12. Единственост и гладкост на обобщеното решение.

Дотук за смесената задача P за уравнението

$$Lu = u_t - Au = f,$$

$$Au = (a_{ij}(t,x)u_{x_i})_{x_j} + a_i(t,x)u_{x_i} + a(t,x)u,$$

получихме съществуване на слабо решение $u \in H^1(G)$, което притежава обобщени първи производни по всички променливи. Като забравим за момент какво точно означава u да бъде слабо решение на граничната задача и прехвърлим производната u_t отдясно в уравнението,

$$-Au = f - u_t,$$

виждаме, че u е решение на "елиптично" по променливите x уравнение с дясна част, която е от $L_2(G)$. Благодарение на тази "елиптичност" очакваме решението u да има обобщени производни по x до втори ред. След малко ще формулираме резултат, от който следва, че това наистина е така.

Водени от такива съображения, виждаме, че е уместно да въведем анизотропното хилбертово пространство $H^{1,2}_{t,x}(G)$ или по-кратко $H^{1,2}(G)$ от онези функции $u \in L_2(G)$, които притежават обобщени производни $u_t \in L_2(G)$ и $\partial_x^\alpha u \in L_2(G)$ за $|\alpha| \leq 2$ с норма

$$\|u\|^2_{1,2} = \int_G (u_t^2 + \sum_{|\alpha|\leq 2} \partial_x^\alpha u) dG.$$

Ще видим по-нататък, че естествените резултати за гладкост при смесената задача за параболични уравнения се формулират, чрез използването на по-общите анизотропните пространства $H^{l,2l}_{t,x}(G)$, накратко $H^{l,2l}(G)$, от функции $u \in L_2(G)$, които притежават обобщени производни $\partial_t^p \partial_x^\alpha u \in L_2(G)$ за $2p + |\alpha| \leq 2l$ с норма

$$\|u\|^2_{l,2l} = \int_G (\sum_{2p+|\alpha|\leq 2l} \partial_t^p \partial_x^\alpha u) dG,$$

където l е неотрицателно цяло число.

Ще имаме нужда още от анизотропнато пространство $H^{0,l}(G)$, от функции $u \in L_2(G)$, които притежават обобщени производни $\partial_x^\alpha u \in L_2(G)$ за $|\alpha| \leq l$ с норма

$$|u|^2_l = \int_G (\sum_{|\alpha|\leq l} \partial_x^\alpha u) dG,$$

$l \geq 0$ е цяло число.

Както при класическите изотропни соболеви пространства $H^l(G)$ се проверява, че въведените пространства са пълни и разбира се, хилбертови. Нормите очевидно се пораждат от скаларни произведения, за които не въвеждаме специални означения, тъй като няма да ги използваме. Терминът анизотропен означава, че по различните променливи (направления) имаме обобщени производни от различен ред. Очевидни са включванията

$$H^{l,2l}(G) \subset H^l(G) \subset H^{0,l}(G).$$

Ето и спомагателния резултат за гладкост по x променливите.

За $u \in H^{0,1}(G)$, $v \in C_0^\infty(G)$ разглеждаме билинейната форма

$$B(u,v) = \int\limits_G (a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} - a_i u_{x_i} v - auv)dG,$$

като $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \theta\xi^2$, $\forall \xi \in R^m$, $\forall (t,x) \in \overline{G}$, $\theta = Const > 0$, и се подразбира сумиране от 1 до m по повтарящите се индекси.

Теорема 1. Нека $l \geq 0$ е цяло число, Ако $u \in H^{0,1}(G)$, $u|S = 0$ $\Phi \in H^{0,l}(G)$ и е в сила равенството

$$B(u,v) = (\Phi, v),\ \forall v \in C_0^\infty(G),$$

то $u \in H^{0,l+2}(G)$.

Тази теорема се доказва, като се следва схемата на доказателството за силно елиптични уравнения от втори ред. Наличието на допълнителна променлива t не налага промени, тъй като по нея няма диференциране, и следим само гладкостта по x, която както преди извличаме от положителната определеност на формата $a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j$.

Теорема 2. Нека $u \in H_P^1$ е слабо решение на смесената задача P при $f \in L_2(G)$. Тогава $u \in H^{1,2}(G)$.

Доказателството ще получим, като придадем строга форма на изложените в началото съображения. Слабото решение u удовлетворява равенството

$$(u, L^*v) = \int\limits_G u[-v_t - (a_{ij}v_{x_i})_{x_j} + (a_i v)_{x_i} - av]dG = (f,v),\ \forall v \in C_{P_*}^2.$$

Интегрирайки по части, прехвърляме производната по t от пробната функция v върху u.

$$(u, -v_t) = -\int\limits_G uv_t dG = \int\limits_G u_t v dG - \int\limits_\Gamma n_0 uv d\Gamma,$$

където $n = (n_0, n_1, n_2, ..., n_m)$ е единичният външен нормален вектор. Тъй като следата на u върху Γ_0 е нула, а $n_0|S = 0$, $v|\Gamma_T = 0$, то интегралът по границата е равен на нула и

$$(u, -v_t) = (u_t, v).$$

Това събираемо прехвърляме от другата страна на равенството при f. По аналогичен начин прехвърляме и по една производна по x_i от пробната функция v върху u.

$$\int\limits_G u[-(a_{ij}v_{x_i})_{x_j} + (a_i v)_{x_i}]dG = \int\limits_G [a_{ij}u_{x_j}v_{x_i} - a_i u_{x_i} v)]dG +$$

$$+ \int\limits_\Gamma u[-a_{ij}n_j v_{x_i} + a_i n_i v)]dG = \int\limits_G [a_{ij}u_{x_j}v_{x_i} - a_i u_{x_i} v)]dG.$$

Граничният член отново е равен на нула, защото $n_i|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_T} = 0$, $i > 0$ и следата на u върху S е нула. Окончателно получаваме

$$B(u, v) = \int\limits_G (a_{ij}u_{x_j}v_{x_i} - a_i u_{x_i} v - auv)dG = (f - u_t, v) = (\Phi, v), \ \forall v \in C_0^\infty(G),$$

където $f - u_t = \Phi \in L^2(G)$, като дори си позволяваме да стесним пространството на пробните функции. Сега от теорема 1 следва, че $u \in H^{0,2}(G)$, което заедно с $u \in H^1(G)$ води до очаквания резултат $u \in H^{1,2}(G)$.

В това доказателство видяхме, че това което правим при класическата формулировка на граничната задача, успяхме да осъществим и при слабата формулировка. И по-нататък ще се опитваме да открием пътя към решаването на даден въпрос, като първоначално разсъждаваме така, сякаш решението е класическо. Разбира се, след това ще трябва да покажем строго, както това направихме по-горе, че набелязаният път води до целта.

След като вече знаем, че всички обобщени производни на слабото решение, които участват в уравнението, са със сумируем квадрат, лесно ще получим, че слабото решение е и силно решение, като използваме следната лема, която ще докажем по-късно с помощта на оператори за осредняване.

Лема. Функциите от C_P^∞, които са нула в околност на Γ_0, са навсякъде гъсто по нормата $\| \cdot \|_{1,2}$ в $H_P^{1,2}$.

Теорема 3. Слабото решение $u \in H_P^1$ е и силно решение. Допълнително ще отбележим, че апроксимиращата силното решение редица можем да изберем от функции от C_P^∞, които се анулират в околност на Γ_0.

Доказателство. Тъй като цилиндърът $\overline{G}$ е компактно множество, то коефициентите в уравнението и техните производни са ограничени функции, откъдето веднага получаваме оценката

$$\|Lw\| \leq C\|w\|_{1,2}, \ \forall w \in H^{1,2}(G).$$

Слабото решение u на задача P е от $H^{1,2}(G)$ и като изберем пробните функции $v \in C_0^\infty(G)$ и прехвърлим с интегриране по части в дефиниционното равенство $(u, L^*v) = (f, v)$ диференцирането върху u (гранични членове не възникват), получаваме $(Lu, v) = (f, v)$ за всички $v \in C_0^\infty(G)$, откъдето заключаваме, че $Lu = f$ почти навсякъде в G, т.е. можем да приложим оператора L върху u, като израза за Lu пресмятаме по обичайния начин. Разбира се, производните в израза за L са обобщени производни, които се пресмятат в слаб смисъл.

Нека съгласно лемата $u_\nu \in C_P^\infty$ е апроксимираща редица за u, т.е.

$$\|u - u_\nu\|_{1,2} \to 0 \text{ при } \nu \to \infty.$$

Но тогава от неравенството

$$\|Lu - Lu_\nu\| \leq C\|u - u_\nu\|_{1,2}$$

следва, че

$$\|Lu - Lu_\nu\| \to 0 \text{ при } \nu \to \infty,$$

т.е. u е силно решение и апроксимиращата редица има указаното допълнително свойство.

От този резултат незабавно получаваме

Следствие 1. Задачата P притежава единствено силно решение от $H_P^{1,2}$ за всяка дясна част $f \in L^2(G)$, като апроксимиращата силното решение редица можем да изберем от функции от C_P^∞, които се анулират в околност на Γ_0.

Единствеността на силното решение следва от априорната оценка

$$\|u\|_1 \leq C\|f\|,$$

която вече установихме.

По-нататък, забелязвайки, че спрегнатата задача P_* е напълно аналогична на първоначалната задача, заключаваме, че за нея важи аналогичен резултат.

Следствие 2. Задачата P_* притежава единствено силно решение от $H_{P_*}^{1,2}$ за всяка дясна част $g \in L^2(G)$, като апроксимиращата силното решение редица можем да изберем от функции от $C_{P_*}^\infty$, които се анулират в околност на Γ_T.

Във верността му се убеждаваме, без да е необходимо да преповтаряме досегашните разглеждания. Достатъчно е да използваме, че като сменим променливата t с τ по формулата $t = T - \tau$ получаваме, че спрегната задача P_* за L^* преминава в задача P. Ако $u_1(t, x)$ е силно решение на задача P за уравнението

$$L_1 u_1 = u_{1t} - (a_{ij}(T-t, x)u_{1x_i})_{x_j} + (a_i(T-t, x)u_1)_{x_i} - a(T-t, x)u_1 = f(T-t, x),$$

то $v(t,x) = u_1(T-t,x)$ е силно решение на задача P_* за уравнението

$$L^*v = -v_t - (a_{ij}(t,x)v_{x_i})_{x_j} + (a_i(t,x)v)_{x_i} - a(t,x)v = g(t,x).$$

От силната разрешимост на спрегнатата задача веднага получаваме

Следствие 3. Слабото решение $u \in L^2(G)$, на задача P е единствено.

Поради линейността на задачата, достатъчно е да покажем, че слабото решение на уравнението с дясна част равна на нула е също равно на нула. Наистина, ако u_1 и u_2 са две слаби решения на уравнението с дясна част f и означим разликата им с $u = u_1 - u_2$, като извадим при $v \in C^2_{P_*}$ равенствата

$$(u_1, L^*v) = (f, v),$$

$$(u_1, L^*v) = (f, v),$$

получаваме

$$(u, L^*v) = 0,$$

т.е. разликата u е решение на хомогенното уравнение в слаб смисъл.

От силната разрешимост на спрегната задача следва, че $L^*(C^2_{P_*})$ е навсякъде гъсто подмножество на $L_2(G)$. Наистина, ако за произволна функция $h \in L_2(G)$ разгледаме спрегнатата задача P_* за уравнението $L^*v = h$, по следствие 2 съществува силно решение v и апроксимираща редица $v_j \in C^2_{P_*}$, за която

$$\|v_j - v\| \to 0,\ \|Lv_j - h\| \to 0 \text{ при } j \to \infty,$$

т.е. Lv_j приближават h в $L_2(G)$ с произволна точност.

Нека допуснем, че $u \in L^2(G)$ е слабо решение на хомогенното уравнение, т.е.

$$(u, L^*v) = 0,\ \forall v \in C^2_{P_*}.$$

Ако h и v_j са определените по-горе, то

$$(u, L^*v_j) = 0,$$

откъдето с граничен преход при $j \to \infty$ заключаваме, че

$$(u, h) = 0.$$

Избирайки $h = u$ получаваме $\|u\|^2 = 0$, т.е. искания резултат $u = 0$.

Следствие 4. За всяка дясна част $f \in L^2(G)$ слабото решение $u \in L^2(G)$ на задача P съвпада със силното и е от класа $H^{1,2}_P$, т.е. $u \in H^{1,2}_P$.

Нека $u \in L^2(G)$ е слабо решение на задача P за уравнението $Lu = f$. Но тъй като за $f \in L^2(G)$ задачата P притежава според следствие 1 силно решение $w \in H^{1,2}_P$, което разбира се е и слабо решение, то според доказаната в следствие 3 единственост на слабото решение наистина имаме $u = w \in H^{1,2}_P$.

Следствие 5. За да проверим, че $u \in L^2(G)$ е силно решение на задачата P и $u \in H_P^{1,2}$, достатъчно е да проверим равенството

$$(u, L^*v) = (f, v),$$

само за пробни функции $v \in C_{P_*}^{\infty}$, които са нула в околност на Γ_T.

Това твърдение отново извличаме от силната разрешимост на спрегнатата задача и свойствата на апроксимиращата силното решение редица. Нека $v \in C_{P_*}^2$ е произволна пробна функция. Тя е класическо, а следователно и силно решение на спрегната задача P_* за уравнението $L^*w = (Lv)$ и съгласно следствие 2 съществува апроксимираща редица от функции $v_j \in C_{P_*}^{\infty}$, които са нула в околност на Γ_T и

$$\|v_j - v\| \to 0, \ \|Lv_j - Lv\| \to 0 \text{ при } j \to \infty.$$

По предположение имаме

$$(u, L^*v_j) = (f, v_j),$$

откъдето с граничен преход при $j \to \infty$ получаваме, че

$$(u, L^*v) = (f, v),$$

за произволна пробна функция $v \in C_{P_*}^2$, т.е. u е слабо решение и съгласно следствие 4 u е и силно решение и $u \in H_P^{1,2}$.

Сега ще докажем, че при по-гладка дясна част f и решението u има по-висока гладкост, мерена по скалата на анизотропните пространства на Соболев $H^{l,2l}(G)$.

Ако формално диференцираме уравнението

$$Lu = u_t - (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} - a_i u_{x_i} - au = f \in H^{1,2}(G),$$

сякаш $u \in H_P^{1,2}$ е класическо решение, притежаващо необходимия брой производни, ще получим, че u_t е решение на същото уравнение

$$L(u_t) = (u_t)_t - (a_{ij}(u_t)_{x_i})_{x_j} - a_i(u_t)_{x_i} - a(u_t) = f_1,$$

$$f_1 = f_t + (a_{ijt}u_{x_i})_{x_j} + a_{it}u_{x_i} + a_t u,$$

но с дясна част f_1, която очевидно е от $L_2(G)$.

От $u|_S = 0$ следва $u_t|_S = 0$, т.е. u_t удовлетворява граничното условие върху S. Като използваме, че поради $u|_{\Gamma_0} = 0$ имаме $u_{x_i}, u_{x_i x_j}|_{\Gamma_0} = 0$ от уравнението

$$Lu = u_t - (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} - a_i u_{x_i} - au = f \in H^{1,2}(G)$$

следва, че $u_t|_{\Gamma_0} = 0$ тогава и само тогава когато $f|_{\Gamma_0} = 0$. Предполагайки че за f наистина имаме $f|_{\Gamma_0} = 0$ тъй като u_t удовлетворява и граничното условие $u_t|_{\Gamma_0} = 0$, то u_t ще бъде решение на задача P с дясна част $f \in L_2(G)$ и би трябвало $u_t \in H_P^{1,2}$. Сега като прехвърлим в уравнението $Lu = f$ членът u_t отдясно, имаме

$$-(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} - a_i u_{x_i} - au = f - u_t = f_2 \in H^{1,2}(G),$$

т.е. u е решение на "елиптичното" по x уравнение с дясна част $f_2 \in H^{0,2}(G)$ и следователно $u \in H^{0,4}(G)$. Като комбинираме този и горния резултат получаваме $u \in H^{2,4}(G)$. Тези разсъждения не са строги, но следвайки изложената идея, по аналогичен начин ще можем да докажем и по-висока гладкост, т.е. че е в сила

Теорема 4. При $l \geq 0$ цяло число, за всяка дясна част

$$f \in H^{l,2l}(G),\ \partial_t^p f|_{\Gamma_0} = 0,\ (p = 0, 1, \ldots, l-1 \text{ при } l > 0),$$

смесената задача P притежава единствено силно решение

$$u \in H^{(l+1),2(l+1)}(G),\ \partial_t^p u|_{\Gamma_0} = 0,\ (p = 0, 1, \ldots, l).$$

Забележка. Допълнителното изискване за анулирането на f и производните $\partial_t^p f$ върху Γ_0 може да се разглежда, като произхождащо от условията за съгласуване на началните и граничните условия по ръба на двустенния ъгъл между околната повърхнина S и долната основа Γ_0 на цилиндъра G. Изхождайки от тази гледна точка, то не ограничава общността на раглежданията.

Доказателство. С помощта на следствие 5 ще облечем в строга форма горните навеждащи съображения.

При $l = 0$ верността на теоремата е установена в следствие 1. Да докажем теоремата при $l = 1$. Съгласно следствие 1 задача P притежава единствено силно решение $u \in H_P^{1,2}$. Ще докажем, че функцията $u_t \in L^2(G)$, е силно решение на смесената задача P за уравнението $L(u_t) = f_1$ с дясна част

$$f_1 = f_t + (a_{ijt}u_{x_i})_{x_j} + a_{it}u_{x_i} + a_t u \in L^2(G)$$

Да видим, че това е така. Съгласно следствие 5, достатъчно е да проверим, че тя е слабо решение само за пробни функции $v \in C_{P_*}^\infty$, които са равни на нула в околност на Γ_0. По предположение $u \in H_P^{1,2}$ и

$$(u, L^*v) = (f, v),\ \forall v \in C_{P_*}^\infty.$$

Тъй като $v_t \in C_{P_*}^\infty$ е също пробна функция, то

$$(u, L^*(v_t)) = (f, v_t),\ \forall v \in C_{P_*}^\infty.$$

С помощтта на тъждеството

$$(L^*v)_t = -v_{tt} - (a_{ij}(v_t)_{x_i})_{x_j} + (a_i(v_t))_{x_i} - a(v_t) - (a_{ijt}v_{x_i})_{x_j} + (a_{it}v)_{x_i} - a_t v =$$

$$= (L^*(v_t)) - (a_{ijt}v_{x_i})_{x_j} + (a_{it}v)_{x_i} - a_t v$$

получаваме

$$(u_t, L^*v) = -(u, (L^*v)_t) = -(u, L^*(v_t)) + (u, L^*(v_t) - (L^*v)_t) =$$

$$= -(f, v_t) + (u, (a_{ijt}v_{x_i})_{x_j} - (a_{it}v)_{x_i} + a_t v) =$$

$$= (f_t, v) + ((a_{ijt}u_{x_j})_{x_i} + a_{it}u_{x_i} + a_t u, v) = (f_1, v).$$

При интегрирането по части не възникват гранични членове, защото имаме $u|_{\Gamma_0 \cup S} = 0$, $v|_{\Gamma_T \cup S} = 0$, и v, а следователно и $(L^*v)_t$ се анулират в околност на Γ_T.

Окончателно получихме

$$(u_t, L^*v) = (f_1, v)$$

за всички пробни функции $v \in C^\infty_{P_*}$, които са равни на нула в околност на Γ_0, и съгласно следствие 5 оттук следва, че $u_t \in H^{1,2}_P$ е силно решение на задача P.

Като препишем уравнението $(u, L^*v) = (f, v)$ във вида

$$B(u, v) = \int_G (a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} - a_i u_{x_i} v - auv) dG = (f_2, v), \ \forall v \in C_0^\infty(G), \qquad *$$

с $f_2 \equiv (f - u_t) \in H^{1,2}(G) \subset H^{0,2}$ и използваме теорема 1 имаме и $u \in H^{0,4}(G)$. Заедно с вече полученият резултат $u_t \in H^{1,2}_P \subset H^{1,2}(G)$ това ни дава $u \in H^{2,4}(G)$.

По-нататък доказателството продължава по индукция. Нека теоремата е вече доказана при $l \geq 1$ и предположенията ѝ са изпълнени при $l + 1$. Тогава за $f \in H^{(l+1),2(l+1)}(G) \subset H^{l,2l}(G)$, съществува единствено силно решение $u \in H^{(l+1),2(l+1)}(G)$. Както по-горе доказваме, че u_t е силно решение на задача P за уравнението $L(u_t) = f_1$ с дясна част

$$f_1 = f_t + (a_{ijt}u_{x_i})_{x_j} + a_{it}u_{x_i} + a_t u \in H^{l,2l}(G),$$

$$\partial_t^p f_1|_{\Gamma_0} = 0, \ (p = 0, 1, \ldots, l-1), \qquad **$$

и според индуктивното предположение

$$u_t \in H^{(l+1),2(l+1)}(G), \ \partial_t^p u|_{\Gamma_0} = 0, \ (p = 0, 1, \ldots, l+1).$$

От $*$ с $f_2 = (f - u_t) \in H^{(l+1),2(l+1)}(G) \subset H^{0,2(l+1}$ получаваме $u \in H^{0,2(l+2)}(G)$ и като комбинираме тези два резултата стигаме до желаното заключение $u \in H^{(l+2),2(l+2)}(G)$.

Отбелязваме, че съотношението $**$ е изпълнено, защото функцията

$$u \in H^{(l+1),2(l+1)}(G),\ \partial_t^p u|_{\Gamma_0} = 0,\ (p = 0, 1, \ldots, l),$$

можем да продължим като нула при $t < 0$ и получената функция принадлежи на $H^{(l+1),2(l+1)}((-\infty, T) \times D)$, което показва че следите на нейните производни върху Γ_0, които имат смисъл, са равни на нула.