11. Смесена задача за параболични уравнения от втори ред. Априорна оценка, съществуване на обобщено решение.

Нека D е ограничена област в R^m с гладка граница $\gamma \in C^\infty$, а $G = \{(t,x) \in R^{m+1} : 0 < t < T, x \in D\} = (0,T) \times D$ е цилиндър в $R^{m+1}_{t,x}$ с частично гладка граница $\partial G = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_T \cup S$, където S е околната повърхнина на цилиндъра G, а основите са $\Gamma_0 = \{(0,x) : x \in \overline{D}\}$ и $\Gamma_T = \{(T,x) : x \in \overline{D}\}$.

В G разглеждаме параболичния оператор

$$Lu \equiv u_t - Au \equiv u_t - (a_{ij}(t,x)u_{x_i})_{x_j} - a_i(t,x)u_{x_i} - a(t,x)u,$$

където $a_{ij}, a_i, a \in C^\infty(\overline{G})$; $a_{ij} = a_{ji}$; $a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \theta\xi^2$, $\forall \xi \in R^m$, $\forall (t,x) \in \overline{G}$, $\theta = Const > 0$, и се подразбира сумиране от 1 до m по повтарящите се индекси. Поставили сме толкова високи изисквания за гладкост на границата и коефициентите, за да не прецизираме постоянно в отделните твърдения по-нататък точните показатели на гладкост, при който те са валидни, а да съсредоточим вниманието си върху метода на изследване.

В областта G разглеждаме гранична задача, наричана "смесена задача", която формулираме така

Задача P. Да се намери в G решение на уравнението

$$Lu = f,$$

което удовлетворява граничните условия

$$u = 0 \text{ върху } \Gamma_0 \cup S.$$

Названието "смесена задача" идва от това, че условието при $t = 0$ се интерпретира като начално условие, а условието върху S като гранично условие, т.е. по границата са зададени две условия от различен тип (с различен физичен смисъл), макар че в случая и двете условия се записват еднакво.

По-кратко задачата ще записваме така:

Задача P.

$$Lu = f, G,$$

$$u|_{\Gamma_0 \cup S} = 0.$$

Смесената задача за параболичния оператор от втори ред от най-общ вид е аналог на смесената задача за уравнението на топлопроводността

$$u_t - a(u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_mx_m}) = f, G,$$

$$u|_{\Gamma_0 \cup S} = \varphi.$$

Ние ще разглеждаме най-напред случая на хомогенни гранични и начални условия, тъй като има стандартен способ за преминаване от нехомогенни гранични условия към хомогенни. Разглеждането на хомогенни гранични условия позволява да се работи значително по-просто.

За "формално спрегнатия оператор"

$$L^*v \equiv -v_t - A^*v \equiv -v_t - (a_{ij}(t,x)v_{x_i})_{x_j} + (a_i(t,x)v)_{x_i} - a(t,x)v,$$

разглеждаме "спрегната гранична задача" P_* при така наречените "спрегнати гранични условия".

Задача P_*.

$$L^*v = g, G,$$

$$v|_{\Gamma_T \cup S} = 0.$$

Както обикновено с $H^l(G)$ и $\|\cdot\|_l$ ще означаваме пространството на Соболев и неговата норма, където l е неотрицателно цяло число, а скаларното произведение и нормата в $L_2(G)$ ще означаваме с $(.,.)$ и $\|\cdot\|$ съответно.

По-нататък с $C^l_P(H^l_P)$ ще означаваме множеството от онези функции от $C^l(\overline{G})$ $(H^l_2(G), l > 0)$, които удовлетворяват граничните условия на задача P. Аналогичен смисъл имат и означенията $C^l_{P_*}(H^l_{P_*})$, като сега се предполага, че са удовлетворени граничните условия на спрегнатата задача P_*, т.е. спрегнатите гранични условия. Въвеждането на понятията формално спрегнат оператор, спрегната гранична задача и спрегнати гранични условия е оправдано, тъй като с интегриране по части лесно получаваме интегралното тъждество

$$(Lu, v) = (u, L^*v),$$

валидно за всички функции $u \in C^2_P(H^2_P)$ и $v \in C^2_{P_*}(H^2_{P_*})$.

Дефиниция. Нека $f \in L_2(G)$. Казваме, че функцията $u \in L_2(G)$ е слабо решение на задача P ако за всяка функция $v \in C^2_{P_*}$ е изпълнено тъждеството $(u, L^*v) = (f, v)$.

Функциите v обикновено наричаме пробни функции. Ясно е, че ако пробните функции, за които трябва да проверим интегралното тъждество, са повече, е по-вероятно слабото решение да е единствено, но пък става по трудно да намерим слабо решение. Целта ни по-нататък ще бъде да видим, че спрегнатите гранични условия са така подбрани, че слабото решение не само съществува, но е и единствено.

Дефиниция. Функцията $u \in L_2(G)$ наричаме силно решение на задача P ако съществува такава апроксимираща редица от функции $u_j \in C^2_P$, че е в сила $\|u_j - u\| + \|Lu_j - f\| \to 0$ при $j \to \infty$.

Не е трудно да се убедим, че всяко силно решение е и слабо решение. Наистина, за $u_j \in C^2_P$, $v \in C^2_{P_*}$ важи интегралното тъждество

$$(u_j, L^*v) = (Lu_j, v),$$

и тъй като по предположение $u_j \to u$ и $Lu_j \to f$ в $L_2(G)$ при $j \to \infty$, то след граничен преход получаваме $(u, L^*v) = (f, v)$.

Слабото решение не винаги е силно, а когато това е така, проверката на съвпадането на слабото и силното решение е деликатна работа. Обикновено е по-лесно да се докаже съществуване на слабо решение и единственост на силното решение. Съществуване и единственост на решение обикновено получаваме, когато слабото решение съвпада със силното.

Най-напред ще докажем една априорна оценка, от която ще следва, че задача P може да има най-много едно класическо или силно решение.

Лема. Съществува $\lambda_0 > 0$, такова че при $\lambda \geq \lambda_0$ за всички функции $u \in C_P^2$ е в сила априорната оценка

$$(2e^{-\lambda t}u_t, Lu) \geq C\|u\|_1^2, C = Const(\lambda) > 0. \qquad **$$

Доказателство. Нека предполжим, че $u \in C^2(\overline{G})$. Най-напред написваме по-подробно скаларното произведение.

$$(2e^{-\lambda t}u_t, Lu) = \int_G e^{-\lambda t}\{2u_t^2 - 2u_t(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} - 2u_t(a_iu_{x_i} + au)\}dG.$$

Имаме тъждествата

$$-2u_t(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} = -2(a_{ij}u_tu_{x_i})_{x_j} + 2u_{tx_j}a_{ij}u_{x_i},$$

$$u_{tx_j}a_{ij}u_{x_i} = (a_{ij}u_{x_i}u_{x_j})_t - a_{ijt}u_{x_i}u_{x_j} - a_{ij}u_{x_j}u_{tx_i},$$

откъдето

$$2u_{tx_j}a_{ij}u_{x_i} = (a_{ij}u_{x_i}u_{x_j})_t - a_{ijt}u_{x_i}u_{x_j}$$

и следователно

$$(2e^{-\lambda t}u_t, Lu) = \int_G e^{-\lambda t}\{2u_t^2 + (a_{ij}u_{x_i}u_{x_j})_t -$$

$$-2(a_{ij}u_tu_{x_i})_{x_j} - a_{ijt}u_{x_i}u_{x_j} - 2u_t(a_iu_{x_i} + au)\}dG.$$

Сега с интегриране по части получаваме тъждеството

$$(2e^{-\lambda t}u_t, Lu) = \int_G e^{-\lambda t}\{2u_t^2 + (\lambda a_{ij} - a_{ijt})u_{x_i}u_{x_j} -$$

$$-2a_iu_tu_{x_i} - 2au_tu\}dG +$$

$$+ \int_\Gamma e^{-\lambda t}\{n_0a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} - 2u_ta_{ij}u_{x_i}n_j\}d\Gamma,$$

където $n = (n_0, n_1, n_2, ..., n_m)$ е единичният външен нормален вектор към границата Γ.

Нека сега $u \in C_P^2$. Ще докажем, че интегралът върху границата е неотрицателен. Наистина, върху S имаме $n_0 = 0$ и $u|_S = 0$, но тогава и $u_t|_S = 0$, т.е. подинтегралният израз е нула върху S. Върху Γ_0 имаме $n_j = 0$ за $j > 0$, а от $u|_{\Gamma_0} = 0$ следва $u_{x_i}|_{\Gamma_0} = 0$ и отново подинтегралният израз е равен на нула. Върху Γ_T имаме $n_0 = 1$ и $n_j = 0$ за $j > 0$, т.е. подинтегралният израз е положително определената форма $a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}$, откъдето заключаваме, че интегралът върху границата е неотрицателен за всички функции удовлетворяващи граничните условия.

Тъй като за всички функции $u \in C_P^2$ имаме

$$\int_G e^{-\lambda t}(\lambda u^2 - 2uu_t)dG = -\int_G (e^{-\lambda t}u^2)_t dG = -\int_\Gamma e^{-\lambda t}n_0 u^2 d\Gamma \le 0,$$

то като добавим в дясната страна на интегралното тъждество този неположителен интеграл и махнем неотрицателния интеграл по границата, получаваме неравенството

$$(2e^{-\lambda t}u_t, Lu) \ge \int_G e^{-\lambda t}\{2u_t^2 + (\lambda a_{ij} - a_{ijt})u_{x_i}u_{x_j} -$$

$$-2a_i u_t u_{x_i} - 2(a+1)uu_t + \lambda u^2\}dG.$$

Нека константата M е толкова голяма, че $|a_i| \le M \ \forall i$, $|a+1| \le M$. Тогава е в сила оценката

$$|2a_i u_t u_{x_i}| \le 2(\sqrt{\varepsilon}|u_t|)(\frac{M|u_{x_i}|}{\sqrt{\varepsilon}}) \le \varepsilon u_t^2 + C(\varepsilon)u_{x_i}^2,$$

където $C(\varepsilon) = M^2/\varepsilon$ и ε е фиксирана положителна константа, чийто избор ще уточним след малко. Аналогично получаваме и неравенството

$$|2(a+1)uu_t| \le \varepsilon u_t^2 + C(\varepsilon)u^2,$$

откъдето следва, че

$$(2e^{-\lambda t}u_t, Lu) \ge \int_G e^{-\lambda t}\{(2-2\varepsilon)u_t^2 + (\lambda a_{ij} - a_{ijt} - \delta_j^i C(\varepsilon))u_{x_i}u_{x_j} +$$

$$+(\lambda - C(\varepsilon))u^2\}dG.$$

Тук δ_j^i е символът на Кронекер. Сега даваме на ε фиксирана стойност между 0 и $1/2$, след което избираме λ_0 толкова голямо, че да имаме

$$\lambda_0/2 \ge C(\varepsilon), ((\lambda_0/2)a_{ij} - a_{ijt} - \delta_j^i C(\varepsilon))\xi_i\xi_j \ge 0 \ \forall \xi \in R^m, \forall (t,x) \in \overline{G}.$$

Ясно е, че за всички $\lambda \ge \lambda_0$ важи оценката

$$(2e^{-\lambda t}u_t, Lu) \ge e^{-\lambda T}\int_G \{u_t^2 + (\lambda_0\theta)/2\sum_{i=1}^m u_{x_i}^2 + (\lambda_0/2)u^2\}dG.$$

Ако допълнително изберем λ_0, така че да имаме

$$(\lambda_0\theta)/2 \geq 1,\ \lambda_0/2 \geq 1,$$

то при $\lambda \geq \lambda_0$ получаваме нужната ни априорна оценка

$$(2e^{-\lambda t}u_t, Lu) \geq C\|u\|_1^2, C = Const(\lambda) > 0,$$

където $C = e^{-\lambda T}$.

Следствие 1. Задачата P може да има най-много едно класическо решение $u \in C_P^2$ и е в сила априорната оценка

$$\|u\|_1 \leq C\|Lu\|,\ \forall u \in C_P^2. \qquad *$$

Доказателство. От получената в лемата априорна оценка $**$, с помощтта на неравенството на Коши-Буняковски и елементарното неравенство $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2$, получаваме последователно

$$C\|u\|_1^2 \leq \|2e^{-\lambda t}u_t\|\|Lu\| \leq C(\varepsilon)\|Lu\|^2 + \varepsilon\|u\|_1^2.$$

Оттук при $0 < \varepsilon < C$ получаваме

$$(C - \varepsilon)\|u\|_1^2 \leq C(\varepsilon)\|Lu\|^2$$

и след като коренуваме полученото неравенство стигаме до желаната априорна оценка $*$. От нея следва единствеността на класическото решение.

Наистина, ако u_1 и u_2 са две решения на смесената задача P, то като образуваме тяхната разлика $u = u_1 - u_2$, тя е решение на хомогенното уравнение $Lu = 0$. Тогава от априорната оценка $*$ следва, че $\|u\|_1 = 0$, т.е $u = 0$.

Следствие 2. Ако смесената задача P има силно решение $u \in L^2(G)$ при $f \in L^2(G)$, то силното решение u е от H_P^1 и за него важи априорната оценка

$$\|u\|_1 \leq C\|f\|,$$

т.е. силното решение на смесената задача е единствено.

Доказателство. Нека $u \in L_2(G)$ е силно решение на задача P, т.е. съществува апроксимираща редица от функции $u_j \in C_P^2$, за която $\|u_j - u\| \to 0$, $\|Lu_j - f\| \to 0$ при $j \to \infty$. Редицата $\{Lu_j\}$ е фундаментална в $L_2(G)$ (защото клони към f) и от априорната оценка $*$ получаваме

$$\|u_i - u_j\|_1 \leq C\|Lu_i - Lu_j\|.$$

Оттук следва, че редицата $\{u_j\}$ е фундаментална в H_P^1 и има граница $w \in H_P^1$. Тъй като u_j клони към w и в $L_2(G)$, а по предположение границата ѝ в

$L_2(G)$ е u, то $u = w \in H_P^1$, защото границата е единствена. Като извършим граничен преход при $j \to \infty$ в неравенството

$$\|u_j\|_1 \leq C\|Lu_j\|,$$

получаваме оценката за решението

$$\|u\|_1 \leq C\|f\|.$$

Най-напред ще покажем, че смесената задача притежава слабо решение от H_P^1, което става сравнително лесно, като използваме пространства с отрицателна норма, след което ще докажем, че слабото решение е и силно решение и следователно е единствено. Най-накрая ще докажем, че при погладка дясна страна, т.е. дясна страна притежаваща обобщени производни със сумируем квадрат от по висок ред, и решението е по гладко.

Теорема. Смесената задача P притежава слабо решение $u \in H_P^1$ за всяка дясна страна $f \in L^2(G)$.

Доказателство. В следващите разсъждения с H_P^{-1} ще означаваме пространството с отрицателна норма, построено по $L^2(G)$ и H_P^1 с норма

$$\|v\|_{-1} = \sup_{u \in H_P^1} \frac{(v,u)}{\|u\|_1},\ v \in L^2(G).$$

За всяка функция $v \in C_{P_*}^2$ дефинираме

$$u_v(t,x) = (1/2)\int_0^t e^{\lambda\tau} v(\tau,x)d\tau.$$

Очевидно $u_v(t,x) \in C_P^2$ и $2e^{-\lambda t}(u_v)_t = v$. Като използваме, че v и u_v удовлетворяват спрегнати гранични условия и основното неравенство $(**)$ получаваме

$$(L^*v, u_v) = (v, L(u_v)) = (2e^{-\lambda t}(u_v)_t, L(u_v)) \geq C\|u_v\|_1^2,$$

откъдето по неравенството на Шварц следва

$$\|L^*v\|_{-1}\|u_v\|_1 \geq C\|u_v\|_1^2,$$

т.е.

$$\|L^*v\|_{-1} \geq C\|u_v\|_1,$$

но понеже очевидно $\|u_v\|_1 \geq C\|v\|$, то

$$\|L^*v\|_{-1} \geq C\|v\|,\ \forall v \in C_{P_*}^2 \qquad ***$$

За краткост константите в различните неравенства, които разбира се са различни, започнахме да означаваме с една и съща буква C. Няма опасност от недоразумение, тъй като за нас е важен фактът на съществуването на оценката, а стойността на константата е без значение за по-нататъшните разглеждания.

От получената априорна оценка $***$ твърдението на теоремата за съществуване на слабо решение следва по стандартен начин. Ето как става това.

Да разгледаме линейния функционал $l(w)$, който е дефиниран за функции от линейното пространство

$$W = \{w : \ w = L^* v, \ v \in C^2_{P_*}\},$$

чрез равенството

$$l(L^* v) = (f, v).$$

Дефиницията е коректна, тъй като v е еднозначно определено от $L^* v$ (От получената оценка $***$ следва, че $L^* : C^2_{P_*} \to L_2(G)$ е обратим, защото от $L^* v = 0$ следва $v = 0$). Очевидно имаме включванията

$$W \subset L^2(G) \subset H^{-1}_P.$$

Линейният функционал $l(w)$ е непрекъснат (ограничен) над W, поради оценката

$$|l(L^* v)| = |(f, v)| \leq \|f\| \|v\| \leq \frac{\|f\|}{C} \|L^* v\|_{-1}, \ \text{ т.е.}$$

$$|l(w)| \leq \|w\|_{-1} \ \forall w \in W.$$

Продължаваме го до непрекъснат линеен функционал $\tilde{l} : H^{-1}_P \to R$ над H^{-1}_P ($\tilde{l}(w) = l(w) \ \forall w \in W$) с помощта на теоремата на Хан-Банах. По теоремата на Рис съществува такова $u_0 \in H^{-1}_P$, че той има представянето

$$\tilde{l}(w) = (u_0, w)_{-1} \ \forall w \in H^{-1}_P.$$

Поради изометрията $I : H^{-1}_P \to H^1_P$ имаме

$$\tilde{l}(w) = (u_0, w)_{-1} = (I u_0, w) \ \forall w \in H^{-1}_P.$$

Като означим $u = I u_0 \in H^1_P$ и използваме, че горното равенство е валидно и за $w = L^* v \in W \subset H^{-1}_P$ последователно получаваме

$$(f, v) = l(L^* v) = \tilde{l}(L^* v) = (I u_0, L^* v) = (u, L^* v), \ \text{ т.е.}$$

$$(u, L^* v) = (f, v) \ \forall v \in C^2_{P_*}$$

и теоремата е доказана, като търсеното слабо решение е функцията $u \in H^1_P$.