Записки от лекциите по
„Математически методи в инженерните изследвания“
за специалност „Транспортна техника“
ОКС „Магистър“

ОПЕРАЦИОННО СМЯТАНЕ

от доц. д-р Румен Улучев

§1. ТРАНСФОРМАЦИЯ НА ЛАПЛАС

Операционното смятане е математически апарат, основаващ се на трансформацията на Лаплас, с който могат да бъдат решавани много теоретични и приложни задачи от областите на математиката, електротехниката, механиката и др. В настоящата глава ще изложим основите на този метод и ще представим някои негови приложения.

Определение. *Оригинал* ще наричаме всяка функция $f(t)$ на една реална променлива t, удовлетворяваща условията:

(i) $f(t)$ е еднозначна, начасти непрекъсната заедно с производните си до n-ти ред включително функция в $(-\infty, \infty)$;

(ii) $f(t) = 0$ за всяко $t < 0$;

(iii) $f(t)$ е или ограничена, или расте неограничено при $t \to \infty$, но не по-бързо от експоненциална функция, т. е. съществуват числа $M > 0$ и $\sigma > 0$, такива че $|f(t)| < Me^{\sigma t}$, $t > 0$.

Определение. *Образ* на функция-оригинал $f(t)$ ще наричаме функцията $F(p)$, дефинирана с интеграла на Лаплас

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt \ ,$$

където променливата p в общия случай е комплексна, като $p = \sigma + i\tau$, т. е. $\sigma = \operatorname{Re} p$ и $\tau = \operatorname{Im} p$.

Операцията, при която на оригинала $f(t)$ съпоставяме функция $F(p)$, се нарича *трансформация на Лаплас* и се означава по следния начин: $f(t) \longmapsto F(p)$. Използват се и означенията $F(p) = \bar{f}(t)$, $F(p) = L[f(t)]$, където L е операторът на Лаплас, извършващ съответствието между оригинала и образа.

В следващите няколко примера ще намерим образите на някои елементарни функции, като винаги ще считаме $f(t) = 0$ за $t < 0$ съгласно условието (ii).

Пример 1.1. $f(t) = 1$. Имаме

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-pt}\,dt = -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{p}\,e^{-pt}\Big|_0^x =$$
$$= -\frac{1}{p}\Big(\lim_{x\to\infty} e^{-px} - e^0\Big) = -\frac{1}{p}(0-1) = \frac{1}{p}\ ,$$

т. е. $1 \longmapsto \dfrac{1}{p}$, или $L[1] = \dfrac{1}{p}$. $\square$

Пример 1.2. Нека $f(t) = e^{\alpha t}$. Тогава

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}e^{\alpha t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}\,dt = \frac{1}{p-\alpha}\ .$$

Следователно $e^{\alpha t} \longmapsto \dfrac{1}{p-\alpha}$. $\square$

Пример 1.3. Нека $f(t) = t^n$. С n-кратно последователно интегриране по части получаваме:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}t^n\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-pt}t^n\,dt = -\frac{1}{p}\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^n\,de^{-pt} =$$
$$= -\frac{1}{p}\lim_{x\to\infty}\Big(e^{-pt}t^n\Big|_0^x - \int_0^x e^{-pt}\,dt^n\Big) =$$
$$= -\frac{1}{p}\lim_{x\to\infty}\Big(e^{-px}x^n - e^0\,0^n - n\int_0^x e^{-pt}t^{n-1}\,dt\Big) =$$
$$= \frac{n}{p}\int_0^x e^{-pt}t^{n-1}\,dt = \cdots = \frac{n(n-1)}{p^2}\int_0^x e^{-pt}t^{n-2}\,dt = \cdots =$$
$$= \frac{n!}{p^{n+1}}\ .$$

Следователно $t^n \longmapsto \dfrac{n!}{t^{n+1}}$. $\square$

Пример 1.4. Образът на функцията $f(t) = t^a$, където $a > -1$, се изразява чрез *гама-функцията*

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1}\, dt \ .$$

Тази функция има не малко приложения в теорията на вероятностите, комплексния анализ и др. Някои от най-интересните свойства на гама-функцията са:

1) $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$;
2) $\Gamma(n+1) = n!$ при естествено n;
3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Ще изведем формулата за образа на $f(t) = t^a$ при $p > 0$, като пак ще направим уточнението, че тя е в сила и за произволно комплексно число p. Имаме

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^a\, dt = \int_0^\infty e^{-\tau} \left(\frac{\tau}{p}\right)^a \frac{1}{p}\, d\tau = \frac{1}{p^{a+1}} \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^a\, d\tau = \\ = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \ .$$

Следователно $t^a \longmapsto \dfrac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$. □

§2. ОСНОВНИ СВОЙСТВА НА ТРАНСФОРМАЦИЯТА НА ЛАПЛАС

1. Линейност.

Нека $F_1(p), F_2(p), \ldots, F_n(p)$ са образи съответно на функциите $f_1(t)$, $f_2(t), \ldots, f_n(t)$ при трансформацията на Лаплас, т. е.

$$L[f_k(t)] = F_k(p) \ , \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

и $C_1, C_2, \ldots, C_n$ са константи. Тогава от линейните свойства на интеграла веднага следва свойството

$$L[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \cdots + C_n f_n(t)] = C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p) + \cdots + C_n F_n(p) \ .$$

Пример 2.1. Да се намерят образите на хиперболичния синус и на хиперболичния косинус при трансформацията на Лаплас. Тъй като

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}\, e^t - \frac{1}{2}\, e^{-t} \ ,$$

от формулата изведена в Пример 1.2 получаваме

$$L[\operatorname{sh} t] = L\Big[\frac{1}{2}\, e^t - \frac{1}{2}\, e^{-t}\Big] = \frac{1}{2}\, L[e^t] - \frac{1}{2}\, L[e^{-t}] = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\Big) = \frac{1}{p^2-1} \ ,$$

или $\operatorname{sh} t \longmapsto \dfrac{1}{p^2-1}$.

Аналогично,

$$L[\operatorname{ch} t] = L\Big[\frac{1}{2}\, e^t + \frac{1}{2}\, e^{-t}\Big] = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\Big) = \frac{p}{p^2-1} \ ,$$

т. е. $\operatorname{ch} t \longmapsto \dfrac{p}{p^2-1}$. □

Пример 2.2. Да се намерят образите на $\sin t$ и $\cos t$. Тук ще използваме представянията

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \qquad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2},$$

и Пример 1.2 за комплексни стойности на параметъра $\alpha = i$ и $\alpha = -i$. Имаме

$$L[\sin t] = L\Big[\frac{1}{2i}\, e^{it} - \frac{1}{2i}\, e^{-it}\Big] = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\Big) = \frac{1}{p^2+1} \ ,$$

или $\sin t \longmapsto \dfrac{1}{p^2+1}$.

Аналогично получаваме $\cos t \longmapsto \dfrac{p}{p^2+1}$. □

2. Подобие.

Нека $L[f(t)] = F(p)$ и $\alpha > 0$. Тогава

$$L[f(\alpha t)] = \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt}\, dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\alpha t) e^{-(p/\alpha)\alpha t}\, d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha}\, F\Big(\frac{p}{\alpha}\Big) \ ,$$

т. е.

$$f(\alpha t) \longmapsto \frac{1}{\alpha}\, F\Big(\frac{p}{\alpha}\Big) \ .$$

За $\alpha < 0$ процедираме по същия начин. Така изведеното свойство се нарича *свойство за подобието.* Ще отбележим, че то е валидно и за комлексно α.

Пример 2.3. Да се намери образът на функцията $f(t) = \cos^2 \alpha t$.

Ще използваме тригонометричната формула $\cos^2 \alpha t = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha t)$, Пример 2.2 и свойствата линейност и подобие:

$$L[\cos^2 \alpha t] = \frac{1}{2}\big(L[1]+L[\cos 2\alpha t]\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2\alpha}\cdot\frac{p}{\left(\frac{p}{2\alpha}\right)^2+1}\right) = \frac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}\ ,$$

или $\cos^2 \alpha t \longmapsto \dfrac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$. □

3. Образ на производна.

Нека $f(t)$ е функция-оригинал, $f(t) \longmapsto F(p)$ и $\varphi(t) = f'(t)$. Тогава

$$\begin{aligned}
L[\varphi(t)] &= \int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-pt}\,df(t) = \\
&= \big(e^{-pt} f(t)\big)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\,de^{-pt} = \\
&= \lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) - f(0) + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \\
&= p\,L[f(t)] + \lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) - f(0)\ .
\end{aligned}$$

Тъй като оригиналът $f(t)$ расте не по-бързо от експоненциална функция при $t \to \infty$, за p достатъчно голямо (или p с достатъчно голяма реална част, в случай, че е комплексно) ще имаме

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) = 0\ ,$$

откъдето следва

$$L[\varphi(t)] = p\,L[f(t)] - f(0)\ , \qquad \text{т. е.} \qquad f'(t) \longmapsto pF(p) - f(0)\ .$$

След последователно n-кратно интегриране по части лесно се стига до по-общата формула за образ на n-та производна:

$$f^{(n)}(t) \longmapsto p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\ .$$

Пример 2.4. Да се намери образът на $z(t) = y''(t) + 4y'(t) - 3y(t)$ при условията $y(0) = 2$ и $y'(0) = -5$ чрез образа $Y(p)$ на $y(t)$.

Съгласно изведената формула,

$$
\begin{aligned}
&L[y(t)] = Y(p) \ , \\
&L[y'(t)] = pY(p) - 2 \ , \\
&L[y''(t)] = p^2 Y(p) - 2p + 5 \ ,
\end{aligned}
$$

откъдето

$$L[z(t)] = p^2 Y(p) - 2p + 5 + 4(pY(p) - 2) - 3Y(p) = (p^2 + 4p - 3)Y(p) - 2p - 3 \ ,$$

т. е. $z(t) \longmapsto (p^2 + 4p - 3)Y(p) - 2p - 3$. $\square$

4. Образ на интеграл.

Нека $f(t)$ е функция-оригинал, $|f(t)| < Me^{\sigma t}$ за $t > 0$ и $f(t) \longmapsto F(p)$. Да разгледаме функцията, определена чрез интеграл от f по следния начин:

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau \ .$$

От неравенството

$$|\varphi(t)| = \Big| \int_0^t f(\tau)\, d\tau \Big| \leq \int_0^t |f(\tau)|\, d\tau < \int_0^t Me^{\sigma\tau}\, d\tau = \frac{M}{\sigma}(e^{\sigma t} - 1) < \frac{M}{\sigma}\, e^{\sigma t}$$

следва, че $\varphi(t)$ също е функция-оригинал. Да приложим правилото за диференциране на образа за функцията $\varphi(t)$. Ако $\varphi(t) \longmapsto \Phi(p)$, предвид $\varphi(0) = 0$, ще получим

$$L[\varphi'(t)] = p\Phi(p) \ .$$

Тъй като $\varphi'(t) = f(t)$, то

$$F(p) = L[f(t)] = p\Phi(p)$$

и следователно

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p} \ , \qquad \text{т. е.} \qquad \int_0^t f(t)\, dt \longmapsto \frac{F(p)}{p} \ .$$

§3. δ-ФУНКЦИЯ НА ДИРАК И ЕДИНИЧНА ФУНКЦИЯ НА ХЕВИСАЙД

За някои практически задачи и теоретични изследвания е необходим математически апарат, моделиращ процеси при които стойността на даден параметър нараства мигновено и след това отново бързо намалява. Става дума за т. нар. импулсни процеси, каквито срещаме в електротехниката, механиката, физиката и др. Функцията с която ще изразяваме математически един импулс в най-общ вид е дефинирана и изследвана от Дирак.

И така, за достатъчно малки положителни ε да въведем следната функция

$$\delta(t,\varepsilon)=\begin{cases}0\ , & t\in(-\infty,0]\\ \dfrac{1}{\varepsilon}\ , & t\in(0,\varepsilon)\\ 0\ , & t\in[\varepsilon,\infty)\end{cases}\ .$$

Да направим граничен преход, като пуснем ε да клони към 0. Получената функция ще има стойност 0 навсякъде без точката $t=0$, където граничната функция ще приема безкрайно голяма стойност. Именно функцията

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(t,\varepsilon)$$

се нарича δ-*функция* на Дирак или още *импулсна функция*. Ето едно нейно свойство. От равенството

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t,\varepsilon)\,dt=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_{0}^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\,dt+\int_{\varepsilon}^{\infty}0\,dt=0+1+0=1\ ,$$

в сила за всяко $\varepsilon>0$, след граничен преход при $\varepsilon\to 0$ непосредствено следва

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1\ .$$

Успоредно с функцията на Дирак да разгледаме още една функция:

$$\chi(t,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau,\varepsilon)\,d\tau\ .$$

Лесно може да се провери, че тя приема стойности както следва:

$$\chi(t,\varepsilon)=\begin{cases}0\ , & t\in(-\infty,0]\\ \dfrac{t}{\varepsilon}\ , & t\in(0,\varepsilon)\\ 1\ , & t\in[\varepsilon,\infty)\end{cases}\ .$$

При $\varepsilon \to 0$ получаваме *единичната функция на Хевисайд*

$$\chi(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \chi(t, \varepsilon) = \begin{cases} 0 \ , & t \in (-\infty, 0) \\ 1 \ , & t \in [0, \infty) \end{cases} \quad .$$

Ще отбележим, че в примерите по-горе ние намирахме образа не точно на функция $f(t)$, а на произведението $f(t)\,\chi(t)$. Припомняме, че за удобство се условихме да разглеждаме оригинала само при $t > 0$, където е в сила тъждеството $f(t) = f(t)\,\chi(t)$. Така в Пример 1.1 всъщност намерихме образа на единичната функция на Хевисайд: $\chi(t) \longmapsto \dfrac{1}{p}$.

Образът на δ-функцията при трансформацията на Лаплас можем да намерим с граничен преход при $\varepsilon \to 0$ върху образа на $\delta(t, \varepsilon)$. Да обърнем внимание на следната връзка между функциите $\delta(t, \varepsilon)$ и $\chi(t, \varepsilon)$:

$$\delta(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \big(\chi(t) - \chi(t - \varepsilon) \big) \ .$$

Тогава

$$L[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon \to 0} L[\delta(t, \varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \to 0} L\Big[\frac{1}{\varepsilon} \big(\chi(t) - \chi(t - \varepsilon) \big) \Big] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \big(L[\chi(t)] - L[\chi(t - \varepsilon)] \big) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{-\varepsilon p}}{\varepsilon p} = 1 \ ,$$

т. е. $\delta(t) \longmapsto 1$.

§4. ТЕОРЕМИ ЗА ЗАКЪСНЕНИЕТО, ПРЕМЕСТВАНЕТО И СВИВАНЕТО

Нека $f(t)$ е функция-оригинал и за фиксирано $t_0 > 0$ да разгледаме функцията

$$g(t) = \begin{cases} 0 \ , & t < t_0 \\ f(t - t_0) \ , & t > t_0 \end{cases} \quad .$$

Лесно се съобразява, че графиката на $g(t)$ е отместената с t_0 надясно графика на $f(t)$. Ако на графиките на $f(t)$ и $g(t)$ гледаме като на сигнали и променливата t е времето, това означава, че сигналът g е всъщност сигналът f, закъснял във времето с интервал от време t_0. Оттук и наименованието на следващата теорема – *теорема за закъснението*.

Теорема 4.1. *Нека $f(t) \longmapsto F(p)$ и $t > t_0$. Тогава за функцията $g(t)$, определена по-горе, е в сила*

$$g(t) \longmapsto e^{-pt_0} F(p) \ .$$

Доказателство. Имаме

$$\begin{aligned} G(p) = \int_0^\infty e^{-pt} g(t)\, dt = \int_0^{t_0} e^{-pt} g(t)\, dt + \int_{t_0}^\infty e^{-pt} g(t)\, dt = \\ = 0 + \int_{t_0}^\infty e^{-pt} f(t-t_0)\, dt = \int_{t_0}^\infty e^{-p(\tau+t_0)} f(\tau)\, d\tau = \\ = e^{-pt_0} \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)\, d\tau = e^{-pt_0} F(p) \ , \end{aligned}$$

което доказва теоремата. □

Прилагайки правилото за подобие и теоремата за закъснението получаваме като следствие

$$f(\alpha t - t_0) = f\big(\alpha(t - t_0/\alpha)\big) \longmapsto \frac{e^{(t_0/\alpha)p}}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha}) \ .$$

Директно от тази формула извеждаме

$$\begin{aligned} \sin(at+b) &\longmapsto e^{(b/a)p} \frac{a}{p^2+a^2} \ , \\ \mathrm{sh}(at+b) &\longmapsto e^{(b/a)p} \frac{a}{p^2-a^2} \ , \\ (\alpha t - \beta)^a &\longmapsto \frac{\alpha^a \Gamma(a+1)}{p^{a+1}} e^{-(b/a)p} \end{aligned}$$

и др.

Следващата теорема е известна като *теорема за преместването.*

Теорема 4.2. *Нека $f(t) \longmapsto F(p)$, p_0 е в общия случай комплексна константа и $g(t) = e^{-p_0 t} f(t)$. Тогава*

$$g(t) \longmapsto F(p + p_0) \ .$$

Доказателство.

$$G(p) = \int_0^\infty e^{-pt} e^{-p_0 t} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(p+p_0)t} f(t)\, dt = F(p+p_0) \ . \qquad \square$$

Да припомним, че комплексните числа геометрически могат да се представят с радиус-вектори в комплексната равнина. Така умножавайки функцията-оригинал с $e^{-p_0 t}$, всъщност извършваме преместване в комплексната равнина, където се мени p, по направление на вектора p_0.

Непосредствено получаваме образите:

$$e^{-at}\cos bt \longmapsto \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}\ , \qquad t^a e^{bt} \longmapsto \frac{\Gamma(a+1)}{(p-b)^{a+1}}$$

и др.

Нека сега са дадени оригиналите $f(t)$ и $g(t)$. Да разгледаме функцията

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\ .$$

Операцията, с която получихме $h(t)$, се нарича *свиване* или още *конволюция* на функциите $f(t)$ и $g(t)$. Ще отбележим, че свиване на два оригинала е също функция-оригинал. И още едно свойство: със смяна на променливата в интеграла лесно се вижда, че

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\ .$$

Теорема 4.3 (Борел). ***Нека** $h(t)$ **е конволюция на функциите** $f(t)$ **и** $g(t)$, **като** $f(t) \longmapsto F(p)$ **и** $g(t) \longmapsto G(p)$. **Тогава***

$$h(t) \longmapsto F(p)G(p)\ .$$

Доказателство. Да приложим трансформацията на Лаплас към функцията $h(t)$:

$$H(t) = \int_0^\infty e^{-pt}\Big(\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\Big)dt\ .$$

Сменяме реда на интегрирането в двойния интеграл, като $0 \le \tau < \infty$, $\tau \le t < \infty$:

$$H(t) = \int_0^\infty \Big(\int_\tau^\infty e^{-pt}f(t-\tau)g(\tau)\,dt\Big)d\tau$$

и след смяната $\theta = t - \tau$ получаваме

$$H(t) = \int_0^\infty e^{-p\theta}f(\theta)\,d\theta \int_0^\infty e^{-p\tau}g(\tau)\,d\tau = F(p)G(p)\ . \qquad \square$$

Поради вида на образа на конволюцията, тази теорема се нарича още и *теорема за умножаване на образи.*

§5. ТАБЛИЦА С ОСНОВНИТЕ ТРАНСФОРМАЦИИ НА ЛАПЛАС

В примерите дотук намерихме образите на някои функции. Сега ще дадем един по-пълен списък от формули, които могат да бъдат от полза при операционни изчисления.

Оригинал	$\longmapsto$	Образ
$\chi(t)$	$\longmapsto$	$\dfrac{1}{p}$
e^{at}	$\longmapsto$	$\dfrac{1}{p-a}$
t^n	$\longmapsto$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
t^a	$\longmapsto$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}\ ,\ a > -1$

Оригинал		Образ
$\sin at$	$\longmapsto$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$
$\cos at$	$\longmapsto$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$
$\operatorname{sh} at$	$\longmapsto$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
$\operatorname{ch} at$	$\longmapsto$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$
$\sin(at+b)$	$\longmapsto$	$e^{(b/a)p}\,\dfrac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(at+b)$	$\longmapsto$	$e^{(b/a)p}\,\dfrac{p}{p^2+a^2}$
$\operatorname{sh}(at+b)$	$\longmapsto$	$e^{(b/a)p}\,\dfrac{a}{p^2-a^2}$
$\operatorname{ch}(at+b)$	$\longmapsto$	$e^{(b/a)p}\,\dfrac{p}{p^2-a^2}$
$e^{-at}\sin bt$	$\longmapsto$	$\dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$
$e^{-at}\cos bt$	$\longmapsto$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
$e^{-at}\operatorname{sh} bt$	$\longmapsto$	$\dfrac{b}{(p+a)^2-b^2}$
$e^{-at}\operatorname{ch} bt$	$\longmapsto$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
$\delta(t)$	$\longmapsto$	1
$\delta^{(n)}(t)$	$\longmapsto$	p^n
$\delta(t-t_0)$	$\longmapsto$	e^{-pt_0}
$\delta^{(n)}(t-t^0)$	$\longmapsto$	$p^n e^{-pt_0}$

§6. НАМИРАНЕ НА ОРИГИНАЛА ОТ НЕГОВИЯ ОБРАЗ

1. Формула на Риман-Мелин.

Преобразование, при което от образ намираме функция-оригинал, се нарича *обратна трансформация на Лаплас*. Ще дадем една формула за намиране на оригинала от неговия образ, която използва интегриране върху контур (права) в комплексната равнина.

Теорема 6.1. *Нека $f(t) \longmapsto F(p)$ и за всеки краен интервал функцията-оригинал $f(t)$ удовлетворява условията:*

(i) $f(t)$ е непрекъсната или начасти непрекъсната;

(ii) $f(t)$ има краен брой екстремуми, т. е. интервалът може да бъде разделен на краен брой подинтервали, във всеки от които $f(t)$ е монотонна.

Да предположим, че интегралът $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$ е сходящ за всяко p от правата $\gamma : \mathrm{Re}\, p = s$ в комплексната равнина. Тогава

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{pt}F(p)\,dt = \frac{1}{2}\bigl[f(t+0)+f(t-0)]\bigr] \ . \tag{6.1}$$

Формулата (6.1) е известна като *формула на Риман-Мелин*. В точките на непрекъснатост на f имаме $f(t) = f(t+0) = f(t-0)$ и следователно

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{pt}F(p)\,dt = f(t) \ .$$

2. Теорема за разложението.

Да допуснем, че е известен образът $F(p)$ на една функция-оригинал $f(t)$. Намирането на оригинала се свежда до решаването на следното *интегрално уравнение на Лаплас*:

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = F(p) \ . \tag{6.2}$$

Решаването на това интегрално уравнение в общия случай е сложна задача, поради което ще се ограничим с някои частни случаи, до които водят голям брой практически задачи.

Ще отбележим най-напред едно свойство на решенията му. Ако

$$F(p) = \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p) + \cdots + \alpha_n F_n(p) \ ,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ са константи и $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ са оригиналите съответно на $F_1(p), F_2(p), \ldots, F_n(p)$, от линейността на трансформацията на Лаплас следва, че функцията $f(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t)$ е оригинал на $F(p)$. Следователно, ако успеем да представим дясната част на интегралното уравнение на Лаплас (6.2) във вид на линейна комбинация на известни образи, веднага ще можем да напишем търсения оригинал като линейна комбинация на съответните оригинали.

Да разгледаме случая, когато дясната страна $F(p)$ на (6.2) е правилна рационална функция

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} \ ,$$

където

$$\begin{aligned} P(p) &= a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \cdots + a_k \ , \quad a_0 \neq 0 \ , \\ Q(p) &= b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \cdots + b_n \ , \quad b_0 \neq 0 \ , \quad k < n \ . \end{aligned}$$

Да предположим още, че знаменателят $Q(p)$ има само прости нули $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и се разлага на множители във вида

$$Q(p) = b_0 (p - p_1)(p - p_2) \cdots (p - p_n) \ ,$$

Както е известно, съществува единствено представяне на такава рационална функция в сума от елементарни дроби от вида

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{p - p_j} \ . \tag{6.3}$$

Ще дадем явни формули за коефициентите A_j. Да означим

$$Q_j(p) = \frac{Q(p)}{p - p_j} \ , \quad \text{т. е.} \quad Q(p) = (p - p_j) Q_j(p) \ .$$

Диференцираме последното равенство:

$$Q'(p) = Q_j(p) + (p - p_j) Q_j'(p)$$

и след полагане $p = p_j$ получаваме

$$Q'(p_j) = Q_j(p_j) \ . \tag{6.4}$$

Сега да умножим двете страни на (6.3) с $p - p_j$:

$$\frac{P(p)}{Q_j(p)} = A_j + (p - p_j) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \frac{A_i}{p - p_i}$$

и да положим в последното равенство отново $p = p_j$. Получаваме

$$\frac{P(p_j)}{Q_j(p_j)} = A_j \ ,$$

откъдето вземайки предвид (6.4) намираме окончателно

$$A_j = \frac{P(p_j)}{Q(p_j)} \ .$$

Следователно дясната част на уравнението (6.2) се представя като линейна комбинация на $F_j(p) = \dfrac{1}{p - p_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, във вида

$$F(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(p_j)}{Q(p_j)} \frac{1}{p - p_j} \ .$$

Тъй като $e^{p_j t} \longmapsto \dfrac{1}{p - p_j}$, то съгласно споменатото по-горе свойство, оригинал на $F(p)$ ще бъде функцията

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(p_j)}{Q(p_j)} e^{p_j t} \ . \tag{6.5}$$

Изведената формула (6.5) дава решението на интегралното уравнение на Лаплас в разгледания случай.

В случаите, когато образът $F(p)$ е рационална функция, която има неразложими квадратни множители, както и когато има кратни нули, също можем да приложим описания метод: разлагаме в сума от елементарни дроби $F(p)$ и за да намерим оригинала, използваме таблицата с образите на основните функции при трансформация на Лаплас.

§7. ПРИЛОЖЕНИЯ НА ОПЕРАЦИОННОТО СМЯТАНЕ

1. Линейни обикновени диференциални уравнения с постоянни коефициенти.

Тук ще покажем как със средствата на операционното смятане може да се решава задачата на Коши за линейно диференциално уравнение от n-ти ред с постоянни коефициенти

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t) \ ,$$

$$y(0) = y_0 \ , y'(0) = y_0' \ , \ldots \ , y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \ ,$$

където $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са константи и $y(t)$ е неизвестната функция, $t \in [0, \infty)$. Ще предполагаме, че $y(t)$ заедно с всички свои производни до n-тата, включително, са функции-оригинали, както и дясната част $f(t)$. Освен това $y(t) \longmapsto Y(p)$ и $f(t) \longmapsto F(p)$. Ще използваме линейността на трансформацията на Лаплас и формулите за образ на производни

$$L[y'(t)] = pY(p) - y(0)\ , \quad L[y''(t)] = p^2Y(p) - py(0) - y'(0)\ , \quad \ldots\ .$$

Първо да разгледаме задачата на Коши за уравнение от първи ред

$$\begin{aligned} & y' + ay = f(t)\ , \\ & y(0) = y_0\ . \end{aligned}$$

Прилагаме трансформацията на Лаплас към двете страни на уравнението:

$$pY(p) - y_0 + aY(p) = F(p)\ ,$$

откъдето намираме

$$Y(p) = \frac{F(p) + y_0}{p + a}\ .$$

Пример 7.1. Да се реши задачата на Коши:

$$\begin{aligned} & y' + 2y = \operatorname{ch} t\ , \\ & y(0) = \frac{2}{3}\ . \end{aligned}$$

Тук $a = 2$, $y_0 = \dfrac{2}{3}$, $f(t) = \operatorname{ch} t$ и $F(p) = L[\operatorname{ch} t] = \dfrac{p}{p^2 - 1}$. Тогава

$$Y(p) = \frac{\dfrac{p}{p^2-1} + \dfrac{2}{3}}{p+2} = \frac{2(p+2)(p - \frac{1}{2})}{3(p+2)(p-1)(p+1)} = \frac{2p-1}{3(p-1)(p+1)}\ .$$

Разлагаме в сума от елементарни дроби:

$$Y(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{p-1}\ .$$

Като използваме от таблицата с основните трансформации на Лаплас, че $\dfrac{1}{p-a} = L[e^{at}]$, имаме

$$L[y(t)] = Y(p) = \frac{1}{2}\, L[e^{-t}] + \frac{1}{6}\, L[e^{t}] = L[\frac{1}{2}\, e^{-t} + \frac{1}{6}\, e^{t}]\ .$$

Оттук за решението на дадената задача на Коши намираме

$$y(t) = \frac{1}{2}\, e^{-t} + \frac{1}{6}\, e^{t} \ . \qquad \square$$

Сега ще разгледаме задачата на Коши за уравнение от втори ред, до която се стига в различни задачи от механиката, електротехниката и др.

$$\begin{aligned} &y'' + ay' + by = f(t) \ , \\ &y(0) = \alpha \ , \\ &y'(0) = \beta \ . \end{aligned}$$

Прилагаме трансформацията на Лаплас към двете страни на уравнението:

$$p^2Y(p) - p\alpha - \beta + a(pY(p) - \alpha) + bY(p) = F(p) \Leftrightarrow Y(p) = \frac{F(p) + \beta + (p+a)\alpha}{p^2 + ap + b} \ .$$

Пример 7.2. Да се реши задачата на Коши:

$$\begin{aligned} &y'' + y = \delta(t) \ , \\ &y(0) = 1 \ , \\ &y'(0) = -2 \ . \end{aligned}$$

Тук $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $f(t) = \delta(t)$ (δ-функцията на Дирак) и $F(p) = L[\delta(t)] = 1$. Тогава

$$Y(p) = \frac{p-1}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1} \ .$$

Като използваме от таблицата с основните трансформации на Лаплас, че $\dfrac{p}{p^2+1} = L[\cos t]$ и $\dfrac{1}{p^2+1} = L[\sin t]$, получаваме

$$L[y(t)] = Y(p) = L[\cos t] - L[\sin t] = L[\cos t - \sin t] \ .$$

Оттук за решението на дадената задача на Коши намираме

$$y(t) = \cos t - \sin t \ . \qquad \square$$

Аналогично за уравнение от n-ти ред, прилагаме трансформацията на Лаплас към двете страни на уравнението, изразяваме образът $Y(p) = L[y(t)]$ като сума от елементарни дроби и оттам намираме решението $y(t)$ като линейна комбинация на оригинали, чиито образи са съответните елементарни дроби.

2. Системи линейни обикновени диференциални уравнения с постоянни коефициенти.

Нека е дадена система линейни обикновени диференциални уравнения от I ред с постоянни коефициенти и начални условия:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = ax + by + f(t)\ , \\ \dot{y} = cx + dy + g(t)\ , \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0\ . \end{array}\right.$$

където коефициентите a, b, c, d са постоянни, $f(t), g(t)$ са дадени функции-оригинали и $x(t), y(t)$ са неизвестните функции-оригинали, дефинирани за $t \in [0, \infty)$. Като използваме линейността на трансформацията на Лаплас и формулата за образ на производна

$$L[\dot{x}(t)] = pX(p) - x(0)\ , \quad L[\dot{y}(t)] = pY(p) - y(0)\ ,$$

от системата диференциални уравнения получаваме линейна система за образите $X(p), Y(p)$:

$$\left|\begin{array}{l} (p-a)X(p) - bY(p) = F(p) + x_0\ , \\ cX(p) + (p-d)Y(p) = G(p) + y_0\ . \end{array}\right.$$

По формулите на Крамер получаваме

$$X(p) = \frac{\begin{vmatrix} F(p)+x_0 & -b \\ G(p)+y_0 & p-d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-a & -b \\ c & p-d \end{vmatrix}}\ , \qquad Y(p) = \frac{\begin{vmatrix} p-a & F(p)+x_0 \\ c & G(p)+y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-a & -b \\ c & p-d \end{vmatrix}}\ .$$

Нататък разлагаме образите $X(p), Y(p)$ в сума от елементарни дроби и от таблицата с основните трансформации на Лаплас възстановяваме оригиналите $x(t), y(t)$.

Пример 7.3. Да се реши задачата на Коши:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = 2x - 2y + 1\ , \\ \dot{y} = -x + y\ , \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0\ . \end{array}\right.$$

В този пример при горните означения имаме: $a = 2$, $b = -2$, $c = -1$, $d = 1$, $f(t) = 1$, $g(t) = 0$, $F(p) = L[f(t)] = \dfrac{1}{p}$, $G(p) = L[g(t)] = 0$. Тогава

$$X(p) = \frac{\begin{vmatrix} 1+1/p & 2 \\ 0 & p-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-2 & 2 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix}}\ , \qquad Y(p) = \frac{\begin{vmatrix} p-2 & 1+1/p \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-2 & 2 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix}}\ ,$$

или

$$X(p) = \frac{p^2-1}{(p-3)p^2} \ , \qquad Y(p) = -\frac{p+1}{(p-3)p^2} \ .$$

Представяме образите $X(p), Y(p)$ като сума от елементарни дроби:

$$X(p) = \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p-3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{p} \ , \qquad Y(p) = -\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{p-3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{p} \ .$$

Понеже $\frac{1}{p-3} = L[e^{3t}]$, $\frac{1}{p^2} = L[t]$ и $\frac{1}{p} = L[1]$, за решението на дадената задача на Коши намираме

$$x(t) = \frac{8}{9}\,e^{3t} + \frac{1}{3}\,t + \frac{1}{9} \ , \qquad y(t) = -\frac{4}{9}\,e^{3t} + \frac{1}{3}\,t + \frac{4}{9} \ . \qquad \square$$

3. Интегро-диференциални уравнения.

Уравнение, в които освен производни на неизвестната функция има и интеграли от тази функция ще наричаме *интегро-диференциално уравнение.*

Ще разгледаме един такъв тип уравнения с приложения в електротехниката:

$$\begin{aligned} &y'(t) + ay(t) + b\int_0^t y(\tau)\,d\tau = f(t) \ , \\ &y(0) = y_0 \ , \end{aligned}$$

където коефициентите a, b са постоянни, $f(t)$ е дадена функция-оригинал и $y(t)$ е неизвестната функция-оригинал, дефинирана за $t \in [0, \infty)$. От линейността на трансформацията на Лаплас и формулите за образ на производна и интеграл

$$L[y'(t)] = pY(p) - y(0) \ , \quad L[\int_0^t y(\tau)\,d\tau] = \frac{Y(p)}{p} \ ,$$

получаваме

$$pY(p) - y_0 + aY(p) + \frac{Y(p)}{p} = F(p) \ .$$

Оттук намираме образа на решението на дадената задача:

$$Y(p) = \frac{p(F(p)+y_0)}{p^2+ap+b} \ .$$

Оригинала $y(t)$ възстановяваме след представяне на $Y(p)$ по познатия начин.

Пример 7.4. Да се намери функция $y(t)$, такава че

$$\begin{aligned} & y'(t) + 3y(t) + 2\int_0^t y(\tau)\, d\tau = t \ , \\ & y(0) = 0 \ . \end{aligned}$$

Тук $a = 3$, $b = 2$, $y_0 = 0$, $f(t) = t$ и $F(p) = L[t] = \dfrac{1}{p^2}$. Тогава

$$Y(p) = \frac{p \cdot \dfrac{1}{p^2}}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{p(p+1)(p+2)} \ .$$

От представянето в сума от елементарни дроби

$$Y(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p}$$

намираме оригинала

$$y(t) = \frac{1}{2}\, e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{2} \ . \qquad \square$$