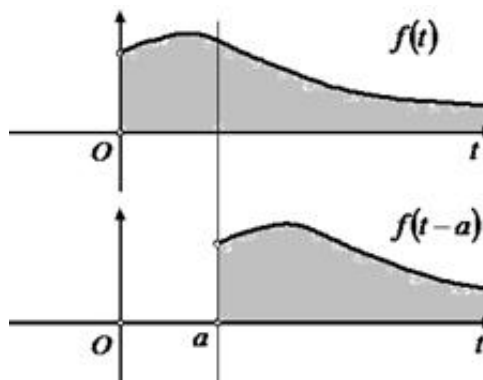


Рис. 33.4.

Сега след смяна на променливата $t-a = \tau$ получаваме

$$\mathbf{L}\{f(t-a)\} = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p(\tau+a)} d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} e^{-pa} d\tau = e^{-pa} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = e^{-pa} F(p)$$

4) Формула за изпреварването. Нека $f(t) \Leftrightarrow F(p)$ и $a > 0$. Тогава е в сила формулата

$$f(t+a) \Leftrightarrow e^{pa} \left[F(p) - \int_0^a f(t) e^{-pt} dt \right].$$

Имаме

$$\mathbf{L}\{f(t+a)\} = \int_0^{\infty} f(t+a) e^{-pt} dt$$

което след смяна на променливата $t+a = \tau$ приема вида

$$\mathbf{L}\{f(t+a)\} = \int_a^{\infty} f(\tau) e^{-p(\tau-a)} d\tau = \int_a^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} e^{pa} d\tau = e^{pa} \int_a^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau,$$

$$\mathbf{L}\{f(t+a)\} = e^{pa} \left[\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau - \int_0^a f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right],$$

$$\mathbf{L}\{f(t+a)\} = e^{pa} \left[F(p) - \int_0^a f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right].$$

5) Формула за подобие. Нека $f(t) \Leftrightarrow F(p)$ и $\lambda > 0$. Тогава е в сила формулата

$$f(\lambda t) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

Имаме

$$\mathbf{L}\{f(\lambda t)\} = \int_0^{\infty} f(\lambda t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} f(\lambda t) e^{-\frac{p}{\lambda}(\lambda t)} d(\lambda t),$$

което след смяната $\lambda t = \tau$ приема вида

$$\mathbf{L}\{f(\lambda t)\} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\lambda}\tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Например от съотношението

$$\sin t \Leftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$$

и формулата за подобие намираме познатия израз

$$\sin \lambda t \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\left(\frac{p}{\lambda}\right)^2 + 1} = \frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}$$

6) Формула за изображение на T -периодичен оригинал. Нека функцията $f(t)$ е T -периодична, т.е. $f(t+T) = f(t)$ при $t \geq 0$ ($T > 0$) и нека $f(t) \Leftrightarrow F(p)$. Тогава е в сила формулата

$$f(t) \Leftrightarrow \frac{\int_0^T f(t) e^{-pt} dt}{1 - e^{-pT}}.$$

Имаме $f(t) = f(t+T)$ следователно според формулата за изпреварването,

$$\mathbf{L}\{f(t)\} = \mathbf{L}\{f(t+T)\} = e^{pT} \left[\mathbf{L}\{f(t)\} - \int_0^T f(t) e^{-pt} dt \right],$$

което след очевидно преобразуване доказва твърдението.

Конволюция $f_1 * f_2(t)$ на два оригинала $f_1(t)$ и $f_2(t)$ наричаме функцията, определена от интеграла

$$(33.8) \quad f_1 * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

Така определената функция удовлетворява трите условия за оригинал. Освен това може да се докаже

Твърдение 33.1. Конволюцията притежава следните основни свойства.

- 1) **Комутативност** – $f_1 * f_2(t) = f_2 * f_1(t)$.
- 2) **Асоциативност** – $f_1 * (f_2 * f_3)(t) = (f_2 * f_1) * f_3(t)$.
- 3) **Линейност** – $f_1 * (\alpha f_2 + \beta f_3)(t) = \alpha f_1 * f_2(t) + \beta f_1 * f_3(t)$. $\square$

Комутативността означава всъщност, че

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau,$$

което лесно се доказва след смяна на променливата $t - \tau = \theta$.

Да намерим образа на конволюцията $f_1 * f_2(t)$. Съгласно (33.8) при $t > 0$ имаме

$$\mathbf{L}\{f_1 * f_2(t)\} = \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-pt} dt.$$

Понеже

$$\int_t^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = 0,$$

последното може да се запише във вида

$$\mathbf{L}\{f_1 * f_2(t)\} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-pt} dt = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} f_2(t-\tau) e^{-p(t-\tau)} d\tau \right] dt$$

След смяна реда на интегриране получаваме

$$(33.9) \quad \mathbf{L}\{f_1 * f_2(t)\} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} f_2(t-\tau) e^{-p(t-\tau)} dt \right] d\tau = \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} \left[\int_0^\infty f_2(t-\tau) e^{-p(t-\tau)} dt \right] d\tau.$$

За интеграла в скобите след смяна на променливата $t - \tau = \theta$ получаваме

$$\int_0^\infty f_2(t-\tau) e^{-p(t-\tau)} dt = \int_{-\tau}^\infty f_2(\theta) e^{-p\theta} d\theta = \int_0^\infty f_2(\theta) e^{-p\theta} d\theta = \mathbf{L}\{f_2(t)\},$$

понеже

$$\int_{-\tau}^0 f_2(\theta) e^{-p\theta} d\theta = 0,$$

откъдето след заместване в (33.9) получаваме

$$\mathbf{L}\{f_1 * f_2(t)\} = \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} \mathbf{L}\{f_2(t)\} d\tau = \mathbf{L}\{f_2(t)\} \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau = \mathbf{L}\{f_2(t)\} \mathbf{L}\{f_1(t)\}.$$

По този начин доказахме следната **основна** за операционното смятане

Теорема 33.2 (Борел). Нека $f_1(t)$ и $f_2(t)$ са оригинали. Тогава образът на конволюцията $f_1 * f_2(t)$ е равен на произведението на образите на $f_1(t)$ и $f_2(t)$, т.е.

$$\mathbf{L}\{f_1 * f_2(t)\} = \mathbf{L}\{f_1(t)\}\mathbf{L}\{f_2(t)\}. \quad \square$$

Теоремата на Борел показва, че преобразованието на Лаплас превръща *операцията конволюция* между оригинали в *операцията умножение* на образи.

Например да намерим оригинала $f(t)$ по известен образ

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}.$$

Тук имаме

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Вече знаем, че

$$\cos t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2 + 1} \quad \text{и} \quad \sin t \Leftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1},$$

следователно от теоремата на Борел имаме

$$f(t) = \cos t * \sin t = \int_0^t \cos \tau \sin(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

Преобразуваме

$$\int_0^t \cos \tau \sin(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\sin t + \sin(t - 2\tau)] d\tau = \frac{1}{2} \left[\tau \sin t + \frac{1}{2} \cos(t - 2\tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

и намираме

$$f(t) = \frac{t \sin t}{2}, \quad t \geq 0.$$

Да намерим образа на функцията $f(t) = t$. Тази функция може да се разгледа като образувана от конволюцията на функцията на Хевисайд със себе си,

$$t = \eta * \eta(t) = \int_0^t \eta(\tau) \eta(t - \tau) d\tau = \int_0^t d\tau,$$

следователно

$$t \Leftrightarrow \frac{1}{p} \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}.$$

По същия начин функцията $\frac{t^2}{2}$ може да се разгледа като конволюцията на t с $\eta(t)$,

$$\frac{t^2}{2} = \int_0^t t\eta(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau d\tau,$$

следователно

$$\frac{t^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{p^2} \frac{1}{p} = \frac{1}{p^3}.$$

Продължавайки нататък получаваме, че

$$(33.10) \quad \frac{t^n}{n!} \Leftrightarrow \frac{1}{p^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

3. Диференциране и интегриране. Нека функцията $f(t)$ и нейната производна $f'(t)$ са оригинали и $f(t) \Leftrightarrow F(p)$. Тогава

$$\mathbf{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-pt}df(t) = e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)de^{-pt},$$

$$\mathbf{L}\{f'(t)\} = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt}f(t) - \lim_{t \rightarrow +0} e^{-pt}f(t) \right] + \int_0^\infty pe^{-pt}f(t)dt.$$

За всяко p с достатъчно голямо $\sigma = \operatorname{Re} p > \sigma(f)$ е изпълнено $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt}f(t) = 0$, а очевидно $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-pt}f(t) = f(+0)$, където $f(+0)$ е дясната граница на $f(t)$ при $t \rightarrow 0$, следователно

$$\mathbf{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(+0).$$

Понеже всичките оригинали предполагаме непрекъснати отлясно, последната формула приема вида

$$(33.11) \quad f'(t) \Leftrightarrow pF(p) - f(0).$$

Твърдение 33.2. Нека $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ са оригинали и $f(t) \Leftrightarrow F(p)$. Тогава за образа на $f^{(n)}(t)$ е в сила формулата

$$(33.12) \quad f^{(n)}(t) \Leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Доказателство. При $n = 1$ твърдението вече е доказано в (33.11). При $n = 2$, съгласно (33.10) имаме

$$\mathbf{L}\{f''(t)\} = p\mathbf{L}\{f'(t)\} - f'(0),$$

откъдето след заместване $\mathbf{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$ намираме

$$\mathbf{L}\{f''(t)\} = p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

продължавайки по същия начин установяваме верността за всяко естествено n . $\square$

Например да намерим образа на израза

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t),$$

ако $f(0) = 1$ и $f'(0) = 2$. Имаме

$$f(t) \Leftrightarrow F(p),$$

$$f'(t) \Leftrightarrow pF(p) - f(0) = pF(p) - 1,$$

$$f''(t) \Leftrightarrow p^2 F(p) - pf'(0) - f'(0) = p^2 F(p) - p - 2,$$

откъдето получаваме

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) \Leftrightarrow p^2 F(p) - p - 2 + 2(pF(p) - 1) + F(p),$$

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) \Leftrightarrow (p^2 + 2p + 1)F(p) - p - 4.$$

Ако $f(0) = f'(0) = \dots f^{(n-1)}(0) = 0$, то формулата (33.12) приема особено прост вид

$$f^{(n)}(t) \Leftrightarrow p^n F(p).$$

Следващото твърдение касае образа на интеграла.

Твърдение 33.3. Нека $f(t) \Leftrightarrow F(p)$. Тогава

$$(33.13) \quad \int_0^t f(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

Доказателство. Съгласно (33.11) имаме

$$\mathbf{L}\left\{\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right)'\right\} \Leftrightarrow p\mathbf{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} - \int_0^0 f(\tau) d\tau = p\mathbf{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}.$$

От друга страна $\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right)' = f(t)$, следователно

$$\mathbf{L}\{f(t)\} \Leftrightarrow p\mathbf{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = p\mathbf{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\},$$

което доказва твърдението. $\square$

Да намерим например оригинала $f(t)$ по известно изображение

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Имаме

$$e^t \Leftrightarrow \frac{1}{p-1}.$$

След интегриране получаваме

$$\int_0^t e^{\tau} d\tau = e^t - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{p(p-1)}.$$

След още едно интегриране намираме

$$\int_0^t (e^{\tau} - 1) d\tau = e^t - t - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{pp(p-1)}.$$

Нека $f(t) \Leftrightarrow F(p)$. Тогава от теорема 33.1 имаме, че при $\operatorname{Re} p > \sigma(f)$,

$$F^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} (-t)^n f(t) e^{-pt} dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

което веднага ни дава верността на

Твърдение 33.4. Нека $f(t) \Leftrightarrow F(p)$. Тогава

$$(33.14) \quad t^n f(t) \Leftrightarrow (-1)^n F^{(n)}(p), \quad n = 1, 2, \dots. \quad \square$$

Например

$$\sin t \Leftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1},$$

следователно

$$t^2 \sin t \Leftrightarrow (-1)^2 \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right)'' = \frac{6p^2 - 2}{(p^2 + 1)^3}.$$

Твърдение 33.5. Нека $f(t) \Leftrightarrow F(p)$ и функцията $\frac{f(t)}{t}$ е оригинал. Тогава

$$(33.15) \quad \frac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int_p^{\infty} F(s) ds,$$

когато интегралът е сходящ.

Доказателство. Имаме

$$\mathbf{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) \int_p^{\infty} e^{-st} ds dt = \int_p^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right] ds,$$

$$\mathbf{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_p^{\infty} F(s) ds. \quad \square$$

Например

$$\sin t \Leftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1},$$

следователно

$$\frac{\sin t}{t} \Leftrightarrow \int_p^\infty \frac{ds}{s^2 + 1} = \operatorname{arctg} s \Big|_p^\infty = \operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} p = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$$

Тук спестяваме дългите обяснения за характера на $\operatorname{arctg} p$, разглеждана като функция на комплексната променлива p .

Теорема 33.3 (интеграл на Дюамел). Нека $f_1(t)$ и $f_2(t)$, при което $f_1(t)$ е непрекъсната функция, а $f_2(t)$ има непрекъсната производна. Тогава е в сила следната формула

$$pF_1(p)F_2(p) \Leftrightarrow f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau,$$

където $F_1(p) \Leftrightarrow f_1(t)$ и $F_2(p) \Leftrightarrow f_2(t)$.

Доказателство. Съгласно теоремата на Борел имаме

$$F_1(p)F_2(p) \Leftrightarrow \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau,$$

откъдето по правилото за диференциране на оригинали намираме

$$pF_1(p)F_2(p) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) \frac{d}{dt} f_2(t-\tau)d\tau,$$

което доказва теоремата. $\square$

В последното доказателство използвахме правилото за диференциране на интеграла като функция на горната си граница, правилото за диференциране на съставна функция и недоказаното от нас правило за диференциране под знака на интеграла.

4. Намиране на оригинали по известни образи. Да припомним, че ако една функция $f(t)$ е оригинал, то по условие нейните евентуални прекъсвания са само от първи род, което означава, че $f(t)$ има във всяка точка t_0 едностранни граници $f(t_0 + 0)$ и $f(t_0 - 0)$. Функцията $f(t)$ ще наричаме **регулярна** в точката t_0 , когато функцията

$$(33.16) \quad \varphi(u) = \frac{f(t+u) + f(t-u) - f(t+0) - f(t-0)}{u}$$

е непрекъсната в някаква едностранна околност на нулата $[0, \delta]$ при някое достатъчно малко $\delta > 0$, и има дясна граница в нулата, т.е. съществува $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = \varphi(+0)$. Ако $f(t)$ е регулярна в точката t_0 , то $\varphi(u)$ може да се разглежда като непрекъсната в някаква едностранна околност на нулата $[0, \delta]$, $\delta > 0$. Както при доказателството на твърдение 11.1, може да се установи, че ако за някое $\delta > 0$ функцията $f(t)$ има непрекъсната производна в околностите $[t_0 - \delta, t_0)$ и $(t_0, t_0 + \delta]$, при което съществуват двете едностранни производни $f'_+(t_0)$ и $f'_-(t_0)$, то $f(t)$

е регулярна в точката t_0 . Да отбележим, че въпреки своята неугледност, това достатъчно условие за регулярност покрива на практика всичките основни приложения. Ако функцията $f(t)$ е гладка по части, то тя е регулярна във всяка точка.

Отначало ще докажем следната теорема

Теорема 33.3 (Мелин). Нека $f(t)$ е оригинал с показател за ръст $\hat{\sigma}$ и нека $f(t)$ е регулярна в точката t , а $F(p)$ е образът на $f(t)$. Тогава е в сила следната формула на Мелин

$$(33.17) \quad \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iN}^{\sigma_0 + iN} F(p) e^{pt} dp,$$

където σ_0 е кое да е реално число, за което $\sigma_0 > \hat{\sigma}$, а интегралът се взема по вертикалната отсечка в комплексната равнина $[\sigma_0 - iN, \sigma_0 + iN]$ (рис. 33.5).

Доказателство. По условие за някоя константа $M > 0$ е изпълнено $|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}$, $t \geq 0$. Да въведем помощната функция $g(t) = f(t) e^{-\sigma_0 t}$.

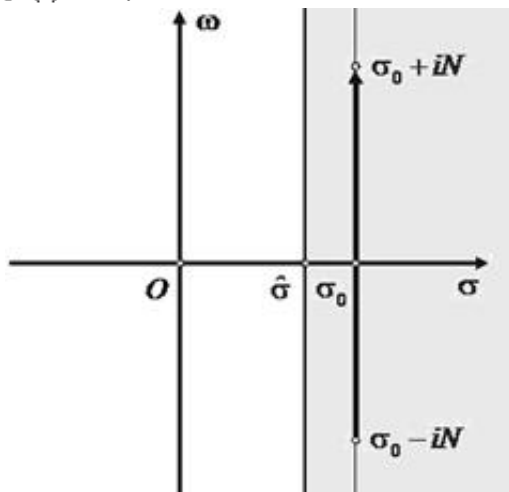


Рис. 33.5.

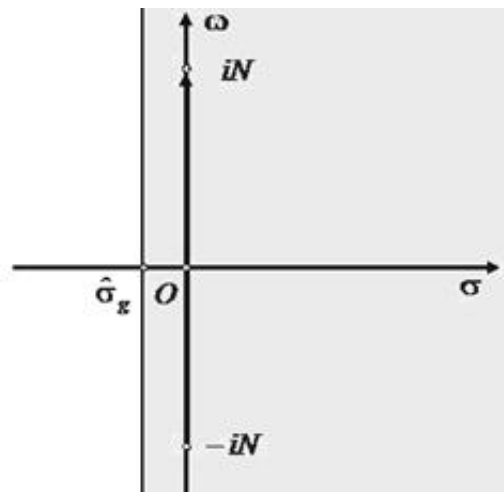


Рис. 33.6.

За $g(t)$ имаме неравенството $|g(t)| \leq M$, $t \geq 0$. Освен това лесно се проверява, че функцията $g(t)$ също е регулярна в точката t . За показателя за ръст $\hat{\sigma}_g$ на функцията $g(t)$ имаме $\hat{\sigma}_g < 0$, следователно в този случай в качеството на вертикална отсечка можем да избираме отсечка върху имагинерната ос $[-iN, iN]$ (рис. 33.6).

Ще докажем отначало формулата

$$(33.18) \quad \frac{g(t+0)+g(t-0)}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN}^{iN} G(p) e^{pt} dp,$$

където интегралът е по отсечката от имагинерната ос $[-iN, iN]$, а $G(p) = F(p + \sigma_0)$ е образът на $g(t)$. Преобразуваме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{iN}^{iN} G(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN}^{iN} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-p\xi} d\xi \right] e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN}^{iN} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-p(\xi-t)} d\xi \right] dp,$$

което след смяна реда на интегриране приема вида

$$(33.19) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{iN}^{iN} G(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(\xi) \int_{-iN}^{iN} e^{-p(\xi-t)} dp \right] d\xi.$$

Тук сме се възползвали от факта, че

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(\xi) e^{-p\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-p\xi} d\xi.$$

Отсечката $[-iN, iN]$ има параметрично представяне $p = i\omega$, $-N \leq \omega \leq N$, следователно за интеграла по p имаме

$$\begin{aligned} \int_{-iN}^{iN} e^{-p(\xi-t)} dp &= \int_{-N}^N e^{i\omega(t-\xi)} di\omega = \frac{1}{t-\xi} e^{i\omega(t-\xi)} \Big|_{-N}^N = \frac{1}{\xi-t} [e^{iN(t-\xi)} - e^{-iN(t-\xi)}] \\ \int_{-iN}^{iN} e^{-p(\xi-t)} dp &= \frac{2i}{\xi-t} \frac{e^{iN(t-\xi)} - e^{-iN(t-\xi)}}{2i} = 2i \frac{\sin N(t-\xi)}{t-\xi} = 2i \frac{\sin N(\xi-t)}{\xi-t}. \end{aligned}$$

След заместване в (33.19) получаваме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{iN}^{iN} G(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) 2i \frac{\sin N(\xi-t)}{\xi-t} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{\sin N(\xi-t)}{\xi-t} d\xi.$$

След смяна на променливата $\xi - t = \eta$ последното приема вида

$$(33.20) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{iN}^{iN} G(p) e^{pt} dp = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta+t) \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta.$$

Интегралът в дясната страна разделяме на два

$$(33.21) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta+t) \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\eta+t) \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 g(\eta+t) \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta.$$

След смяната $\eta \rightarrow -\eta$ за втория интеграл отдясно получаваме

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 g(\eta+t) \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\eta-t) \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta,$$

откъдето след заместване в (33.21) и (33.20) намираме

$$(33.22) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{iN}^{iN} G(p) e^{pt} dp = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [g(\eta+t) + g(\eta-t)] \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta.$$

При всяко $\delta > 0$, интеграла в дясната страна на (33.22) можем да разделим на два,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [g(\eta+t) + g(\eta-t)] \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [g(\eta+t) + g(\eta-t)] \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} [g(\eta+t) + g(\eta-t)] \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta \end{aligned}$$

при което съгласно теоремата на Риман-Лебег,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} [g(\eta+t) + g(\eta-t)] \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta = 0$$

Тук разсъждението е сходно с това при доказването на теоремата на Дирихле за поточкова сходимост на фурьеровите редове. Съпоставяйки последния факт с формулата (33.22) намираме, че

$$(33.23) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN}^{iN} G(p) e^{pt} dp = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [g(\eta+t) + g(\eta-t)] \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta,$$

когато поне една от двете граници съществува.

От друга страна за интеграла на Ойлер имаме

$$E = \int_0^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = \frac{\pi}{2}$$

откъдето намираме

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin N\eta}{N\eta} dN\eta = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{N\delta} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = \int_0^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = \frac{\pi}{2},$$

следователно

$$(33.24) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(t+0) + f(t-0)] \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta \right] = \frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)].$$

Сега от (33.23-24) получаваме формулата

$$\begin{aligned} (33.25) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN}^{iN} G(p) e^{pt} dp - \frac{f(t+0) - f(t-0)}{2} &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [g(\eta+t) + g(\eta-t) - f(t+0) - f(t-0)] \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{g(\eta+t) + g(\eta-t) - f(t+0) - f(t-0)}{\eta} \sin N\eta d\eta \end{aligned}$$

Функцията $g(t)$ е регулярна в точката t следователно съществува $\delta > 0$ достатъчно малко такава, че функцията

$$\frac{g(\eta+t) + g(\eta-t) - f(t+0) - f(t-0)}{\eta}$$

е непрекъсната в интервала $[0, \delta]$ и следователно съгласно теоремата на Риман-Лебег, интегралът в дясната страна на равенството (33.25) клони към нула при $N \rightarrow \infty$. По този начин доказахме верността на съотношението (33.19).

Връщайки се към функцията $f(t)$ получаваме

$$\frac{f(t+0)e^{-\sigma_0 t} + f(t-0)e^{-\sigma_0 t}}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN}^{iN} G(p) e^{pt} dp = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN}^{iN} F(p + \sigma_0) e^{pt} dp$$

Умножавайки двете страни на последното равенство с $e^{\sigma_0 t}$ намираме

$$\begin{aligned} \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN}^{iN} F(p + \sigma_0) e^{(p+\sigma_0)t} dp \\ \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN}^{iN} F(p + \sigma_0) e^{(p+\sigma_0)t} d(p + \sigma_0) \end{aligned}$$

което след смяната $p + \sigma_0 \rightarrow p$ преминава в съотношението (33.17),

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iN}^{\sigma_0 + iN} F(p) e^{pt} d(p + \sigma_0)$$

което искахме да докажем. $\square$

Интегралът в дясната страна на (33.17) понякога се записва във вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

и се нарича **обратно преобразование на Лаплас**.

Формулата на Мелин гарантира единственост на оригинала в определен смисъл. Нека оригиналите $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имат един и същ образ $F(p)$. Да разгледаме функциите

$$\varphi_1(t) = \int_0^t f_1(\tau) d\tau \quad \text{и} \quad \varphi_2(t) = \int_0^t f_2(\tau) d\tau$$

$$F(p)$$

Тези функции са непрекъснати навсякъде и имат един и същ образ $F(p)$. Да разгледаме още две помощни функции

$$\psi_1(t) = \int_0^t \varphi_1(\tau) d\tau \quad \text{и} \quad \psi_2(t) = \int_0^t \varphi_2(\tau) d\tau$$

Те вече имат непрекъснати производни и отново един и същ образ $\frac{F(p)}{p^2}$, следователно по теоремата на Мелин са тъждествено равни, $\psi_1(t) \equiv \psi_2(t)$. Оттук обаче съгласно правилото за диференциране на интеграла като функция на горната си граница имаме $\varphi_1(t) \equiv \psi_1'(t) \equiv \psi_2'(t) \equiv \varphi_2(t)$.

Функциите $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ можем да диференцираме по споменатото правило само в точките, където подинтегралните функции са непрекъснати. Следователно, ако $f_1(t)$ и $f_2(t)$ са непрекъснати едновременно в точката t , то $f_1(t) = \varphi_1'(t) = \varphi_2'(t) = f_2(t)$.

Сега отчитайки уговорката, която направихме в началото, че оригиналите нямат изкуствени прекъсвания и навсякъде $f(t) = f(t+0)$, получаваме

Теорема 33.4 (за единственост). Нека оригиналите $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имат един и същ образ $F(p)$. Тогава $f_1(t) \equiv f_2(t)$. $\square$

Теоремата за единственост красноречиво показва необходимостта за ефективни методи за възстановяване оригинала по известен образ. Както показват примерите с образи на основните функции – полиноми, експоненти и тригонометрични функции, образът в достатъчно много приложения представлява правилна рационална функция на комплексната променлива p ,

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

където $A(p)$ и $B(p)$ са полиноми, за които $\deg B(p) > \deg A(p)$. Функцията $F(p)$ в този случай има особени точки $p_1, p_2, \dots, p_n$, в нулите на знаменателя $B(p)$, при което всяка такава точка $p_k = \alpha_k + i\beta_k$ представлява полюс от ред равен (или по-малък) от кратността r_k на p_k като корен на $B(p)$. Такава функция може да се запише като сбор от елементарни дробни

$$(33.26) \quad F(p) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{r_k} \frac{c_{kj}}{(p - p_k)^j},$$

където c_{kj} са някакви комплексни константи. Тогава от правилата за съответствия между оригинали и образи следва, че оригиналът $f(t)$ представлява **квазиполином** във вида

$$(33.27) \quad f(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} \frac{t^{j-1} e^{p_k t}}{(j-1)!} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{r_k} \frac{c_{kj}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\alpha_k t} (\cos \beta_k t + i \sin \beta_k t),$$

който има показател за ръст $\hat{\sigma}(f) \leq \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Теоремата за единственост гарантира, че това е търсеният оригинал.

По този начин оригиналът може да се намери чрез формулата (33.27), ако е известно представянето във вид на елементарни дробни (33.26). Това представяне може да се определи по известни методи стига да познаваме корените заедно с кратностите на знаменателя $B(p)$.

Друга (по същество еквивалентна) възможност, която се основава на теоремата за резидуумите, предлага следната

Теорема 33.5 (теорема за възстановяване). Нека $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ е правилна рационална функция с полюси $p_1, p_2, \dots, p_n$, които представляват нулите на знаменателя $B(p)$. Тогава $F(p)$ представлява образ на някакъв непрекъснат оригинал, който може да се определи посредством следната **формула за възстановяване**

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} [F(p)e^{pt}] = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} \left[\frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \right].$$

Доказателство. Да положим $\sigma_* = \max\{\operatorname{Re} p_1, \operatorname{Re} p_2, \dots, \operatorname{Re} p_n\}$. Вече знаем, че търсеният оригинал $f(t)$ и има показател на ръст $\sigma(f) \leq \sigma_*$, следователно ако изберем едно $\sigma_0 > \sigma_*$, то всичките полюси на $F(p)$ лежат в полуравнината $\operatorname{Re} p < \sigma_0$ (рис. 33.7).

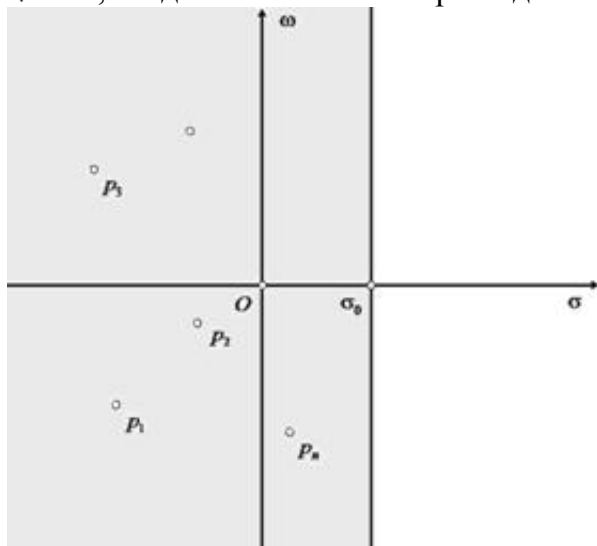


Рис. 33.7.

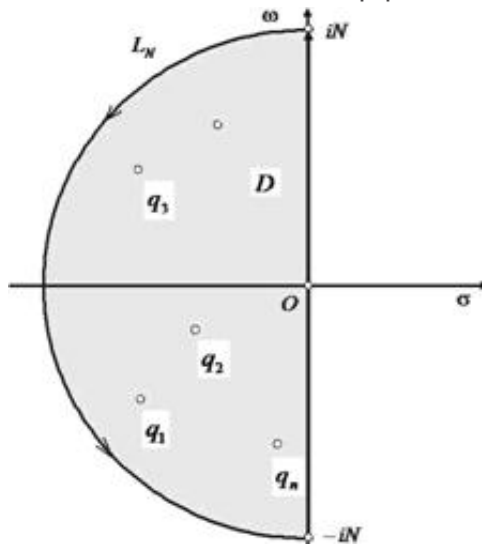


Рис. 33.8.

Тук можем да приложим формулата на Мелин, където интегрирането се извършва по вертикални отсечки $[\sigma_0 - iN, \sigma_0 + iN]$. По-лесно се явява обаче, както при доказателството на теоремата на Мелин, отначало да разгледаме отново помощната функция $g(t) = f(t)e^{-\sigma_0 t}$. За образа $G(p)$ на $g(t)$ имаме

$$G(p) = F(p + \sigma_0) = \frac{A(p + \sigma_0)}{B(p + \sigma_0)}$$

с полюси в точките $q_k = p_k - \sigma_0$, които са разположени в полуравнината $\operatorname{Re} p < 0$. По този начин ще използваме теоремата на Мелин, като интегрираме по вертикални отсечки от имагинерната ос $[-iN, iN]$. Нека $L_N: p = Ne^{i\tau}$, $\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{3\pi}{2}$, е положително ориентирана полуокръжност с център в нулата и радиус N (рис. 33.8) и нека D е областта с контур Γ , съставен от полуокръжността L_N и отсечката

$[-iN, iN]$. При всяко достатъчно голямо N , корените на знаменателя $B(p + \sigma_0)$, които са и полюсите на функцията $G(p)$, попадат изцяло в областта D , понеже техният брой е краен и всичките лежат в полуравнината $\operatorname{Re} p < 0$. Сега от теоремата за резидуумите намираме

$$(33.28) \quad \int_{\Gamma} G(p) e^{pt} dp = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k-\sigma_0} [G(p) e^{pt}] ,$$

където $G(p) = F(p + \sigma_0)$ е образът на функцията $g(t)$. Интегралът в (33.28) записваме като сбор

$$(33.29) \quad \int_{\Gamma} G(p) e^{pt} dp = \int_{L_N} G(p) e^{pt} dp + \int_{-iN}^{iN} G(p) e^{pt} dp .$$

Тук ще правим граничен преход при $N \rightarrow \infty$, като отначало ще докажем, че

$$(33.30) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{L_N} G(p) e^{pt} dp = 0 .$$

Да **фиксираме** едно $t > 0$. Понеже рационалната функция $G(p)$ е правилна, за всяко достатъчно голямо $N \geq N_0$ е в сила оценката

$$(33.31) \quad |G(p)| \leq \frac{M}{N^s}, \quad |p| = N ,$$

за някаква константа M , където $s = \deg B(p) - \deg A(p) \geq 1$. Полуокръжността L_N има параметрично представяне

$$L_N : p = N \cos \tau + iN \sin \tau, \quad \frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{3\pi}{2} ,$$

откъдето след заместване в интеграла от (33.30) намираме

$$\int_{L_N} G(p) e^{pt} dp = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} G(Ne^{i\tau}) e^{Nt \cos \tau + iNt \sin \tau} N i e^{i\tau} d\tau ,$$

което заедно с (33.31) дава оценката

$$(33.32) \quad \left| \int_{L_N} G(p) e^{pt} dp \right| = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} G(Ne^{i\tau}) e^{Nt \cos \tau + iNt \sin \tau} N i e^{i\tau} d\tau \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |G(Ne^{i\tau})| e^{Nt \cos \tau} N d\tau ,$$

$$\left| \int_{L_N} G(p) e^{pt} dp \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{M}{N^s} e^{Nt \cos \tau} N e^{i\tau} d\tau \leq \frac{M}{N^{s-1}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Nt \cos \tau} d\tau .$$

Сега ще направим оценка за интеграла

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{jM \cos \tau} d\tau = 0$$

За тази цел преобразуваме

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{jM \cos \tau} d\tau = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{jM \cos \tau} d\tau = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-jM \sin\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right)} d\tau = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-jM \sin \theta} d\theta$$

откъдето въз основа на неравенството

$$\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

получаваме

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{jM \cos \tau} d\tau \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2jM}{\pi} \theta} d\theta = 2 \frac{\pi}{2jM} [1 - e^{-jM}] \leq \frac{\pi}{M}$$

Оттук замествайки в (33.32) намираме оценката

$$\left| \int_{L_N} G(p) e^{pt} dp \right| \leq \frac{M}{N^{s-1}} \frac{\pi}{M} = \frac{\pi}{t N^s},$$

което доказва съотношението (33.30), понеже $s \geq 1$.

Граничният преход в (33.29) заедно с (33.28) дава

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-iN}^{iN} G(p) e^{pt} dp = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [G(p) e^{pt}]$$

откъдето въз основа на теоремата на Мелин, че

$$g(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iN}^{iN} G(p) e^{pt} dp$$

получаваме

$$g(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [G(p) e^{pt}]$$

което, съгласно определението на $g(t) = f(t) e^{-\sigma_0 t}$, приема вида

$$f(t)e^{-\sigma_0 t} = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k-\sigma_0} [F(p+\sigma_0)e^{pt}]$$

Оттук след умножение с $e^{\sigma_0 t}$ намираме

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k-\sigma_0} [F(p+\sigma_0)e^{t(p+\sigma_0)}],$$

от което след смяната $p+\sigma_0 \rightarrow p$ веднага получаваме търсената формула

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} [F(p)e^{pt}] \quad \square$$

Съгласно правилото за пресмятане на резидууми в полюси, формулата за възстановяване приема вида

$$(33.33) \quad f(t) = \sum_{k=1}^n \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{1}{(r_k - 1)!} \left[(p - p_k)^{r_k} \frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \right]^{(r_k-1)},$$

където r_k са кратностите на p_k , $k=1,2,\dots,n$. Ако знаменателят $B(p)$ има само прости корени, то те представляват прости полюси за $F(p)$. В този случай (33.33) се свежда до

$$(33.34) \quad f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Например да намерим оригинала $f(t)$ по известен образ

$$F(p) = \frac{1}{p(p^3+1)}.$$

Тук знаменателят $B(p) = p(p^3+1)$ има четири прости корена $p_0 = 0$ и

$$p_1 = -1, \quad p_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad p_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2},$$

които са корените на полинома p^3+1 , а $A(p)=1$. Имаме $B'(p)=4p^3+1$, следователно

$$B'(p_0)=4p_0^3+1=1, \quad B'(p_k)=4p_k^3+1=-4+1=-3, \quad k=1,2,3,$$

освен това

$$\begin{aligned} e^{p_0 t} &= 1, \quad e^{p_1 t} = e^{-t}, \\ e^{p_2 t} &= e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}t} = e^{\frac{1}{2}t} \left[\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + i \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right], \\ e^{p_3 t} &= e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}t} = e^{\frac{1}{2}t} \left[\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - i \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right]. \end{aligned}$$

Сега от формулата (33.34) намираме

$$f(t) = \frac{A(p_0)}{B'(p_0)} e^{p_0 t} + \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{A(p_3)}{B'(p_3)} e^{p_3 t},$$

$$f(t) = 1 - \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{\frac{1}{2}t} \left[\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + i \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right] + -\frac{1}{3} e^{\frac{1}{2}t} \left[\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - i \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right],$$

$$f(t) = 1 - \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t.$$

4. Решаване на диференциални уравнения и системи. Операционното смятане е органически пригодно за решаване на диференциални уравнения и системи с постоянни коефициенти. Да разгледаме уравнението с постоянни коефициенти

$$(33.35) \quad L[y] \equiv c_n y^{(n)} + c_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + c_1 y' + c_0 y = f(t),$$

при $t \geq 0$ с начални условия

$$(33.36) \quad y(0) = y_0^0, \quad y'(0) = y_0^1, \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{n-1}.$$

Тук се предполага, че функцията $f(t)$ изпълнява условията за оригинал. Тогава уравнението (33.35) с началните условия (33.36) може да се решава посредством операционен метод, който се състои в преобразуване по Лаплас на уравнението, намиране на образа на решението $Y(p)$ и възстановяване на решението по някой от разгледаните методи.

Уравнението се преобразува чрез формулите за производните. Имаме

$$\begin{aligned} f(t) &\Leftrightarrow F(p), \\ y(t) &\Leftrightarrow Y(p), \\ y'(t) &\Leftrightarrow pY(p) - y_0^0, \\ y''(t) &\Leftrightarrow p^2 Y(p) - py_0^0 - y_0^1, \\ y'''(t) &\Leftrightarrow p^3 Y(p) - p^2 y_0^0 - py_0^1 - y_0^2, \\ &\dots \\ y^{(n)}(t) &\Leftrightarrow p^n Y(p) - p^{n-1} y_0^0 - p^{n-2} y_0^1 - \dots - py_0^{n-2} - y_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Като заместим в уравнението намираме

$$Y(p)(c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p + c_0) - A(p) = F(p),$$

където $A(p)$ е някакъв полином. Полагайки

$$(33.37) \quad L(p) = c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p + c_0,$$

можем да препишем (33.37) във вида

$$Y(p)L(p) = F(p) + A(p),$$

откъдето за образа $Y(p)$ получаваме

$$(33.38) \quad Y(p) = \frac{F(p) + A(p)}{L(p)},$$

което открива възможност за възстановяване на търсения оригинал $y(t)$. Тук не е необходимо да се помнят никакви формули, а само принципът, по който се стига до решението.

Например да решим уравнението

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}(\cos t + t),$$

с начални условия $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. Тук

$$f(t) = e^{-t}(\cos t + t) = e^{-t} \cos t + e^{-t}t,$$

следователно

$$f(t) \Leftrightarrow \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Имаме

$$y(t) \Leftrightarrow Y(p),$$

$$y'(t) \Leftrightarrow pY(p) - 2,$$

$$y''(t) \Leftrightarrow p^2Y(p) - 2p - 2.$$

Заместваме,

$$Y(p)[p^2 + 2p + 1] = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + 2p + 6,$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)} + \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{2}{p+1} + \frac{4}{(p+1)^2}.$$

Чрез разлагане за оригинала на първото събираемо намираме

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2+1} \Leftrightarrow e^{-t} - e^{-t} \cos t.$$

За другите три събираеми имаме

$$\frac{1}{(p+1)^4} \Leftrightarrow e^{-t} \frac{t^3}{3!}, \quad \frac{2}{p+1} \Leftrightarrow 2e^{-t}, \quad \frac{4}{(p+1)^2} \Leftrightarrow 4te^{-t},$$

следователно

$$y(t) = e^{-t} - e^{-t} \cos t + \frac{t^3}{6}e^{-t} + 2e^{-t} + 4te^{-t}.$$

Да разгледаме уравнението (33.35) с нулеви начални условия,

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Тогава (33.38) приема вида

$$Y(p) = \frac{F(p)}{L(p)},$$

където $L(p)$ е полиномът от (33.37). В този случай, ако

$$(33.39) \quad \Phi(t) \Leftrightarrow \frac{1}{L(p)},$$

то имаме

$$y(t) \Leftrightarrow F(p) \frac{1}{L(p)}$$

и следвайки теоремата на Борел за образ на конволюция получаваме

$$y(t) = f * \Phi(t) = \int_0^t f(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) \Phi(\tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

Ако началните условия не са нулеви, то за решенето на (33.35) имаме

$$y(t) \Leftrightarrow [F(p) + A(p)] \frac{1}{L(p)} = F(p) \frac{1}{L(p)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k \frac{1}{L(p)},$$

където $A(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k$ е полиномът, породен от началните условия. Сега от правилата на операционното смятане, за решението получаваме

$$(33.40) \quad y(t) = \int_0^t f(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Phi^{(k)}(t).$$

Функцията $\Phi(t)$ от съответствието (13.39) се нарича **фундаментално решение** на уравнението (13.35), поради основната роля, която $\Phi(t)$ има при определяне на решението чрез формулата (13.40).

За фундаменталното решение, което очевидно има производни от всеки ред, може да се докаже, че удовлетворява условието $\Phi^{(k)}(0) = 0$, $0 \leq k \leq n-2$, следователно

$$\Phi^{(k)}(t) \Leftrightarrow p^k \frac{1}{L(p)}, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

поради което е и вярна формулата (33.40).

За илюстрация да решим уравнението

$$y'' + 2y' + 2y = e^t t$$

с начални условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Тук имаме

$$e^t t \Leftrightarrow F(p),$$

$$\begin{aligned}y(t) &\Leftrightarrow Y(p), \\y'(t) &\Leftrightarrow pY(p) - 1, \\y''(t) &\Leftrightarrow p^2Y(p) - p - 2.\end{aligned}$$

След заместване получаваме следната операционна форма на поставената задача

$$\begin{aligned}Y(p)[p^2 + 2p + 2] &= F(p) + p + 4, \\(33.41) \quad Y(p) &= F(p) \frac{1}{p^2 + 2p + 2} + p \frac{1}{p^2 + 2p + 2} + 4 \frac{1}{p^2 + 2p + 2}.\end{aligned}$$

Да намерим фундаменталното решение,

$$\Phi(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{1}{(p+1)^2 + 1},$$

$$\Phi(t) = e^{-t} \sin t.$$

Сега от (33.41) получаваме

$$y(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) d\tau + \left(e^{-t} \sin t\right)' + 4e^{-t} \sin t, \quad t \geq 0,$$

откъдето след пресмятане намираме

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{25} [e^{2t}(5t-4) + 29 \cos t + 78 \sin t].$$

Системите диференциални уравнения с постоянни коефициенти

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ &\dots\end{aligned}$$

$$(33.42) \quad \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t)$$

с начални условия $x_1(0) = b_1, x_2(0) = b_2, \dots, x_n(0) = b_n$ също могат да се решават със средствата на операционното смятане. Тук се предполага, че функциите $f_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, са непрекъснати и изпълняват условието на експоненциален ръст. Нека $X_k(p)$ са образите на търсените функции $x_k(t)$, а $F_k(p)$ са образите на $f_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогава системата приема следния операционен вид

$$\begin{aligned}pX_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + F_1(p) + b_1 \\ pX_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + F_2(p) + b_2 \\ &\dots\end{aligned}$$

$$(33.43) \quad pX_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n + F_n(p) + b_n$$

Да положим

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(p) = \begin{pmatrix} F_1(p) \\ F_2(p) \\ \vdots \\ F_n(p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогава (33.42) приема следната векторно матрична форма

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{b},$$

а (33.43) има формата

$$p\mathbf{X} = A\mathbf{X} + \mathbf{F}(p) + \mathbf{b},$$

$$(pE_n - A)\mathbf{X} = \mathbf{F}(p) + \mathbf{b},$$

което чрез обратна матрица може да се реши във вида

$$(33.44) \quad \mathbf{X} = (pE_n - A)^{-1}\mathbf{F}(p) + (p - A)^{-1}\mathbf{b}.$$

Нека $\Phi(t)$ е матрицата от оригиналите на $(pE_n - A)^{-1}$. Тогава от (33.44) и според познатите правила на операционното смятане, за оригинала $\mathbf{x}(t)$ получаваме

$$(33.45) \quad \mathbf{x}(t) = \Phi(t) * \mathbf{f}(t) + \Phi(t)\mathbf{b} = \Phi(t)\mathbf{b} + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau = \Phi(t)\mathbf{b} + \int_0^t \Phi(\tau)\mathbf{f}(t-\tau)d\tau.$$

Матрицата $\Phi(t)$ се нарича **фундаментална матрица** на системата линейни диференциални уравнения (33.43).

Например да разгледаме системата от две уравнения

$$\dot{x} = x - y + e^t$$

$$\dot{y} = -x + y + e^{-t}$$

с начални условия $x(0) = 1$ и $y(0) = -1$. В матричен вид системата изглежда по следния начин

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Тук

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad pE_2 - A = \begin{pmatrix} p-1 & 1 \\ 1 & p-1 \end{pmatrix}, \quad (pE_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{p-1}{p^2-2p} & \frac{-1}{p^2-2p} \\ \frac{-1}{p^2-2p} & \frac{p-1}{p^2-2p} \end{pmatrix},$$

а за фундаменталната матрица $\Phi(t)$ намираме

$$\Phi(t) = L^{-1} \left\{ (pE_2 - A)^{-1} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+e^{2t}) & \frac{1}{2}(1-e^{2t}) \\ \frac{1}{2}(1-e^{2t}) & \frac{1}{2}(1+e^{2t}) \end{pmatrix}.$$

Съгласно формулата (33.45) за решението получаваме

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+e^{2t}) & \frac{1}{2}(1-e^{2t}) \\ \frac{1}{2}(1-e^{2t}) & \frac{1}{2}(1+e^{2t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+e^{2\tau}) & \frac{1}{2}(1-e^{2\tau}) \\ \frac{1}{2}(1-e^{2\tau}) & \frac{1}{2}(1+e^{2\tau}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ e^{-\tau+\tau} \end{pmatrix} d\tau,$$

което след пресмятане дава

$$x(t) = \frac{1}{3}(-e^{-t} + 4e^{2t}) \quad \text{и} \quad y(t) = \frac{1}{3}(3e^t - 2e^{-t} - 4e^{2t}).$$

5. Обобщени функции. Операционното смятане разкрива естествена възможност за работа с така наречените обобщени функции. Безспорно най-популярната обобщена функция е **делта функцията** на Дирак $\delta(t)$. Това е функция, на която в операционното смятане съответства образ $F(p)=1$. Функцията $\delta(t)$ не е определена поточно в обичайния смисъл. Въпреки това в рамките на операционното смятане с нея може да се манипулира по сходен с традиционните функции начин. Например $\delta(t)$ може да се разглежда като **обобщена производна** на функцията на Хевисайд $\eta(t)$ над цялата числова ос, т.е. $\eta'(t) = \delta(t)$. Функцията $\delta(t)$ има ролята на единица и при конволюционното произведение, $\delta(t) * f(t) = f(t)$. Може да се определи и производната $\delta'(t)$ като оригинал на образа $F(p) = p$. Изобщо

$$\delta^{(n)}(t) \Leftrightarrow p^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Отместената делта функция $\delta(t-a)$ има образ e^{-ap} ,

$$\delta(t-a) \Leftrightarrow e^{-pa}, \quad a \geq 0,$$

и в конволюция действа по правилото

$$\delta(t-a) * f(t) = f(t-a).$$

Делта функцията може да се апроксимира (рис. 33.9) с редица от обикновени функции, например с функциите,

$$\varphi_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

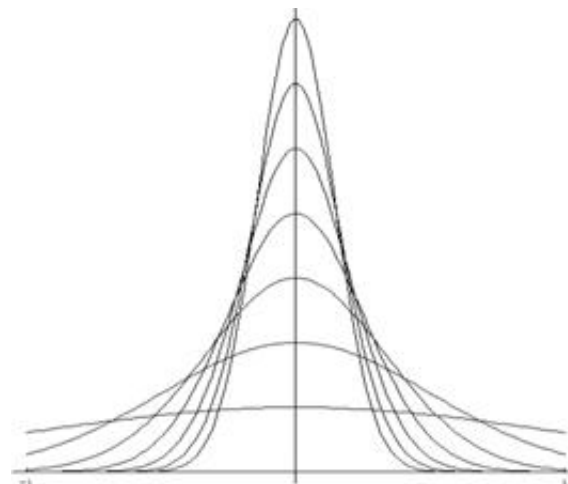


Рис. 33.9.

Площта под всяка крива е точно равна на единица, а всяка следваща е изтеглена повече по ординатната ос. В граничен план делта функцията се получава безкрайност в нулата и нула във всяка друга точка. Във физическите системи се наблюдават понякога явления със сходен характер.

Накрая ще приведем таблица, съдържаща основните правила и често използвани съответствия за преобразованието на Лаплас.

$f(t) (= f(t)\eta(t))$	$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$
$f'(t)$	$pF(p) - f(+0)$
$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
$f * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$	$F(p)G(p)$
$tf(t)$	$-F'(p)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a), a > 0$	$e^{-ap} F(p)$

$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$t^n, n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
$te^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p - \alpha)^2}$
$t^n e^{\alpha t}, n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$

6. Еднострaнно z -преобразовaние. В реалните физически системи преобразованието на Лаплас е метод за анализ на непрекъснати аналогови сигнали. Цифровата обработка на сигнали, която се налага в последно време борави с дискретни сигнали, които на практика представляват редици от числа, получени посредством сканиране на непрекъснатия сигнал през определение достатъчно малки по дължина

времени периоди, обикновено с равна дължина $T > 0$. По този начин един непрекъснат сигнал $f(t)$, определен за $t \geq 0$, се представя чрез редицата от стойности $f(nT)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, т.е. от редицата $f(0)$, $f(T)$, $f(2T)$, $f(3T)$, В такъв случай се говори за дискретизация на сигнала със стъпка T . Дискретизираният сигнал $f_d(t)$ се записва като

$$f_d(t) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT),$$

откъдето след прилагане преобразованието на Лаплас намираме

$$\mathbf{L}\{f_d\}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-npT},$$

което представлява степенен ред на $z = e^{pT}$ и чрез това полагане може да се запише

$$\mathbf{L}\{f_d\}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}.$$

Последното представлява едностранно z -преобразование на дискретизирания сигнал $\{f(nT)\}$ и дава основание за следното определение.

Определение 33.2. Едностранно z -преобразование на редицата $\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ се нарича функцията определена от реда

$$\mathbf{Z}\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n},$$

разглеждана като функция $X(z)$ на комплексната променлива z в областта на сходимост на този ред.

За удобство разглежданите редици ще считаме определени като нули при отрицателните индекси, $0 = x(-1) = x(-2) = \dots$, което съответства на вида на лапласовите оригинали.

Областта на сходимост на реда $X(z)$, когато не е празното множество, съдържа външност на кръг с достатъчно голям радиус.

Например ако $x(n) = \eta(n) = 1$, то

$$\mathbf{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1.$$

Тук $\eta(n)$ е единичната функция на z -преобразованието, определена като $\eta(n) = 1$ за всяко $n = 0, 1, 2, \dots$ (и по обща уговорка $\eta(-n) = 0$ за $n = 1, 2, 3, \dots$).

Ако $x(n) = a^n$, то

$$\mathbf{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

Ако $x(n) = a^n \cos n\omega$, $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$, то

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{e^{jn\omega} + e^{-jn\omega}}{2} z^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{j\omega})^n z^{-n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n z^{-n},$$

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ae^{j\omega} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega} z^{-1}},$$

$$X(z) = \frac{1 - a \cos \omega z^{-1}}{1 - 2a \cos \omega z^{-1} + a^2 z^{-2}}, \quad |z| > |a|.$$

Преобразованието има следните основни свойства.

Линейност. Образ на линейна комбинация е същата линейна комбинация от съответните образи.

Отместване. Нека $X(z) = \mathbf{Z}\{x(n)\}$. Тогава за всяко естествено $m = 1, 2, 3, \dots$ е изпълнено (случай на закъснение)

$$\mathbf{Z}\{x(n-m)\} = z^{-m} X(z),$$

а в случая на изпреварване

$$\mathbf{Z}\{x(n+m)\} = z^m X(z) - x(0)z^m - x(1)z^{m-1} - \dots - x(m-1)z.$$

Например

$$\mathbf{Z}\{x(n-1)\} = z^{-1} X(z) \text{ и } \mathbf{Z}\{x(n+1)\} = zX(z) - x(0)z.$$

Конволюция на редиците $\{x(n)\}$ и $\{y(n)\}$ наричаме редицата $\{\zeta(n)\}$, определена като

$$\zeta(n) = \sum_{k=0}^n x(k)y(n-k) = x(0)y(n) + x(1)y(n-1) + \dots + x(n-1)y(1) + x(n)y(0).$$

Едностранината конволюция притежава всичките характерни свойства на въведената преди конволюция.

Образ на конволюция. Образът на конволюция е равен на произведението от образите на двата множителя,

$$\mathbf{Z}\{\zeta(n)\} = \mathbf{Z}\{x(n)\}\mathbf{Z}\{y(n)\}.$$

Умножение с n . Нека $X(z) = \mathbf{Z}\{x(n)\}$. Тогава

$$\mathbf{Z}\{nx(n)\} = -z \frac{dX(z)}{dz}.$$

Например за редицата $\{x(n) = n\}$ имаме

$$\mathbf{Z}\{x(n)\} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}.$$

Начално и финално значение. От формулата

$$X(z) = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \dots,$$

непосредствено се вижда, че

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

Ако съществува $x(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$, то

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z).$$

Обратно z -преобразование $\mathbf{Z}^{-1}\{X(z)\} = \{x(n)\}$ означава, по дадена функция $X(z)$, да се намери редица $\{x(n)\}$, за която $X(z)$ представлява z -преобразование.

Теорема 33.6 (теорема за единственост). Нека функцията $X(z)$ е аналитична в областта $|z| > R$, за някое крайно R . Тогава съществува единствена редица $\{x(n)\}$, за която $X(z)$ представлява z -преобразование.

Доказателство. По условие имаме, че $X(z)$ се развива в ред на Лоран

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n},$$

чиито коефициенти представляват търсената редица. $\square$

Ако $X(z)$ има краен брой полюси $z_1, z_2, \dots, z_m$, то за самите коефициенти съгласно теоремата за резидуумите имаме

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z)z^{n-1}dz = \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=z_k} [X(z)z^{n-1}], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

където γ е положително ориентиран затворен контур около нулата, който лежи изцяло в областта на сходимост и включва всичките полюси.

Обръщането може да се извърши чрез разлагане в елементарни дроби. Нека например

$$X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}.$$

Тук търсим представяне във вида

$$X(z) = a + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-2}.$$

Константите a , b и c определяме по някой от известните методи и получаваме

$$X(z) = 1 - \frac{1}{z-1} + 4 \frac{1}{z-2},$$

което записваме в по-удобен вид

$$X(z) = 1 - \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + 4 \frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

откъдето намираме

$$x(n) = \delta(n) - n(n-1) + 4 \cdot 2^{n-1} n(n-1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. $x(0) = 1$, $x(1) = 3$, $x(2) = 7$, $x(3) = 15$ и т.н.

В последната формула $\delta(n)$ означава **делта функцията** на z -преобразованието, която се определя като $\delta(0)=1$ и $\delta(n)=0$ за $n=1,2,3,\dots$. Така определената делта функция представлява **единицата** за конволюционното умножение.

Ако например

$$X(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{z + 1}{(z - 1)(z - 2)},$$

то чрез познатото разлагане намираме

$$X(z) = -2 \frac{1}{z - 1} + 3 \frac{1}{z - 2} = -2 \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} + 3 \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1}},$$

следователно

$$x(n) = -2\eta(n-1) + 3 \cdot 2^{n-1} \eta(n-1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. $x(0)=0$, $x(1)=1$, $x(2)=4$, $x(3)=10$ и т.н.

Нека например

$$X(z) = \frac{z^{-1} + z^{-3}}{(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})^2} = \frac{z^2 + 1}{(z + 1)(z - 1)^2}.$$

След разлагане в елементарни дробни получаваме

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{(z - 1)^2},$$

което записваме във вид, удобен за обръщане

$$X(z) = \frac{1}{2} z^{-1} \frac{1}{1 + z^{-1}} + \frac{1}{2} z^{-1} \frac{1}{1 - z^{-1}} + z^{-1} \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2},$$

откъдето намираме

$$x(n) = \frac{1}{2} (-1)^{n-1} \eta(n-1) + \frac{1}{2} \eta(n-1) + (n-1) \eta(n-1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е.

$$x(0) = 0 \text{ и } x(n) = \frac{1}{2} (-1)^{n-1} + \frac{1}{2} + (n-1) \text{ за } n = 1, 2, 3, \dots$$

За първите няколко члена намираме $x(0)=0$, $x(1)=1$, $x(2)=1$, $x(3)=3$, $x(4)=3$ и т.н.

Следващата таблица съдържа основните правила и често използвани съответствия за едностранно z -преобразоване.

$\{x(n)\}_{n=0}^{\infty}$	$X(z) = \mathbf{Z}\{x(n)\}$
$\{x(n-m)\}, m = 1, 2, \dots$	$z^{-m} X(z)$

$\{x(n+m)\}, m=1,2,\dots$	$z^m X(z) - x(0)z^m - x(1)z^{m-1} - \dots - x(m-1)z$
$\{nx(n)\}$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$
$\{a^n x(n)\}, a \neq 0$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
$\eta(n) = \{1,1,1,\dots\}$	$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$
$\eta(n-m), m=1,2,3,\dots$	$\frac{1}{z^{m-1}(z-1)} = \frac{z^{-m}}{1-z^{-1}}$
$\delta(n) = \{1,0,0,\dots\}$	1
$\delta(n-m) = \{1,0,0,\dots\}$	$\frac{1}{z^m} = z^{-m}$
$a^n, a \neq 0$	$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$
$na^n, a \neq 0$	$\frac{az}{(z-a)^2} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
$n^2 a^n, a \neq 0$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3} = \frac{az^{-2}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{z^{-2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
$\sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} = \frac{z^{-1} \sin \omega}{1 - 2z^{-1} \cos \omega + z^{-2}}$
$\cos \omega n$	$\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} = \frac{1 - z^{-1} \cos \omega}{1 - 2z^{-1} \cos \omega + z^{-2}}$
$a^n \sin \omega n$	$\frac{za \sin \omega}{z^2 - 2za \cos \omega + a^2} = \frac{z^{-1} a \sin \omega}{1 - 2z^{-1} a \cos \omega + a^2 z^{-2}}$

$$a^n \cos n\varpi$$

$$\frac{z(z - a \cos \varpi)}{z^2 - 2za \cos \varpi + a^2} = \frac{1 - z^{-1}a \cos \varpi}{1 - 2z^{-1}a \cos \varpi + a^2 z^{-2}}$$

*handbook – lap – 403

*handbook – z – 479

*handbook – four – 115