10. Пространства с отрицателна норма.

Ще въведем хилбертови пространства по-широки от $L_2(G)$, наричани пространства с отрицателна норма, за елементите на които има смисъл да се говори, че са обобщени решения на дадена гранична задача. Въведените пространства и норми ще ни бъдат полезни и при доказването на съществуване на обобщени решения с по-висока гладкост, като следствие от валидността на подходяща априорна оценка за спрегнатия диференциален оператор в пространства с отрицателна норма. Тук ще изложим общата схема на въвеждане на тези пространства.

Нека H е хилбертово пространство със скаларно произведение $(\cdot,\cdot)$ и норма $\|\cdot\|$. Нека H_+ е линейно подпространство на H, $H \supset H_+$, което е навсякъде гъсто в него и самото то е хилбертово пространство със скаларно произведение $(\cdot,\cdot)_+$ и норма $\|\cdot\|_+$, като предполагаме, че е изпълнено неравенството

$$\|u\| \leq \|u\|_+ \ \forall u \in H_+.$$

Пространството H_+ ще наричаме положително спрямо H.

Типични примери за такава двойка пространства са $H = L_2(G)$, $H_+ = \mathring{H}^1(G)$, или $H = L_2(G)$, $H_+ = H^1(G)$, или по общо $H = L_2(G)$, $H_+ = \mathring{H}^l(G)$, при $l > 0$.

Следвайки очерталите се плодотворни идеи, пространството с отрицателна норма ще въведем като множеството от непрекъснати над H_+ функционали, но с такава норма, че скаларното произведение в H да има смисъл за елемент от пространството с отрицателна норма и елемент от пространството с положителна норма.

Да разгледаме за $v \in H$ линейния функционал $l_v(u) \equiv (v,u)$, $u \in H_+$. Той е непрекъснат (ограничен) над H_+ поради оценката

$$|l(u)| = |(v,u)| \leq \|v\|\|u\| \leq \|v\|\|u\|_+.$$

За нормата му имаме

$$\|l_v\| \equiv \sup_{u\in H_+} \frac{|l_v(u)|}{\|u\|_+} = \sup_{u\in H_+} \frac{|(v,u)|}{\|u\|_+} \leq \|v\|. \tag{1}$$

В H въвеждаме нова "отрицателна норма" чрез равенството

$$\|v\|_- \equiv \|l_v\| = \sup_{u\in H_+} \frac{|(v,u)|}{\|u\|_+}. \tag{2}$$

Пространството с отрицателна норма H_- получаваме, като попълним H по отрицателната норма $\|\cdot\|_-$.

За да покажем, че въведената норма е породена от скаларно произведение, ще използваме, че тъй като функционалът $l_v(u)$ е непрекъснат над H_+, по теоремата на Рис съществува еднозначно определен елемент Jv, така че

$$l_v(u) = (v, u) = (Jv, u)_+ \ \forall u \in H_+. \tag{3}$$

По такъв начин е дефиниран един линеен оператор $J : H \to H_+$ (като следствие от линейността на скаларните произведения по първия им аргумент).

Например, за да проверим, че $J(\lambda v) = \lambda J v$ изваждаме почленно равенствата

$$(\lambda v, u) = (J(\lambda v), u)_+,$$

$$\lambda(v, u) = \lambda(Jv, u)_+ = (\lambda Jv, u)_+$$

и получаваме

$$(J(\lambda v) - \lambda Jv, u)_+ = 0 \ \forall u \in H_+,$$

откъдето следва $J(\lambda v) - \lambda Jv = 0$, т.е. $J(\lambda v) = \lambda Jv$. По подобен начин доказваме и $J(v_1 - v_2) = Jv_1 - Jv_2$.

От (3) следва, че $\|l_v\| = \|Jv\|_+$, и тъй като в (1) установихме, че $\|l_v\| \leq \|v\|$, то

$$\|Jv\|_+ \leq \|v\| \ \forall v \in H,$$

т.е. $J : H \to H_+$ е ограничен (непрекъснат) линеен оператор с норма $\|J\| \leq 1$. Също така $\forall v \in H$ имаме

$$\|v\|_- \equiv \|l_v\| = \|Jv\|_+, \tag{4}$$

$$\|v\|_- \leq \|v\|, .$$

От (4) се вижда, че въведената отрицателна норма е породена от скаларното произведение

$$(v, h)_- \equiv (Jv, Jh)_+, \ v, h \in H.$$

В съчетание с дефиниционното равенство (3) за J това води до тъждествата

$$(v, h)_- = (v, Jh) = (Jv, h) = (Jv, Jh)_+ \ v, h \in H. \tag{5}$$

Също така имаме включванията

$$H_- \supset H \supset H_+$$

и неравенствата между нормите

$$\|v\|_- \leq \|v\| \leq \|v\|_+.$$

Операторът J изобразява H изометрично (със запазване на нормата) в подмножество на H_+ и той е непрекъснат върху H , което е навсякъде гъсто в H_-. Следователно J може да бъде продължен по непрекъснатост до линеен непрекъснат оператор I, който изометрично изобразява H_- в H_+ и разбира се $Iv = Jv$ за всички $v \in H$. Да напомним как става това.

Нека $v \in H_-$. Съществува такава редица $v_j \in H$, че $\|v_j - v\|_- \to 0$ при $j \to \infty$ и следователно $\|Jv_i - Jv_j\|_+ = \|v_i - v_j\|_- \to 0$ при $i, j \to \infty$, т.е. редицата Jv_j е фундаментална в H_+ и има граница $u \in H_+$, като $\|Jv_j - u\|_+ \to 0$ при $j \to \infty$.

Дефинираме

$$Iv \equiv u.$$

Тази дефиниция е коректна, защото u не зависи от избора на редицата $\{v_j\}$. Наистина, ако $h_j \in H$ е друга редица, за която $\|h_j - v\|_- \to 0$ и $\|Jh_j - w\|_+ \to 0$, при $j \to \infty$, имаме

$$\|u - w\|_+ = \lim_{j\to\infty} \|Jv_j - Jh_j\|_+ = \lim_{j\to\infty} \|v_j - h_j\|_- = 0.$$

Нека v, h са граници в H_- на редиците $v_j, h_j \in H$ съответно. От равенствата

$$\|v_j\|_- = \|Jv_j\|_+,\ (v_j, h_j)_- = (Jv_j, Jh_j)_+$$

след граничен преход при $j \to \infty$ получаваме

$$\|v\|_- = \|Iv\|_+,\ (v, h)_- = (Iv, Ih)_+,$$

т.е I е изометричен. Самостоятелно проверете, че при граничен преход линейността се запазва.

Сега забелязваме, че образът IH_- на H_- е затворено линейно подпространство на H_+, тъй като обратният оператор I^{-1} на I е непрекъснат (защото също е изометричен). За целта е ще докажем, че границата на всяка сходяща редица от елементи на IH_- е също от IH_-. Наистина, ако $v_j \in H_-$, $h \in H_+$ и $\|Iv_j - h\|_+ \to 0$, то редицата Iv_j е фундаментална в H_+ и следователно

$$\|v_i - v_j\|_- = \|Iv_i - Iv_j\|_+ \to 0,\ i, j \to \infty,$$

т.е. v_j е фундаментална в H_- и има граница $v \in H_-$. Но I е непрекъснат и $Iv = \lim\limits_{j\to\infty} Iv_j = h$, т.е. $h \in IH_-$.

Ще докажем, че $IH_- = H_+$, т.е. I изобразява H_- изометрично върху H_+. Това ще бъде така, ако успеем да проверим, че ортогоналното допълнение на IH_- в H_+ съдържа само нулевия елемент. Да допуснем, че елементът $h \in H_+$ е ортогонален на IH_-, т.е. $(h, Iv)_+ = 0$ за всички $v \in H_-$. Тогава $(h, v) = (h, Jv)_+ = (h, Iv)_+ = 0$ за всички $v \in H$ и при $v = h$ получаваме $\|h\|^2 = 0$, т.е. $h = 0$.

Сега искаме да се убедим, че скаларното произведение (v, u), $v, u \in H$ можем да додефинираме и за $v \in H_-$, $u \in H_+$. Най-напред забелязваме, че за $v \in H$, $u \in H_+$

$$|(v,u)| = |(Jv,u)_+| \leq \|Jv\|_+ \|u\|_+ = \|v\|_- \|u\|_+,$$

т.е. в сила е неравенството

$$|(v,u)| \leq \|v\|_- \|u\|_+, \ v \in H, \ u \in H_+, \tag{6}$$

което ще наричаме неравенство на Коши-Шварц, защото е аналог на неравенството на Коши-Буняковски. С негова помощ скаларното произведение ще продължим по непрекъснатост.

Нека $v_j \in H$, $v \in H_-$ и $\|v_j - v\|_- \to 0$ при $j \to \infty$. От неравенството (6) следва

$$|(v_i,u) - (v_j,u)| = |(v_i - v_j, u)| \leq \|v_i - v_j\|_- \|u\|_+ \to 0, \ i,j \to \infty,$$

откъдето заключаваме, че (v_j, u) е фундаментална редица от числа и има граница. Пак от това неравенство следва, че тази граница не зависи от избора на апроксимиращата редица v_j. Приемаме по дефиниция, че за $v \in H_-$ и $u \in H_+$

$$(v,u) \equiv \lim_{j\to\infty} (v_j, u)$$

и

$$(v,u) = (u,v).$$

Сега с граничен преход от (3), (5) и (6) получаваме съответно

$$(v,u) = (Iv,u)_+, \ v \in H_-, \ u \in H_+, \tag{7}$$

$$(v,h)_- = (v,Ih) = (Iv,h) = (Iv,Ih)_+, \ v,h \in H_-, \tag{8}$$

$$|(v,u)| \leq \|v\|_- \|u\|_+, \ v \in H_-, \ u \in H_+. \tag{9}$$

Да се убедим, че H_- съвпада с множеството от непрекъснатите над H_+ функционали. Нека елементът $v \in H_-$. Поради неравенството на Шварц (9), той поражда непрекъснат (ограничен) функционал над H_+ по формулата $l_v(u) \equiv (v,u), \ u \in H_+$. Ще покажем, че всеки непрекъснат над H_+ функционал $l(u)$ има този вид. По теоремата на Рис съществува такъв елемент $h \in H_+$, че $l(u) = (h,u)_+$ за всички $u \in H_+$ и като положим $Iv = h$, $v \in H_-$ от (7) следва

$$l(u) = (h,u)_+ = (Iv,u)_+ = (v,u), \ \forall u \in H_+,$$

като

$$\|l\| = \|h\|_+ = \|Iv\|_+ = \|v\|_-.$$

Като пример ще разгледаме пространството $H^{-k}(G)$ с отрицателна норма $\|v\|_{-k}$ построено по $H = L_2(G)$ и $H_+ = \mathring{H}^k(G)$, където k е естествено число. Напомняме, че $\mathring{H}^k(G)$ е затворената обвивка в $H^k(G)$ на $C_0^\infty(G)$. Съгласно общата конструкция изложена по-горе за $v \in L^2(G)$ имаме

$$\|v\|_{-k} = \sup_{u \in H^k(G)} \frac{|(v,u)|}{\|u\|_k}$$

и съществува изометрия I като са валидни аналозите на горните релации

$$(v,u) = (Iv,u)_k,\ v \in H^{-k}(G),\ u \in H^k(G),$$

$$(v,h)_{-k} = (v,Ih) = (Iv,h) = (Iv,Ih)_k,\ v,h \in H^{-k}(G),$$

$$|(v,u)| \le \|v\|_{-k}\|u\|_k,\ v \in H^{-k}(G),\ u \in H^k(G).$$

Убедете се самостоятелно, че са в сила включванията

$$\ldots \supset H^{-2}(G) \supset H^{-1}(G) \supset L^2(G) \supset H^1(G) \supset H^2(G) \ldots$$

(непрекъснатите функционали над по-малкото пространство са повече) и неравенствата между нормите

$$\ldots \le \|v\|_{-2} \le \|v\|_{-1} \le \|v\| \le \|v\|_1 \le \|v\|_2 \le \ldots$$

Да разгледаме задачата на Дирихле

$$Lu \equiv -\Delta u + u = f, G,$$

$$u|_\Gamma = 0,$$

предполагайки че G е област в R^m с граница Γ.

Напомняме, че при $f \in L^2(G)$ функцията $u \in \mathring{H}^1(G)$ наричаме обобщено решение на задачата на Дирихле, ако

$$(u,v)_1 = (f,v),\ \forall v \in \mathring{H}^1(G).$$

Дясната страна в това равенство има смисъл и за $f \in H^{-1}(G)$. Ще докажем, че при $f \in H^{-1}(G)$ съществува единствено обобщено решение $u \in \mathring{H}^1(G)$, т.е. обратният оператор на L повишава гладкостта с две единици.

За $f \in H^{-1}(G)$ разглеждаме линейния функционал $l_f(v) \equiv (f,v)$. Съгласно неравенството на Шварц

$$|l_f(v)| = |(f,v)| \le \|f\|_{-1}\|v\|_1$$

той е непрекъснат над $\mathring{H}^1(G)$. По теоремата на Рис съществува такъв елемент $u \in \mathring{H}^1(G)$, че $l_f(v) = (u,v)_1 = (f,v),\ \forall v \in \mathring{H}^1(G)$. С това съществуването е доказано. Единствеността следва от това, че решението на уравнението с дясна част $f = 0$ очевидно също е равно на нула.