9. Теорема за гладкост на обобщеното решение.

Нека G е ограничена подобласт на R^m с гладка граница $\Gamma \in C^l$, където $l \geq 1$ е цяло число. Напомняме, че Γ наричаме C^l гладка, ако в околност на $x^0 \in \Gamma$ имаме

$$\Gamma : x_i = \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1} \ldots, x_m),\ \varphi \in C^l,$$

за някое i между 1 и m, т.е локално Γ е график на C^l гладка функция (функция притежаваща непрекъснати производни до ред l включително).

За $u \in H^1(G)$, $v \in C_0^\infty(G)$ разглеждаме билинейната форма

$$B(u, v) = \int_G (a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + a_i u_{x_i} v + auv) dG,$$

като $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta\xi^2$, $\forall\xi \in R^m$, $\forall x \in \overline{G}$, $\theta = Const > 0$, и се подразбира сумиране от 1 до m по повтарящите се индекси.

Целта ни е да докажем следната

Теорема. Нека $l \geq 0$ е цяло число, границата $\Gamma \in C^{l+2}$, $a_{ij} \in C^{l+1}(\overline{G})$, $a_i, a \in C^{\max(1,l)}(\overline{G})$ $(i, j = 1, \ldots, m)$. Ако $u \in \mathring{H}^1(G)$ е обобщено решение на задачата на Дирихле с дясна част $f \in H^l(G)$, т.е.

$$B(u, v) = (f, v),\ \forall v \in C_0^\infty(G), \tag{1}$$

то $u \in H^{l+2}(G)$.

В тази теорема за гладкост се твърди, че гладкостта на решението на задачата на Дирихле, мерена по скалата на Соболевите пространства с цял неотрицателен показател, е с две единици по голяма от гладкостта на дясната страна. Като вземем предвид, че диференциалният оператор на задачата е от втори ред и сваля гладкостта с две единици виждаме, че този резултат е възможно най-хубавия. Това се дължи на факта, че разглеждаме диференциално уравнение с елиптичен оператор. Прието е в случая да се казва, че нямаме загуба на гладкост. Както ще видим по-нататък, при хиперболичните уравнения от втори ред гладкостта на решението ще бъде само с единица по-голяма от гладкостта на дясната страна, т.е. в хиперболичния случай имаме загуба на гладкост единица.

Предполагайки, че теоремата е вече доказана, ще получим съществуване на класическо гладко решение, като използваме теоремата на влагане на Соболев, според която при $l \geq k + \frac{m}{2}$ соболевото пространство $H^l(G)$ се влага в пространството от гладките функции $C^k(\overline{G})$ $(H^l(G) \subset C^k(\overline{G}))$, $l, k \geq 0$ са цели числа, т.е. всяка функция от $H^l(G)$ е равна почти навсякъде в G на функция от $C^k(\overline{G})$. Оттук веднага получаваме

Следствие. При $l \geq 2 + \frac{m}{2}$ обобщеното решение u на задачата на Дирихле принадлежи на $C^2(\overline{G})$ и е решение на задачата в класически смисъл.

По-нататък ще имаме нужда от теоремата на Банах-Сакс, която привеждаме без доказателство.

Да разгледаме е хилбертовото пространство H с норма $\|\cdot\|$ и скаларно произведение $(\cdot,\cdot)$.

Теорема (Банах-Сакс) Нека редицата от елементи $u_\nu \in H$ е ограничена, т.е. $\|u_\nu\| \leq M$, $\forall \nu$. Тогава от нея може да бъде избрана слабо сходяща подредица u_{ν_μ} , т.е. съществува $u \in H$, така че

$$(u_{\nu_\mu}, v) \to (u,v),\ \mu \to \infty,\ \forall v \in H.$$

Средните аритметични на членовете на тази подредица клонят силно (по норма) към елемента u , т.е.

$$\left\|\frac{u_{\nu_1} + \cdots + u_{\nu_\mu}}{\mu} - u\right\| \to 0,\ \mu \to \infty.$$

Най-напред ще изучим връзката между диференчните частни и обобщените производни. За целта ще докажем две спомагателни твърдения.

Лема 1. Нека редицата от функции $u_\nu \in H^1(G)$ $(\nu = 1,2,\dots)$ е слабо сходяща в $L^2(G)$ към функцията $u \in L^2(G)$ и

$$\|u_\nu\|_1 \leq C = Const. \tag{2}$$

Тогава $u \in H^1(G)$. Ако $u_\nu \in \mathring{H}^1(G)$, то $u \in \mathring{H}^1(G)$.

Доказателство. От (2) и теоремата на Банах-Сакс следва съществуването на слабо сходяща в $H^1(G)$ подредица $\{u_{\nu_\mu}\}_{\mu=1}^\infty$ за която редицата от средните аритметични $w_\mu {=} \frac{u_{\nu_1} + \cdots + u_{\nu_\mu}}{\mu}$ е сходяща в $H^1(G)$. Понеже $\{w_\mu\}_{\mu=1}^\infty$ клони слабо в $L^2(G)$ към u, то $u \in H^1(G)$ и $\|w_\mu - u\|_1 \to 0$ при $\mu \to \infty$. Ако $u_\nu \in \mathring{H}^1(G)$, то $w_\mu \in \mathring{H}^1(G)$, и следователно $u \in \mathring{H}^1(G)$, с което лема 1 е доказана.

Нека $u \in \mathring{H}^1(G)$. Ще считаме, че u е продължена като нула извън G. Тогава, ако G' е област в R^m, $\overline{G} \subset G'$, то $u \in \mathring{H}^1(G')$.

Въвеждаме диференчното частно

$$u^{h_i}(x) = \frac{u(x^{h_i}) - u(x)}{h_i}\ (i = 1,\dots,m),$$

където $x^{h_i} = (x_1,\dots,x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1},\dots,x_m)$, $1 \leq i \leq m$.

Лема 2. Ако $u \in \mathring{H}^1(G)$, то

$$\|u^{h_i}\| \leq \|u_{x_i}\|, \tag{3}$$

$$\|u^{h_i} - u_{x_i}\| \to 0 \text{ при } h_i \to 0, \tag{4}$$

където $1 \leq i \leq m$.

Доказателство. Нека $u \in C_0^\infty(G)$. Като използваме неравенството на Коши-Буняковски и смяна в реда на интегрирането, получаваме

$$\|u^{h_i}\|^2 = \int\limits_G \left| \frac{1}{h_i} \int\limits_0^{h_i} u_{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \tau, x_{i+1}, \ldots, x_m) d\tau \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \int\limits_G \left(\frac{1}{h_i} \int\limits_0^{h_i} u_{x_i}^2(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \tau, x_{i+1}, \ldots, x_m) d\tau \right) dx =$$

$$= \frac{1}{h_i} \int\limits_0^{h_i} \left(\int\limits_G u_{x_i}^2(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \tau, x_{i+1}, \ldots, x_m) dx \right) d\tau.$$

Тогава с помощта на неравенството

$$\int\limits_G \varphi^2(x^{h_i}) dx \leq \int\limits_G \varphi^2(x) dx, \ \varphi \in C_0^\infty(G),$$

заключаваме, че

$$\|u^{h_i}\| \leq \|u_{x_i}\|, \ u \in C_0^\infty(G).$$

Във верността на (3) за $u \in \mathring{H}^1(G)$ се убеждаваме с попълване (граничен преход).

За $u \in C_0^\infty(G)$ (4) е в сила, понеже u^{h_i} клони към u_{x_i} равномерно в G. Ако $u \in \mathring{H}^1(G)$, то съществува такава функция $w \in C_0^\infty(G)$, че $\|u - w\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогава от (3) следва

$$\|u^{h_i} - w^{h_i}\| \leq \|u_{x_i} - w_{x_i}\| \leq \|u - w\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$$

и

$$\|u^{h_i} - u_{x_i}\| \leq \|u^{h_i} - w^{h_i}\| + \|w^{h_i} - w_{x_i}\| + \|w_{x_i} - u_{x_i}\| < \varepsilon,$$

ако $|h_i|$ е достатъчно малко, с което лема 2 е доказана.

Доказателство на теоремата за гладкост. С G_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) ще означаваме подобласти на G, за които

$$G_0 \subset \overline{G_0} \subset G_{\nu+1} \subset \overline{G_{\nu+1}} \subset G_\nu \subset \overline{G_\nu} \subset G \ (\nu = 1, 2, \ldots),$$

като G_0 може да бъде произволна подобласт на G, $\overline{G_0} \subset G$.

Ще покажем, че $u \in H^{l+2}(G_0)$.

Най-напред разглеждаме случая $l = 0$. Нека $\eta \in C_0^\infty(G_2)$, $\eta|_{G_3} = 1$. Очевидно $w = \eta u \in \mathring{H}^1(G)$. От (1) следва валидността на равенството

$$B(w, v) = (\Psi, v), \ \forall v \in C_0^\infty(G), \tag{5}$$

където
$$\eta f + 2a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + [(a_{ij}\eta_{x_i})_{x_j} + a_i\eta_{x_i}]u = \Psi \in L^2(G). \tag{6}$$
Да разгледаме $B(w^{h_\mu}, v)$. Ще предполагаме, че $v \in C_0^\infty(G_1)$ и $|h_\mu| \le h_0$, $1 \le \mu \le m$, където $h_0 > 0$ е по-малко от разстоянието между множествата ∂G_1 и $\partial G_2 \cup \Gamma$.

С θ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ще означаваме положителни константи, които не зависят от h_μ и v.

Като използваме формулата
$$\varphi^{h_\mu}(x)\psi(x) = (\varphi\psi)^{h_\mu}(x) - \varphi(x^{h_\mu})\psi^{h_\mu}(x),$$
равномерната ограниченост в $\overline{G_1}$ на $a_{ij}^{h_\mu}$, $a_i^{h_\mu}$, a^{h_μ}, $(i, j = 1, \ldots, m)$ и равенството
$$(w^{h_\mu}, v) = -(w, v^{-h_\mu}),\ w \in L^2(G),\ v \in C_0^\infty(G_1),$$
получаваме, че за всяко $v \in C_0^\infty(G_1)$
$$|B(w^{h_\mu}, v)| \le |B(w, v^{-h_\mu})| + \theta_1\|v\|_1. \tag{7}$$

От (5) с v^{-h_μ} вместо v и (3) следва
$$|B(w, v^{-h_\mu})| \le \theta_2\|v^{-h_\mu}\| \le \theta_2\|v\|_1.$$
Като вземем предвид (7) заключаваме, че
$$|B(w^{h_\mu}, v)| \le \theta_3\|v\|_1,\ \forall v \in C_0^\infty(G_1). \tag{8}$$

За произволна функция $v \in C_0^\infty(G)$ е в сила оценката
$$\theta_4\|v\|_1^2 \le |B(v, v)| + \theta_5\|v\|^2. \tag{9}$$

Спомощта на попълване се убеждаваме, че (8) и (9) са валидни за произволна функция $v \in \mathring{H}^1(G_1)$. Понеже $w^{h_\mu} \in \mathring{H}^1(G_1)$ и съгласно лема 2 $\|w^{h_\mu}\| \le \|w\|_1$, от (8) и (9) с w^{h_μ} вместо v следва
$$\theta_4\|w^{h_\mu}\|_1^2 \le \theta_3\|w^{h_\mu}\|_1 + \theta_6,$$
откъдето получаваме, че
$$\|w^{h_\mu}\|_1 \le \theta_7. \tag{10}$$
От лема 2 знаем, че $\|w^{h_\mu} - w_{x_\mu}\| \to 0$ при $h_\mu \to 0$ и като приложим лема 1 от (10) следва $w_{x_\mu} \in \mathring{H}^1(G)$, т.е. $w \in H^2(G)$. Понеже $\eta|_{G_3} = 1$, то с това е доказано, че $u \in H^2(G_3)$ и следователно $u \in H^2(G_0)$.

Да разгледаме сега случая $l = 1$. Нека $\eta_1 \in C_0^\infty(G_3)$, $\eta_1|_{G_4} = 1$. Тогава за $w_1 = \eta_1 w = \eta_1 u$ имаме
$$B(w_1, v) = (\Psi_1, v),\ \forall v \in C_0^\infty(G), \tag{11}$$

където $\Psi_1 \in \mathring{H}^1(G)$, (вж. (6)). Като поставим v_{x_μ} $(1 \leq \mu \leq m)$ вместо v в (11) и интегрираме по части, получаваме

$$B(w_{1x_\mu}, v) = (\Psi_1', v),\ \forall v \in C_0^\infty(G_2), \tag{12}$$

където

$$\Psi_1' = \Psi_{1x_\mu} - [(a_{ijx_\mu} w_{1x_i})_{x_j} + a_{ix_\mu} w_{1x_i} + a_{x_\mu} w_1],\ \Psi_1' \in L^2(G).$$

Понеже $w_{1x_\mu} \in \mathring{H}^1(G_3)$ $(w, w_{x_\mu} \in \mathring{H}^1(G_2))$, то както по-горе се убеждаваме, че $w_{1x_\mu x_\nu} \in \mathring{H}^1(G)$, $(1 \leq \mu, \nu \leq m)$, т.е. $u \in H^3(G_4)$. За $l \geq 2$ разсъждаваме аналогично.

Теоремата ще бъде доказана, ако установим желаната гладкост на u и в малка околност на произволна точка $x^0 \in \Gamma$ от границата. Без ограничение на общността можем да считаме, че в малка околност на x^0 повърхнината Γ има уравнение $\Gamma : x_m = 0$. Общият случай се свежда до този с $(l+2)$–кратно гладка локална смяна на променливата x, като коефициентите на формата B запазват гладкостта си.

Нека $\rho > 0$ е толкова малко, че полукълбото

$$\Omega_\rho = \{x \in R^m : |x - x^0| < \rho,\ x_m > 0\}$$

се съдържа в G. Твърдим, че $u \in H^{l+2}(\Omega_{\rho_0})$, $\rho_0 < \rho$. Най-напред разсъждавайки както в разгледания по-горе случай показваме, че $\partial_{x'}^{\alpha'} u \in H^1(\Omega_{\rho_0})$, $|\alpha'| \leq l+1$, където $x' = (x_1, \ldots, x_{m-1})$, $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})$. Тогава съществуването на обобщените производни

$$\partial_x^\alpha u \in L_2(\Omega_{\rho_0}),\ |\alpha| \leq l+2,\ \alpha_m \geq 2,$$

получаваме от (1), понеже $a_{mm} \neq 0$ в $\overline{\Omega}_{\rho_0}$.

С това теоремата е доказана.