6. Теорема за следата.

В граничните задачи за частни диференциални уравнения, обикновено по границата на областта задаваме стойностите на търсените функции или или на техните производни. Нека G е област с граница Γ. Ако $u \in C(\overline{G})$ е непрекъсната функция в затворената област $\overline{G}$, задаването на стойностите на u върху границата Γ предписва определено поведение на u и вътре в областта, поне в близост до границата. Можем също така да кажем, че поведението на непрекъснатата функция $u \in C(\overline{G})$ вътре в областта, близо до границата Γ, предопределя поведението на функцията u върху границата Γ. Стойността на u върху Γ означаваме с $u|_\Gamma$ и наричаме рестрикция. Терминът рестрикция на функция, т.е. ограничение, подсказва, че функцията $u|_\Gamma : \Gamma \to R$ дефинираме, просто като се ограничим с разглеждането на функцията $u : \overline{G} \to R$ само върху подмножеството Γ.

Ако разгледаме една функция $u \in H^l(G)$, за нея нея понятието рестрикция няма смисъл, защото u е функция със сумируем квадрат, дефинирана почти навсякъде, и няма смисъл да говорим за стойност на тази функция въху границата Γ, която е множество с обемна лебегова мярка нула. Възниква въпросът, принадлежността на u на соболевия клас $H^l(G)$ в G предопределя ли поведение върху Γ, каква "следа" оставя u въху Γ? Ще видим, че за функции u от $H^l(G)$ при $l \geq 1$ можем да въведем понятието "следа" върху повърхнината Γ, което е аналог на понятието рестрикция на непрекъсната функция от $C(\overline{G})$ върху Γ, като следата на непрекъсната функция $u \in C(\overline{G}) \cap H^l(G)$ ще съвпада с рестрикцията ѝ. Следата върху едно парче от Γ се определя само от стойностите u в околност на това парче. Понятието следа ще бъде също толкова полезно при гранични задачи, решенията на които търсим в класовете на Соболев, колкото е полезно понятието рестрикция върху границата за класически решения, които са непрекъснати функции от $C(\overline{G})$.

Най-напред да кажем какво ще разбираме под сумируема въху Γ функция и какво ще наричаме функция със сумируем квадрат върху Γ.

По-нататък обикновено ще предполагаме, че G е ограничена област с частично-гладка граница Γ, която се състои от краен брой C^1-гладки парчета Γ_i, т.е.

$$\Gamma = \cup_{i=1}^N \Gamma_i.$$

Под C^1-гладко парче Γ_i ще разбираме $(m-1)$-мерна повърхнина, която е график на C^1-гладка функция на $m-1$ променливи, дефинирана върху ограничена затворена област, например

$$\Gamma_i : x_m = \varphi(x_1, \dots, x_{m-1}),\ x' = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \overline{D},$$

където $\overline{D}$ е ограничена затворена област, а $\varphi \in C^1(\overline{D})$. Ролята на x_m може да изпълнява коя да е друга променлива.

Дефиниция. Ще казваме, че $f : \Gamma_i \to R$ е сумируема върху Γ_i функция, ако функцията

$$f(x', \varphi(x'))\sqrt{1 + \varphi^2_{x_1}(x') + \cdots + \varphi^2_{x_{m-1}}(x')}$$

е сумируема върху D функция. Интеграл от f върху Γ_i ще наричаме числото

$$\int\limits_{\Gamma_i} f d\Gamma = \int\limits_D f(x', \varphi(x'))\sqrt{1 + \varphi^2_{x_1}(x') + \cdots + \varphi^2_{x_{m-1}}(x')} dD.$$

Ако f е непрекъсната върху Γ_i функция, това е познатата ни дефиниция за повърхнинен интеграл (от първи род, върху неориентирана повърхност). Интегрирането върху повърхнина е еквивалентно на интегрирането върху плоска $(m-1)$-мерна област.

Дефиниция. Ще казваме, че функцията $f : \Gamma \to R$ е сумируема върху Γ, т.е. $f \in L_1(\Gamma)$, ако f е сумируема върху всяко парче Γ_i, $i = 1, \ldots, N$ и по дефиниция приемаме, че

$$\int\limits_\Gamma f d\Gamma = \sum_{i=1}^N \int\limits_{\Gamma_i} f d\Gamma.$$

Няма да обосноваваме, че дефиницията е коректна и $\int\limits_\Gamma f d\Gamma$ не зависи от от начина на разбиване на Γ на парчета. Приемаме, че това е "интуитивно" ясно.

В $L_1(\Gamma)$ въвеждаме норма $\|f\|_{L_1(\Gamma)} = \int\limits_\Gamma |f| d\Gamma$, спрямо която то е пълно, т.е. банахово пространство. Ще разглеждаме и пространството от функции със сумируем върху Γ квадрат, с норма $\|f\|_{L_2(\Gamma)} = \int\limits_\Gamma |f|^2 d\Gamma$, което е пълно и дори хилбертово пространство (докажете!).

Най-напред ще дефинираме следата на функцията $u \in H^1(G)$, върху долната основа Γ' на цилиндъра

$$\Pi = D \times (a, b) = \{x \in R^m : x = (x', x_m),\ x' \in D,\ x_m \in (a, b)\},$$

където D е ограничена област, а $\Gamma' = \{(x', a) : x' \in \overline{D}\}$ и $\Gamma'' = \{(x', b) : x' \in \overline{D}\}$ са съответно долната и горната основа. За целта ще ни е нужна априорна оценка, която ще установим за гладки функции $v \in C^\infty(\overline{\Pi})$. Нека η е безкрайно гладка "срязваща" функция $\eta \in C_0^\infty(R^m)$, която е равна на 1 в околност на Γ' и е равна на 0 в околност на Γ''.

От формулата на Лайбниц-Нютон за пресмятане на едномерен интеграл върху отсечка получаваме

$$v(x', a) = (v\eta)(x', a) = -\int\limits_a^b (v\eta)_{x_m}(x', x_m) dx_m =$$

$$= -\int\limits_a^b \Big(v_{x_m}(x', x_m)\eta(x', x_m) + v(x', x_m)\eta_{x_m}(x', x_m) \Big) dx_m.$$

Тъй като $|\eta|$ и $|\eta_{x_m}|$ са ограничени функции върху $\overline{\Pi}$, например от константата C_1, като използваме обикновеното и интегралното неравенство на Коши-Буняковски, последователно получаваме

$$|v(x', a)| \le \int\limits_a^b |v_{x_m}\eta + v\eta_{x_m}| dx_m \le$$

$$\le \int\limits_a^b \Big(|v_{x_m}(x', x_m)||\eta(x', x_m)| + |v(x', x_m)||\eta_{x_m}(x', x_m)| \Big) dx_m \le$$

$$\le C_1 \int\limits_a^b \big(1 \cdot |v_{x_m}(x', x_m)| + 1 \cdot |v(x', x_m)| \big) dx_m \le$$

$$\le C_1\sqrt{2} \int\limits_a^b 1 \cdot \big(|v_{x_m}(x', x_m)|^2 + |v(x', x_m)|^2 \big)^{\frac{1}{2}} dx_m \le$$

$$\le C_1\sqrt{2} \Big(\int\limits_a^b 1 \cdot dx_m \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_a^b \big(|v_{x_m}(x', x_m)|^2 + |v(x', x_m)|^2 \big) dx_m \Big)^{\frac{1}{2}},$$

т.е.

$$|v(x', a)| \le C_2 \Big(\int\limits_a^b \big(|v_{x_m}(x', x_m)|^2 + |v(x', x_m)|^2 \big) dx_m \Big)^{\frac{1}{2}},$$

където $C_2 = C_1\sqrt{2}(b-a)^{\frac{1}{2}}$. Повдигаме на квадрат това неравенство,

$$|v(x', a)|^2 \le C_2^2 \int\limits_a^b \big(|v_{x_m}(x', x_m)|^2 + |v(x', x_m)|^2 \big) dx_m,$$

след което интегрираме по x' върху D и получаваме

$$\int\limits_{\Gamma'} |v|^2 d\Gamma = \int\limits_D |v(x', a)|^2 dD \le$$

$$\le C_2^2 \int\limits_D \Big(\int\limits_a^b \big(|v_{x_m}(x', x_m)|^2 + |v(x', x_m)|^2 \big) dx_m \Big) dx' =$$

$$= C_2^2 \int_{\Pi} \bigl(|v_{x_m}(x)|^2 + |v(x)|^2\bigr)dx,$$

т.е.

$$\|v\|^2_{L_2(\Gamma')} \le C_2^2 \int_{\Pi} \bigl(v^2_{x_m} + v^2\bigr)dx. \tag{$*$}$$

Неравенството ще усилим, ако в подинтегралния израз добавим и квадратите на останалите производни на v. Получаваме

$$\|v\|^2_{L_2(\Gamma')} \le C_2^2 \int_{\Pi} \bigl(v^2_{x_1} + \cdots + v^2_{x_m} + v^2\bigr)dx = C_2^2 \|v\|^2_{H^1(\Pi)}$$

и след коренуване на полученото неравенство стигаме до нужната ни оценка

$$\|v\|_{L_2(\Gamma')} \le C_2 \|v\|_{H^1(\Pi)}. \tag{$**$}$$

Тази оценка е ключова за въвеждане на понятието следа върху Γ'. Неравенството $(**)$ показва, че линейният оператор S вземане на рестрикция на една гладка функция $v \in C^\infty(\overline{\Pi})$, т.е. $S(v) = v|_{\Gamma'}$, е ограничен линеен оператор

$$S : H^1(\Pi) \supset C^\infty(\overline{\Pi}) \to L_2(\Gamma').$$

$C^\infty(\overline{\Pi})$ е навсякъде гъсто в $H^1(\Pi)$ и чрез стандартна конструкция можем да продължим по непрекъснатост S до ограничения линеен оператор

$$\tilde{S} : H^1(\Pi) \to L_2(\Gamma'),$$

дефиниран върху цялото $H^1(\Pi)$. За $u \in H^1(\Pi)$ следа върху Γ' ще наричаме $\tilde{S}(u)$ и както при гладките функции ще използваме и за следата означението $\tilde{S}(u) = u|_{\Gamma'}$. Очевидно следата на гладката функция $v \in C^\infty(\overline{\Pi})$ съвпада с нейната рестрикция. За да установим това за функция $v \in C(\overline{\Pi}) \cap H^1(\Pi)$ са необходими повече усилия, които ще си спестим засега. Произволът в избора на срязваща функция показва, че следата върху Γ' зависи само от стойностите на u в околност на Γ'. Всъщност по този начин определяме следа на срязаната функция $u\eta$.

Да си припомним как става продължението на S до $\tilde{S}$. Нека $u \in H^1(\Pi)$. Тъй като $v \in C^\infty(\overline{\Pi})$ е навсякъде гъсто в $H^1(\Pi)$, съществува такава апроксимираща редица $v_\nu \in C^\infty(\overline{\Pi})$, $\nu = 1, 2, \ldots$, че $\|u - v_\nu\|_{H^1(\Pi)} \to 0$ при $\nu \to \infty$. Като сходяща в $H^1(\Pi)$ редица, $\{v_\nu\}$ е и фундаментална в $H^1(\Pi)$ редица, т.е. $\|v_\nu - v_\mu\|_{H^1(\Pi)} \to 0$ при $\nu, \mu \to \infty$.

От оценката $(**)$ следва,

$$\|v_\nu - v_\mu\|_{L_2(\Gamma')} \le C_2 \|v_\nu - v_\mu\|_{H^1(\Pi)} \to 0 \text{ при } \nu, \mu \to \infty,$$

т.е. и рестрикциите $S(v_\nu) = v_\nu|_{\Gamma'}$ на v_ν образуват фундаментална в $L_2(\Gamma')$ редица и съществува такава функция $h \in L_2(\Gamma')$, че $\|h - v_\nu\|_{L_2(\Gamma')} \to 0$ при $\nu \to \infty$ (защото $L_2(\Gamma')$ е пълно). Полагаме $\tilde{S}(u) = h$ и h наричаме следа $\tilde{S}(u) = u|_{\Gamma'}$ на u върху Γ'. Дефиницията е коректна, защото следата $\tilde{S}(u) = u|_{\Gamma'}$ не зависи от избора на апроксимиращата редица. Това пак следва от оценката $(**)$. Наистина, нека за друга редица v'_ν имаме $\|u - v'_\nu\|_{H^1(\Pi)} \to 0$ при $\nu \to \infty$. Повтаряйки горните разсъждения отново получаваме, че съществува такава функция h', че $\|h' - v'_\nu\|_{L_2(\Gamma')} \to 0$ при $\nu \to \infty$.

Понеже редиците v'_ν и v_ν имат една и съща граница u, то редицата с общ член $v'_\nu - v_\nu$ клони в $H^1(\Pi)$ към 0 и от неравенството $(**)$ имаме

$$0 \leq \|v'_\nu - v_\nu\|_{L_2(\Gamma')} \leq C_2 \|v'_\nu - v_\nu\|_{H^1(\Pi)} \to 0 \text{ при } \nu \to \infty,$$

т.е. редицата $v'_\nu - v_\nu$ клони в $L_2(\Gamma')$ към 0. Но $(v'_\nu - v_\nu) \to (h' - h)$ при $\nu \to \infty$ в $L_2(\Gamma')$ и следователно $h' - h = 0$, т.е. $h' = h$.

Забележка. Използвайки оценката $(*)$ можем да дефинираме следа на u въху Γ', дори ако знаем само, че $u \in L_2(\Pi)$ и съществува обобщената производна $u_{x_m} \in L_2(\Pi)$ (обобщена производна в трансверзално на Γ' направление).

Сега да дефинираме понятието следа в случая, когато долната основа Γ' на цилиндъра Π е криволинейна повърхнина. За целта е достатъчно да получим аналог на оценката $(**)$, правейки нужните дребни промени в използваните по-горе разглеждания.

Нека

$$\Pi = \{x \in R^m : x = (x', x_m),\ x' \in D,\ a \leq \varphi(x') < x_m < b\},$$

където D е ограничена затворена област, $\varphi \in C^1(\overline{D})$, а $\Gamma' = \{(x', \varphi(x')) : x' \in \overline{D}\}$ и $\Gamma'' = \{(x', b) : x' \in \overline{D}\}$ са съответно долната и горната основа. Нека η е безкрайно гладка "срязваща" функция $\eta \in C_0^\infty(R^m)$, която е равна на 1 в околност на Γ' и е равна на 0 в околност на Γ'', като $|\eta|, |\eta_{x_m}| \leq C_1$ в цилиндъра $\overline{\Pi}$.

Както по-горе за гладки функции $v \in C^\infty(\overline{\Pi})$ от равенството

$$v(x', \varphi(x')) = (v\eta)(x', \varphi(x')) = -\int_{\varphi(x')}^{b} (v\eta)_{x_m}(x', x_m) dx_m$$

последователно получаваме

$$|v(x', \varphi(x'))| \leq \int_{\varphi(x')}^{b} |v_{x_m}\eta + v\eta_{x_m}| dx_m \leq$$

$$\le \int\limits_{\varphi(x')}^{b} \Big(|v_{x_m}||\eta| + |v||\eta_{x_m}|\Big) dx_m \le$$

$$\le C_1 \int\limits_{\varphi(x')}^{b} \big(|v_{x_m}| + |v|\big) dx_m \le$$

$$\le C_1\sqrt{2} \int\limits_{\varphi(x')}^{b} \big(|v_{x_m}|^2 + |v|^2\big)^{\frac{1}{2}} dx_m \le$$

$$\le C_1\sqrt{2}\Big(\int\limits_{a}^{b} dx_m\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{\varphi(x')}^{b} \big(|v_{x_m}|^2 + |v|^2\big) dx_m\Big)^{\frac{1}{2}},$$

т.е.

$$|v(x', \varphi(x'))| \le C_2\Big(\int\limits_{\varphi(x')}^{b} \big(|v_{x_m}|^2 + |v|^2\big) dx_m\Big)^{\frac{1}{2}},$$

където $C_2 = C_1\sqrt{2}(b-a)^{\frac{1}{2}}$. Повдигаме на квадрат това неравенство,

$$|v(x', \varphi(x'))|^2 \le C_2^2 \int\limits_{\varphi(x')}^{b} \big(|v_{x_m}|^2 + |v|^2\big) dx_m,$$

и почленно го умножаваме с неравенството

$$\sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2(x') + \cdots + \varphi_{x_{m-1}}^2(x')} \le C_3^2,\ x' \in \overline{D},$$

след което интегрираме по x' върху D и получаваме

$$\int\limits_{\Gamma'} |v|^2 d\Gamma = \int\limits_{D} |v(x', \varphi(x'))|^2 \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2(x') + \cdots + \varphi_{x_{m-1}}^2(x')} dD \le$$

$$\le C_2^2 C_3^2 \int\limits_{D} \Big(\int\limits_{\varphi(x')}^{b} \big(|v_{x_m}|^2 + |v|^2\big) dx_m\Big) dx' =$$

$$= C^2 \int\limits_{\Pi} \big(|v_{x_m}|^2 + |v(x)|^2\big) d\Pi,\ C = C_2 C_3,$$

т.е.

$$\|v\|^2_{L_2(\Gamma')} \le C^2 \int\limits_{\Pi} \left(v^2_{x_m} + v^2\right) dx. \tag{$*$}$$

Усилваме неравенството, като в подинтегралния израз добавим и квадратите на останалите производни на v, после коренуваме неравенството почленно и получаваме оценката

$$\|v\|_{L_2(\Gamma')} \le C\|v\|_{H^1(\Pi)}. \tag{$**$}$$

С нейна помощ върху Γ' дефинираме следа, както вече бе направено погоре.

Следа можем да дефинираме и върху C^1-гладка повърхнина разположена вътре в областта G. Нека например $u \in H^1(\Pi)$, където и $\Pi = D \times (a, b)$. Въвеждаме цилиндрите $\Pi_+ = \Pi \cap \{\varphi(x') < x_m < b\}$ и $\Pi_- = \Pi \cap \{a < x_m < \varphi(x')\}$, $a < \varphi(x') < b$, $x' \in \overline{D}$, $\varphi \in C^1(\overline{D})$, за които $\Gamma' : x_m = \varphi(x')$, $x' \in \overline{D}$ е съответно долна и горна основа. Докажете, че следата на u върху Γ', разглеждана като част от границата на Π_+ съвпада със следата на u върху Γ', разглеждана като част от границата на Π_-. С други думи, макар че по горната схема следата се дефинира за област едностранно разположена спрямо повърхнината, когато повърхнината е вътрешна, няма значение коя от страните избираме за да дефинираме следа върху повърхнината.

По-нататък ще предполагаме, че всяко парче Γ_i от границата Γ е криволинейната долна основа на цилиндър Π_i, който изцяло се съдържа в $\overline{G}$ и има ос успоредна на някоя от координатните оси. Последното при необходимост се постига с ротация на G, спрямо която принадлежността на $H^1(G)$ се запазва. Следователно следата на $u \in H^1(G)$ е добре дефинирана върху всяко парче Γ_i.

Можем да постъпим и другояче. За всяко парче Γ_i и гладка функция $v \in C^\infty(\overline{\Pi}_i)$ имаме оценките

$$\|v\|^2_{L_2(\Gamma_i)} \le C_i\|v\|^2_{H^1(\Pi_i)} \le C_i\|v\|^2_{H^1(G)}.$$

Като ги сумираме почленно и след това коренуваме, получаваме с някаква константа $C > 0$ оценката

$$\|v\|_{L_2(\Gamma)} \le C\|v\|_{H^1(G)}.$$

С нейна помощ дефинираме следа като по-горе направо върху цялата граница Γ. Ясно е, че върху всяко от парчетата следата съвпада с вече въведената по-горе.

Нека сега $u \in H^l(G)$. Тъй като при $|\alpha| \le l - 1$ имаме $\partial^\alpha u \in H^1(G)$, то всяка една от тези обобщени производни има следа върху Γ.

Да разгледаме следата на $u \in \mathring{H}^1(G)$. Тъй като u по дефиниция притежава апроксимираща в $H^l(G)$ редица от финитни гладки функции, които са равни на нула в околност на границата Γ, то следата $u|_\Gamma$ на u върху Γ е очевидно равна на нула. По-общо, ако $u \in \overset{\circ}{H}{}^l(G)$, то при $|\alpha| \le l-1$ следата на обобщената производна $\partial^\alpha u|_\Gamma = 0$.

Разполагайки с понятието следа върху границата, за една H^1-гладка функция можем да формулираме аналог на класическата теорема на Гаус-Остроградски и да ползваме извлечената от нея формула за интегриране по части и за обобщени производни.

Нека G е ограничена област с частично-гладка граница Γ, с единичен външен нормален вектор $n = (n_1, \dots, n_m)$ и $u_i \in H^1(G)$, $i = 1, \dots, m$.

В сила е следният аналог на формулата на Гаус-Остроградски

$$\int_G \sum_{i=1}^m u_{ix_i} dG = \int_\Gamma \sum_{i=1}^m u_i n_i d\Gamma.$$

От него за $u, v \in H^1(G)$ веднага следва

$$\int_G (u_{x_i} v + u v_{x_i}) dG = \int_G (uv)_{x_i} dG = \int_\Gamma u v n_i d\Gamma,$$

т.е. формулата за интегриране по части

$$\int_G u_{x_i} v dG = -\int_G u v_{x_i} dG + \int_\Gamma u v n_i d\Gamma.$$

С помощтта на граничен преход ще установим направо формулата за интегриране по части, като се възползваме от валидността ѝ за гладки функции и частни производни в класически смисъл.

Нека $u_\nu, v_\nu \in C^\infty(\overline{G})$, $\|u_\nu - u\|_1 \to 0$, $\|v_\nu - v\|_1 \to 0$ и следователно $\|u_\nu - u\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$, $\|v_\nu - v\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$ при $\nu \to \infty$. За тях е в сила формулата

$$\int_G u_{\nu x_i} v_\nu dG = -\int_G u_\nu v_{\nu x_i} dG + \int_\Gamma u_\nu v_\nu n_i d\Gamma,$$

от която след граничен преход при $\nu \to \infty$ получаваме верността на формулата за интегриране по части и за $u, v \in H^1(G)$.

Упражнение 1. Докажете с граничен преход всяка една от горните интегрални формули.

Упражнение 2. Докажете, че ако $u \in H^1(G)$ и следата $u|_\Gamma = 0$, то u продължена като нула извън G е от $u \in H^1(R^m)$.

Упражнение 3. Докажете, че ако границата $\Gamma \in C^1$, $u \in H^1(G)$ и следата $u|_\Gamma = 0$, то $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$. Упътване: Достатъчно е да докажем твърдението локално, т.е. за u с носител в околност на точка от границата. Без ограничение на общността можем да си мислим, че тази околност е цилиндър Π с долна основа парчето Γ' от Γ. Най-напред продължете u като нула извън Π, а след това осреднете с изместване по оста на цилиндъра надолу в ядрото на осредняващия оператор.

Упражнение 4. Нека областта $D \in R^{m-1}$, $G_+ = D \times (0, a)$, $G_- = D \times (-a, 0)$, $G = D \times (-a, a)$, $u \in H^1(G_+)$, $v \in H^1(G_-)$ и съвпадат следите $u|_{x_m=0} = v|_{x_m=0}$. Докажете, че ако положим $w = \begin{cases} u, & x \in G_+ \\ v, & x \in G_- \end{cases}$, то функцията $w \in H^1(G)$. Ако допълнително предположим, че $u \in H^2(G_+)$, $v \in H^2(G_-)$, то функцията $w \in H^2(G)$.

Упражнение 5. При означенията от предната задача, ако допълнително предположим $u \in H^l(G_+)$, $v \in H^l(G_-)$ и съвпадат следите на обобщените производни $\partial^p_{x_m} u|_{x_m=0} = \partial^p_{x_m} v|_{x_m=0}$ за $p = 1, \ldots, l-1$, то $w \in H^l(G)$.