7. Теореми за влагане.

Ще започнем с почти очевидното твърдение, че при $l_1 > l_2$ имаме влагането

$$H^{l_1}(G) \subset H^{l_2}(G),$$

като операторът I на влагане

$$H^{l_1}(G) \ni u \mapsto u \in H^{l_2}(G)$$

е очевидно ограничен линеен оператор $I : H^{l_1}(G) \to H^{l_2}(G)$, поради неравенството

$$\|u\|_{l_2} \leq \|u\|_{l_1},\ u \in H^{l_1}(G).$$

Една от целите ни ще бъде да покажем, че за произволна област G, ако функцията $u \in H^l(G)$ и $l > k + \frac{m}{2}$, където m е размерността на G, то функцията u съвпада почти навсякъде с функция от $C^k(G)$, притежаваща в G непрекъснати производни до ред k, т.е. имаме влагането

$$H^l(G) \subset C^k(G).$$

Резултати от този тип са получени най-напред от Соболев и се наричат теореми на Соболев за влагането. Непрекъснатостта на оператора за влагане в подходящи норми е налице само при определени геометрични предположения за границата.

По-надолу ще предполагаме, че G е ограничена област, притежаваща свойството на отсечката, т.е. областта е едностранно разположена спрямо границата си Γ, като допълнително притежава свойството на конуса, което сега ще формулираме.

Дефиниция. Ако $A, B \subset R^m$, то с $A + B$ ще означаваме множеството $A + B = \{z \in R^m : z = x + y,\ x \in A,\ y \in B\}$. Ако $A = \{a\}$ има само една точка a, то ще използваме и означението $a + B = \{z \in R^m : z = a + y,\ y \in B\}$, т.е. $a + B$ е транслираното с вектора a множество B.

Дефиниция. Конус ще наричаме множеството от точки ограничено, от сфера с даден радиус и околната повърхнина на прав кръгов конус с връх в центъра на сферата.

Дефиниция. Казваме, че областта G притежава свойството на конуса, ако границата ѝ Γ притежава крайно отворено покритие $\{G_i\}$, т.е. $\Gamma \subset \cup_{i=1}^N G_i$ и за всяко i има конус с връх в началото K_i, такъв че при $x \in G \cap G_i$ имаме $x + K_i \subset G$.

Теорема. (Соболев) Нека G е ограничена област, притежаваща свойството на отсечката и свойството на конуса. Ако $l > k + \frac{m}{2}$, то $H^l(G) \subset C^k(\overline{G})$, т.е. ако функцията $u \in H^l(G)$, тя съвпада почти навсякъде в G с функция от $C^k(\overline{G})$.

Първо ще разгледаме случая $k = 0$. Схемата на доказателството на теоремата на Соболев за влагане е подобна на вече приложената схема при доказателството на теоремата за следата.

Най-напред за гладки функции $u \in C^\infty(\overline{G})$ ще установим оценката

$$\|u\|_{C(\overline{G})} \leq C\|u\|_l, \ C > 0,$$

където

$$\|u\|_{C(\overline{G})} = \max_{x \in \overline{G}} |u(x)|$$

е равномерната норма в $C(\overline{G})$. Напомняме, че $C(\overline{G})$ с тази норма е пълно пространство и сходимоста на редица по тази норма отговаря на равномерна сходимост в $\overline{G}$. Тази оценка показва, че разглеждан само за гладки функции операторът на влагане

$$I : H^l(G) \supset C^\infty(\overline{G}) \to C(\overline{G})$$

е ограничен линеен оператор и понеже $C^\infty(\overline{G})$ е навсякъде гъсто в $H^l(G)$ множество, можем да продължим I по непрекъснатост до ограничен върху цялото пространство $H^l(G)$ оператор със същата норма

$$\tilde{I} : H^l(G) \to C(\overline{G}),$$

с което влагането $H^l(G) \subset C(\overline{G})$ ще бъде доказано.

И така, за да докажем теоремата, трябва да установим горната оценка. Нека G_0 е компактно вложено в G отворено множество, такова, че $\overline{G_0} \subset G$, $G \subset \cup_{i=0}^N G_i$. Ясно е, че кой да е конус K_0 с връх в началото и достатъчно малък радиус удовлетворява условието $x + K_0 \subset G$ при $x \in G_0$. Нека x е произволна точка от G и K е конусът с връх в началото и радиус R, т.е. отсечен от сфера с радиус R, съответстващ на съдържащото x отворено множество, така че $x + K \subset G$ (за краткост изпускаме индексите).

Да въведем срязващата функция $\eta \in C_0^\infty$ с носител $\operatorname{supp} \eta \in (-R, R)$, която е равна на единица в околност на $0 \in R$. Въвеждаме полярна (сферична) координатна система с начало във върха на конуса x и нека $r = |y - x|$ е полярният радиус, като $K \ni y = x + re$, $|e| = 1$. Най-напред предполагаме, че единичният вектор e е фиксиран и се мени само r. Да разгледаме функцията $v(r) = u(x+re)\eta(r)$. Прилагайки формулата на Нютон-Лайбниц веднага получаваме

$$v(0) = -\int_0^R \frac{d}{dr} v(r) dr.$$

Интегрирайки многократно по части, като очевидно граничните членове са равни на нула заради анулирането на r в нулата и на срязващата функция

η при $r = R$, последователно получаваме

$$v(0) = \int\limits_0^R r\frac{d^2}{dr^2}v(r)dr = \cdots = \frac{(-1)^l}{(l-1)!}\int\limits_0^R r^{l-1}\frac{d^l}{dr^l}v(r)dr.$$

Повдигайки полученото равенство на квадрат и прилагайки интегралното неравенство на Коши-Буняковски получаваме

$$|v(0)|^2 = \left(\frac{1}{(l-1)!}\right)^2\left(\int\limits_0^R r^{l-1-\frac{m-1}{2}}\frac{d^l}{dr^l}v(r)r^{\frac{m-1}{2}}dr\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{(l-1)!}\right)^2\int\limits_0^R r^{2(l-1)-(m-1)}dr\int\limits_0^R\left|\frac{d^l}{dr^l}v(r)\right|^2 r^{m-1}dr =$$

$$\leq \left(\frac{1}{(l-1)!}\right)^2\frac{R^{2l-m}}{2l-m}\int\limits_0^R\left|\frac{d^l}{dr^l}v(r)\right|^2 r^{m-1}dr,$$

т.е.

$$|v(0)|^2 \leq C_1\int\limits_0^R\left|\frac{d^l}{dr^l}v(r)\right|r^{m-1}dr,$$

с константа $C_1 > 0$. Специално отбелязваме, че стойността на пресметнатия по-горе интеграл е крайна, благодарение на валидността на условието $l > \frac{m}{2}$, т.е. $2l - m > 0$.

След това интегрираме по σ – парчето от единичната сфера, което повърхнината на конуса отсича от нея и стигаме до неравенството

$$|v(0)|^2 \operatorname{mes}\sigma = |v(0)|^2\int\limits_\sigma d\sigma \leq C_1\int\limits_\sigma\int\limits_0^R\left|\frac{d^l}{dr^l}v(r)\right|^2 r^{m-1}drd\sigma,$$

т.е. с нова константа $C_2 > 0$ имаме

$$|v(0)|^2 \leq C_2\int\limits_K\left|\frac{d^l}{dr^l}v(r)\right|^2 dK.$$

От правилото на Лайбниц за диференциране на произведение имаме

$$\left|\frac{d^l}{dr^l}v(r)\right|^2 = \left|\sum_{\nu=0}^{l}\binom{l}{\nu}\eta^{(\nu)}(r)\partial_r^\nu u(x+re)\right|^2 \leq$$

$$\leq C_3 \sum_{\nu=0}^{l} |\partial_r^\nu u(x+re)|^2.$$

Като използваме, че

$$\partial_r^\nu u(x+re) = \sum_{|\alpha|=\nu} e^\alpha \partial^\alpha u(x+re)$$

и $|e| = 1$ получаваме с $C_4 > 0$

$$\left|\partial_r^\nu u(x+re)\right|^2 \leq C_4 \sum_{|\alpha|=\nu} \left|\partial^\alpha u(x+re)\right|^2$$

Понеже $u(x) = v(0)$, комбинирайки горната оценка и тази окончателно получаваме с нова константа $C_5 > 0$

$$|u(x)|^2 \leq C_5^2 \int\limits_K \sum_{|\alpha|\leq l} \left|\partial^\alpha u\right|^2 dK \leq C_5^2 \|u\|_l,$$

Сега избираме константата C така, че да бъде по-голяма от всяка от получаващите се за отделните области G_i константи, така че имаме

$$|u(x)| \leq C\|u\|_l,\ x \in G.$$

Тъй като оценката получихме за произволно x от G, по непрекъснатост тя е валидна и за произволно x от $\overline{G}$ и важи нужната ни оценка

$$\|u\|_{C(\overline{G})} = \max_{x\in\overline{G}} |u(x)| \leq C\|u\|_l,\ u \in C^\infty(\overline{G}).$$

Вече обяснихме, как от нея следва теоремата за влагане, но ще приведем и директно доказателство. Нека $u \in H^l(G)$ и $u_\nu \in C^\infty(\overline{G})$ е редица, която апроксимира u, т.е. $\|u-u_\nu\|_l \to 0$ при $\nu \to \infty$. Редицата u_ν е фундаментална в $H^l(G)$ и от оценката

$$0 \leq \|u_\nu - u_\mu\|_{C(\overline{G})} \leq C\|u_\nu - u_\mu\|_l \to 0 \text{ при } \nu \to \infty$$

следва, че тя е фундаментална и в $C(\overline{G})$ редица. Следователно съществува такава непрекъсната функция $h \in C(\overline{G})$, че имаме равномерната сходимост $\|u_\nu - h\|_{C(\overline{G})} \to 0$ при $\nu \to \infty$. Тъй като областта G е ограничена, от равномерната сходимост следва и сходимост в $H^l(G)$, т.е. $\|u_\nu - h\|_l \to 0$ при $\nu \to \infty$. Но $\|u_\nu - u\|_l \to 0$ при $\nu \to \infty$ и тъй като една сходяща редица има единствена граница, то $u = h \in C(\overline{G})$, което доказва теоремата при $k = 0$.

Нека сега $k > 0$ е произволно цяло число, $u \in H^l(G)$ и $l > k + \frac{m}{2}$. Виждаме, че при $|\alpha| \leq k$ имаме $\partial^\alpha u \in H^{l-|\alpha|}(G)$, като $l - |\alpha| \geq l - k > \frac{m}{2}$ и съгласно вече доказаното $\partial^\alpha u \in C(\overline{G})$, т.е. $u \in C^k(\overline{G})$.

Ще отбележим, че до този резултат можехме да стигнем, като предварително за гладки функции изведем оценката

$$\|u\|_{C^k(\overline{G})} = \sum_{|\alpha|\le k} \max_{x\in\overline{G}} |\partial^\alpha u(x)| \le C\|u\|_l,\ u \in C^\infty(\overline{G}),$$

като сходимост по $C^k(\overline{G})$-нормата означава равномерна сходимост на функцията и производните ѝ до ред k в $\overline{G}$.

Анонсираният в началото резултат

$$u \in H^l(G),\ l > k + \frac{m}{2} \Longrightarrow H^l(G) \subset C^k(G),$$

където G е произволна област, е достатъчно да установим локално в околност на произволна точка x_0. Например избирайки за околност кълбото $B_R(x_0) \subset G$, съгласно вече доказаната теорема имаме $u \in C^k(\overline{B_R(x_0)})$ и твърдението е установено.

Нека B и B' са банахови пространства. Напомняме, че един линеен оператор $L : B \to B'$ наричаме компактен, ако изобразява едно ограничено подмножество на B в подмножество на B', затворената обвивка на което е компактна в B'. Ясно е, че всеки компактен оператор е ограничен, тъй като всяко компактно множество е ограничено. Свойството компактност може да бъде формулирано и чрез редици. Един линеен оператор е компактен тогава и само тогава, когато изобразява всяка ограничена редица с елементи от B в редица, от която можем да изберем сходяща в B' подредица.

Нека $u \in H^l(G)$, $l \ge 1$. Операторът на влагане $S : H^l(G) \to H^{l-1}(G)$, като $H^l(G) \ni u \mapsto u \in H^{l-1}(G)$, т.е. $S(u) = u$ съпоставя на функцията $u \in H^l(G)$ същата функция, но вече разглеждана като елемент от множеството $u \in H^{l-1}(G)$.

Теорема (Релих, Кондрашов, за компактното влагане.) Нека G е ограничена област. Влагането $H^l(G) \to H^{l-1}(G)$, $l \ge 1$ е компактно. (Без доказателство)

От този резултат, като следствие веднага получаваме твърдението, че и влагането $\mathring{H}^l(G) \to \mathring{H}^{l-1}(G)$, $l \ge 1$ е компактно.

Ще отбележим само, че границата на областта може да бъде произволна, но изискването за ограниченост на областта е съществено и без него теоремата за компактното влагане не е вярна, както се вижда от следния едномерен пример.

Влагането $H^1(-\infty,\infty) \to H^0(-\infty,\infty) = L_2(-\infty,\infty)$ не е компактно. Наистина, да разгледаме функцията $f_0 \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$, за която носителят ѝ $\operatorname{supp} f_0 \subset (0,1)$. Нека $\|f_0\|_0 = \|f_0\| = a > 0$, $\|f_0\|_1 = b \ge a$.

За всяко $\nu \ge 1$ дефинираме функциите $f_\nu(x) = f_0(x-\nu)$, $x \in (-\infty,\infty)$ като очевидно $\|f_\nu\|_0 = a$, $\|f_\nu\|_1 = b\ \forall\nu$, т.е. редицата $\{f_\nu\}$ е ограничена в

$H^1(-\infty, \infty)$. Ако влагането $H^1(-\infty, \infty) \to H^0(-\infty, \infty)$ е компактно, редицата $\{f_\nu\}$ трябва да притежава сходяща в $L_2(-\infty, \infty)$ подредица $\{f_{\nu_\mu}\}$ с граница f. Но тогава от подредицата $\{f_{\nu_\mu}\}$ можем да изберем нова подредица $\{f_{\nu_{\mu_k}}\}$, сходяща почти навсякъде към f. Тъй като очевидно тази подредица клони за почти всяко $x \in (-\infty, \infty)$ към нула (върху произволен интервал (α, β) всички членове на подредицата с номера $k \geq k_0$, където k_0 е достатъчно голямо, са равни на нула), то $f = 0$ почти навсякъде и $\|f\| = 0$. От друга страна, $\|f_{\nu_{\mu_k}}\| \to \|f\|$ при $k \to \infty$ и следователно $\|f\| = a > 0$ – противоречие.