5_1. Оператори за усредняване.

Нека G е област в R^m, а $f \in L_1(G)$. Продължението на f като нула извън G ще означаваме пак със същата буква, като по дефиниция $f \in L_1(R^m)$ и имаме

$$\int\limits_G f dG = \int\limits_{R^m} f dx.$$

Навсякъде по-нататък с ω ще означаваме функцията

$$\omega(x) = \begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases},$$

където константата $C_1 > 0$ е така подбрана, че $\int\limits_{|x|<1} \omega(x)dx = 1$. Въведената функция ω има свойствата

$$\omega \in C_0^\infty(R^m),\ \omega(x) \geq 0,\ x \in R^m,\ \operatorname{supp}\omega = \{x : |x| \leq 1\},\ \omega(-x) = \omega(x),$$

$$\int\limits_{R^m} \omega(x)dx = 1.$$

Единствено гладкостта на ω се нуждае от проверка. По-нататък, като казваме, че една функция е гладка, ще разбираме, че тя е безкрайно гладка, т.е. има непрекъснати производни от произволен ред в разглежданото множество (R^m в случая). Тъй като функцията $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_m^2$ е безкрайно гладка, то ω е безкрайно гладка в отвореното единично кълбо $\{|x| < 1\}$ и във външността му $\{|x| > 1\}$. За да видим, че ω е гладка и в околност на точките от единичната сфера $\{|x| = 1\}$, ще се възползваме от нейната радиална симетричност и ще сведем въпроса до изследване на гладкостта на функция на една променлива. Да разгледаме функцията $h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t}}, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases}$. Проверете, че $h \in C^\infty(0, \infty)$ като установите, че при $t = 1$ левите и десните производни от произволен ред съвпадат. Сега гладкостта на $\omega(x) = C_1 h(|x|^2)$ е очевидна и в околност на точките от единичната сфера.

Графикът на функцията ω в едномерния или двумерния случай прилича на камбана или шапка и затова малко свободно я наричаме функцията шапка или камбановидна функция. Направете рисунка. За да получим камбановидна функция с произволно разположен малък носител модифицираме ω и въвеждаме

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^m}\omega(\frac{y - x}{\varepsilon}).$$

Тази функция е различна от нула само за онези x, за които $|\frac{y-x}{\varepsilon}| < 1$, т.е. $|y-x| < \varepsilon$, което показва че носителят на ω_ε е затворено кълбо с радиус ε и център в точката y, т.е.

$$\mathrm{supp}_x\, \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) = \{x : |y-x| \le \varepsilon\}.$$

Множителят $\frac{1}{\varepsilon^m}$ е специално подбран, така че да получим $\int\limits_{R^m} \omega_\varepsilon = 1$. Наистина, ако положим $\frac{y-x}{\varepsilon} = z$, т.е. направим смяна на променливата $x = y - \varepsilon z$ в интеграла, понеже $dx = \varepsilon^m dz$, за произволно фиксирано $y \in R^m$ последователно получаваме

$$\int\limits_{R^m} \omega_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_{R^m} \omega(\frac{y-x}{\varepsilon})dx = \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_{R^m} \omega(z)\varepsilon^m dz = \int\limits_{R^m} \omega(z)dz = 1.$$

Последното свойство ни позволява да използваме тази функция като тегло при усредняването на функцията f в ε-околност на y.

За функциите $f \in L_1(G)$ въвеждаме интегралния оператор

$$J_\varepsilon f(y) = f_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) f(x) dG.$$

f_ε е кратко означение за $J_\varepsilon f$. Числото $J_\varepsilon f(y)$ е усреднената стойност на функцията f в ε-околност на точка y. По горната формула на функцията f съпоставяме функцията f_ε. Функцията

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^m} \omega(\frac{y-x}{\varepsilon})$$

наричаме усредняващо ядро. Поради споменатото по-горе свойство на носителя ѝ по x, при пресмятане на $f_\varepsilon(y)$ интегрираме функцията f само върху кълбото $B_\varepsilon(y) = \{x : |y-x| < \varepsilon\}$ с център y и радиус ε. Извън него ядрото е нула.

Тъй като $f \in L_1(G)$ продължена като 0 извън G запазва класа си, т.е. $f \in L_1(R^m)$, то

$$J_\varepsilon f(y) = f_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) f(x) dG = \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_{R^m} \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) f(x) dx.$$

Последният интеграл има смисъл и за $f \in L_1^{loc}(R^m)$. Следователно интегралният оператор е добре дефиниран за всяка функция $f \in L_1^{loc}(R^m)$.

Ако продължим функцията $f \in L_2(G)$ като 0 извън G, тя също запазва класа си, т.е. $f \in L_2(R^m)$. Върху всяко компактно подмножество K на R^m

функцията тъждествено равна на 1 и функцията f са със сумируем квадрат и поради очевидното неравенство

$$|f(x)| = |1 \cdot f(x)| = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2}|f(x)|^2, \ x \in K$$

измеримата функция f притежава сумируема мажоранта в K и следователно е локално сумируема в R^m, т.е. $f \in L_1^{loc}(R^m)$ и интегралният оператор е добре дефиниран.

Лема. Усреднението f_ε на една функция $f \in L_1^{loc}(R^m)$ е непрекъсната функция в цялото R^m, т.е. $f_\varepsilon \in C(R^m)$.

Доказателство. При фиксирано ε ядрото $\omega(\frac{y-x}{\varepsilon})$ на интегралния оператор е ограничена функция на x и y, като нека $|\omega(\frac{y-x}{\varepsilon})| \le C_1, \ x, y \in R^m$.

Достатъчно е да докажем $f_\varepsilon \in C(B)$, където $B = \{|y_0 - y| < R\}$ е произволно отворено кълбо. За $y \in B$ носителят по x на ядрото се съдържа в по-голямото затворено кълбо $\{|y_0 - x| \le R + \varepsilon\}$, т.е.

$$\operatorname{supp}_x \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) \subset \{|y_0 - x| \le R + \varepsilon\}.$$

Нека $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{|y_0 - x| \le R + \varepsilon\} \\ 0, & x \in R^m \backslash \{|y_0 - x| \le R + \varepsilon\} \end{cases}$ е характеристичната функция на това кълбо. От $f \in L_1^{loc}(R^m)$ имаме, че $\chi f \in L_1(R^m)$. Подинтегралната функция е измерима функция и е непрекъсната по y за почти всяко $x \in R^m$.

При $y \in B$ функцията $C_1|\chi f|$ е сумируема мажоранта на подинтегралната функция, т.е.

$$|\omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) f(x)| \le C_1 |\chi f|.$$

От свойствата на интегралите зависещи от параметър получаваме, че $f_\varepsilon \in C(B)$ и непрекъснатостта на усреднената функция е установена.

След формално диференциране по параметъра y под знака на интеграла имаме

$$\partial_y^\alpha f_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \partial_y^\alpha \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) f(x) dG = \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_{R^m} \partial_y^\alpha \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) f(x) dx$$

При фиксирано ε за $y \in B$ подинтегралният израз отново има сумируема мажоранта

$$|\partial_y^\alpha \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) f(x)| \le C_2 |\chi f|.$$

От свойствата на интегралите зависещи от параметър получаваме, че формалното диференциране е законно и $\partial_y^\alpha f_\varepsilon \in C(B)$, т.е. $\partial_y^\alpha f_\varepsilon \in C(R^m)$ за произволен мултииндекс α.

Направените разглеждания доказват следната

Лема. Ако $f \in L_1(G)$ ($L_2(G)$ или $L_1^{loc}(R^m)$), то $f_\varepsilon \in C^\infty(R^m)$ и производните на тази функция получаваме с диференциране под знака на интеграла по горната формула.

За едно множество $M \subset R^m$ да означим с M_δ множеството от точки, разстоянието от които до M е по-малко или равно от δ, т.е. $M_\delta = \{x : \rho(M, x) \leq \delta\}$. Проверете, че M_δ е затворено множество, каквото и да бъде множеството M. M_δ ще наричаме δ-околност на M.

Дефиниция. Носител на една функция $f \in L_1^{loc}(R^m)$ наричаме допълнението до G на най-голямото отворено множество, в което f е почти навсякъде равна на нула.

За непрекъсната функция тази дефиниция е еквивалентна на използваната досега. Напомняме, че носител на една непрекъсната функция наричаме затворената обвивка на множеството от точки, в които функцията е различна от нула.

Носителят на усреднената функция се съдържа в ε-околност на носителя на f, т.е.

$$\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset (\operatorname{supp} f)_\varepsilon.$$

Наистина, ако една точка y е на разстояние по-голямо от ε от носителя на f, то кълбото с център y и радиус ε, в което е носителят по x на ядрото на интегралния оператор и носителят на f нямат общи точки и подинтегралната функция е равна на нула, т.е. $f_\varepsilon(y) = 0$.

Установихме, че при усредняване с безкрайно гладко ядро получаваме гладка функция, защото особеностите на усреднyваната функция се заглаждат. Това веднага ни дава възможност за конструиране на безкрайно гладки функции с подходящо разположен носител. Нека $D \subset R^m$ е произволно множество, ограничено или неограничено. Ще покажем как се конструира безкрайно гладка функция, която е равна на единица в ε-околност D_ε на D и е равна на нула извън 3ε-околност $D_{3\varepsilon}$ на D.

Нека функцията $\chi = \begin{cases} 1, & x \in D_{2\varepsilon} \\ 0, & x \in R^m \backslash D_{2\varepsilon} \end{cases}$ е характеристичната функция на 2ε-околност на множеството D. Тя е локално сумируема, защото множеството $D_{2\varepsilon}$ е затворено и следователно измеримо. Като я усредним с радиус на усреднението ε, получаваме нужната ни гладка функция

$$\varphi(y) = \chi_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_{R^m} \omega\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)\chi(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_{D_{2\varepsilon}} \omega\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)dx,$$

като очевидно $\varphi \in C^\infty(R^m)$ и $\operatorname{supp} \varphi = \overline{D_{3\varepsilon}}$, $\varphi|_{D_\varepsilon} = 1$. Наистина, ако $y \in D_\varepsilon$, то интегрираме по кълбото $B_\varepsilon(y) \subset D_{2\varepsilon}$ и върху него характеристичната функция χ е единица, следователно и интегралът е равен на единица. Ако $y \notin D_{3\varepsilon}$, то интегрираме върху кълбото $B_\varepsilon(y)$, където подинтегралната функция е равна на нула. Направете рисунка.

Много често, искайки да установим с локални разглеждания в област $D \subset G$ някакво свойство на функцията $f : G \to R$ я умножаваме с гладка функция $\psi \in C^\infty(R^m)$, която е равна на 1 в околност на D, равна е на 0 извън малко по-голяма околност на D и вместо f разглеждаме произведението ψf. Функцията ψ наричаме с изразителното име "срязваща" функция.

За да установим някакво свойство на f с локални разглеждания в отделните подобласти на G, използваме срязващи функции с носители в тези подобласти, които образуват така нареченото "разлагане (разбиване) на единицата подчинено на покритие с отворени множества".

Дефиниция. Казваме, че семейството от отворени множества $\{U_i\}_{i\in I}$, където I е множество от индекси с произволна природа, имащо произволна мощност, е отворено покритие на множеството A, ако $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.

Дефиниция. Нека $\{U_i\}_{i=1}^N$ е крайно отворено покритие на компактното множество K, т.е. $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^N U_i$. Казваме, че семейството от безкрайно гладки финитни функции $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ е разлагане на единицата подчинено на отвореното покритие $\{U_i\}_{i=1}^N$ ако:

$$\varphi_i \in C_0^\infty(U_i),\ \varphi_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i = 1 \text{ в околност на } K.$$

Теорема (за разлагане на единицата). За всяко крайно отворено покритие на едно компактно множество в R^m съществува подчинено на него разлагане на единицата.

Доказателство. Нека $\{U_i\}_{i=1}^N$ е крайно отворено покритие на компактното множество K, т.е. $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^N U_i$. Ще покажем, че можем да намерим компактни подмножества $K_i \subset U_i$, които също покриват K, т.е. $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^N K_i$. Наистина, за всяка точка x съществува $i_0 \leq N$, такова че $x \in U_{i_0}$. Нека $B(x)$ е толкова малко отворено кълбо с център в точка x, че затвореното кълбо $\overline{B(x)} \subset U_{i_0}$. Обединението на тези отворени кълба очевидно покрива компактното множество K и следователно съществува крайно подпокритие $\{B(x_i)\}_{i=1}^k$, $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^k B(x_i)$. Сега K_i определяме като обединение от онези затворени кълба $\overline{B(x_j)}$, които се съдържат в U_i, т.е. $K_i = \bigcup\limits_{\overline{B(x_j)}\subset U_i} \overline{B(x_j)}$.

Използвайки усредняване, както бе показано по-горе можем да построим функциии $\psi_i \in C_0^\infty(U_i)$, равни на единица в околност на K_i. Очевидно сумата $\sum\limits_{i=1}^{N} \psi_i(x) > 0$ в околност на K и е равна на 0 извън малко по-голяма околност. Допълнително построяваме функция ψ_0, която е единица, където $\sum\limits_{i=1}^{N} \psi_i(x) = 0$ и е равна на 0 в околност на K. Очевидно имаме $\psi(x) = \sum\limits_{i=0}^{N} \psi_i(x) > 0$. Сега търсените функции от разлагането на единицата дефинираме като $\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi(x)}$. Тъй като

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \psi_i(x)}{\sum\limits_{i=0}^{N} \psi_i(x)},$$

то сумата на тези функции е единица в онази околност на K, в която $\psi_0(x) = 0$ и теоремата е доказана.

Ако една функция е непрекъсната, в малка околност на дадена точка тя малко се изменя, и ако усредним около тази точка с малък радиус на усреднение, ще получим стойност близка до тази в точката. Водени от такива съображения очакваме, че при намаляване на радиуса на усредняване, усреднената функция ще бъде по-близка до първоначалната. Първият апроксимативен резултат в това направление е следната

Лема. Нека $f \in C(G)$ и K е произволно компактно подмножество на G. Тогава f_ε клони към f при $\varepsilon \to 0$ равномерно върху K.

Доказателство. За $y \in K$ и $\varepsilon < r = \rho(K, \partial G)$ да образуваме разликата

$$f_\varepsilon(y) - f(y) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) f(x) dG - f(y) \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) dG =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \omega(\frac{y-x}{\varepsilon})(f(x) - f(y)) dG = \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_{|y-x|<\varepsilon} \omega(\frac{y-x}{\varepsilon})(f(x) - f(y)) dG.$$

Да разгледаме компактното множество $F = K_{\frac{r}{2}} = \{x \in R^m : \rho(x, K) \leq \frac{r}{2}\}$, $K \subset F \subset G$. Направете рисунка. Функцията f е непрекъсната и следователно равномерно непрекъсната в F, т.е за всяко $\delta > 0$ съществува такова r_0, че $|f(x) - f(y)| < \delta$ за всички $x, y \in F$, за които $|x - y| < r_0$. Следователно при всички $\varepsilon < \min(r_0, \frac{r}{2})$ за $y \in K$ имаме

$$|f_\varepsilon(y) - f(y)| \leq \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_{|y-x|<\varepsilon} \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) |f(x) - f(y)| dG \leq \delta \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) dG = \delta$$

и равномерната сходимост върху K е доказана.

Сега ще установим, че въведеният интегрален усредняващ оператор е ограничен линеен оператор $J_\varepsilon : L_p(G) \to L_p(G)$ при $p \geq 1,\ p \in R$, с норма единица и $J_\varepsilon f = f_\varepsilon$ апроксимира f по нормата $\|f\|_{L_p(G)} = (\int\limits_G |f|^p)^{\frac{1}{p}}$ в $L_p(G)$. Разбира се, линейността на оператора е очевидна.

Теорема. а) За произволна функция $f \in L_p(G)$ и $J_\varepsilon f \in L_p(G)$ и е в сила оценката

$$\|f_\varepsilon\|_{L_p(G)} \leq \|f\|_{L_p(G)} \ \forall f \in L_p(G).$$

б) $f_\varepsilon \to f$ в $L_p(G)$ при $\varepsilon \to 0$, т.е.

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L_p(G)} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0 \ \forall f \in L_p(G).$$

Доказателство. Ще докажем теоремата за $L_2(G)$, т.е. за $p = 2$. Твърдение за $L_1(G)$ се доказва аналогично, но малко по-просто и го оставяме за упражнение. Резултатът за произволно $p > 1$ се доказва с помощта на неравенството на Хьолдер.

а) Най-напред ще оценим

$$|f_\varepsilon(y)| \leq \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \omega(\frac{y-x}{\varepsilon})|f(x)|dG =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \Big(\omega(\frac{y-x}{\varepsilon})\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\Big(\omega(\frac{y-x}{\varepsilon})\Big)^{\frac{1}{2}} |f(x)|\Big) dG.$$

Сега прилагаме неравенството на Коши-Буняковски и получаваме

$$|f_\varepsilon(y)|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \omega(\frac{y-x}{\varepsilon})dG \ \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \omega(\frac{y-x}{\varepsilon})|f(x)|^2 dG.$$

Тъй като първият интеграл не надминава единица, то

$$|f_\varepsilon(y)|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \omega(\frac{y-x}{\varepsilon})|f(x)|^2 dG.$$

Сега интегрираме полученото неравенство по y върху G и след смяна в реда на интегрирането получаваме

$$\|f_\varepsilon\|^2_{L_2(G)} = \int\limits_G |f_\varepsilon(y)|^2 dy \leq \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \Big(\int\limits_G \omega(\frac{y-x}{\varepsilon})|f(x)|^2 dx\Big) dy =$$

$$= \int\limits_G \Big(\frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) dy\Big) |f(x)|^2 dx \leq \int\limits_G |f(x)|^2 dx = \|f\|^2_{L_2(G)},$$

като отново използвахме, че интегралът в скобите не надминава единица. Смяната в реда на интегрирането е законна според теоремата на Фубини, тъй като според обратната теорема на Фубини $\frac{1}{\varepsilon^m}\omega|f|^2$ е сумируема функция по x и y едновременно, защото е неотрицателна и вторият кратен интеграл от нея в горната верига равенства съществува. След коренуване получаваме исканата оценка.

б) Ако f е непрекъсната функция с компактен носител, т.е. $f \in C_0(G)$, то според горната лема $f_\varepsilon \to f$ равномерно в G при $\varepsilon \to 0$. От равномерната сходимост следва и сходимост по норма в $L_2(G)$ и свойство б) е проверено в този специален случай.

Нека $f \in L_2(G)$ и $\delta > 0$ е произволно избрано. $C_0(G)$ е навсякъде гъсто подмножество на $L_2(G)$, следователно съществува такава функция $\varphi \in C_0(G)$, че $\|f - \varphi\|_{L_2(G)} < \delta$. Използвайки неравенството на триъгълника получаваме

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L_2(G)} = \|(f_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) + (\varphi_\varepsilon - \varphi) + (\varphi - f)\|_{L_2(G)} \leq$$

$$\leq \|f_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\|_{L_2(G)} + \|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{L_2(G)} + \|\varphi - f\|_{L_2(G)}$$

От оценката в точка а) имаме

$$\|f_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\|_{L_2(G)} = \|(f - \varphi)_\varepsilon\|_{L_2(G)} \leq \|f - \varphi\|_{L_2(G)} < \delta.$$

Като следствие от вече доказаното съществува такова число ε_0, че за всички $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ имаме $\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{L_2(G)} < \delta$ и следователно

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L_2(G)} < 3\delta,$$

което доказва, че исканата сходимост е налице.

Лема. Гладките функции с компактен носител от $C_0^\infty(G)$ са навсякъде гъсто в $L_p(G)$ при $p \geq 1$.

Доказателство. Нека $\delta > 0$. Знаем, че $C_0(G)$ е навсякъде гъсто в $L_p(G)$. Следователно, ако $f \in L_p(G)$, то съществува такава функция $\varphi \in C_0(G)$, че $\|f - \varphi\|_{L_p(G)} < \delta$. Съгласно теоремата, за достатъчно малко $\varepsilon > 0$ ще имаме $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(G)$ и $\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{L_p(G)} < \delta$. Тогава

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|_{L_p(G)} \leq \|f - \varphi\|_{L_p(G)} + \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L_p(G)} < 2\delta,$$

което доказва твърдението.

Лема. Ако $f \in L_1^{loc}(G)$ и за всички пробни функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ имаме

$$\int\limits_G f\varphi dG = 0$$

то $f = 0$ п.н. (почти навсякъде) в G.

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че $f = 0$ п.н. в произволно избрано малко кълбо $B_\delta(z)$ с център в произволна точка z. Без ограниче-ничение на общността можем да предполагаме, че дори затвореното кълбо $K = \overline{B_{2\delta}(z)}$ се съдържа в областта G. Тъй като K е компактно множество, то $f \in L_1(K) = L_1(B_{2\delta}(z))$ и $\|f_\varepsilon - f\|_{L_1(B_{2\delta}(z))} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Поради очевидното неравенство

$$0 \le \|f_\varepsilon - f\|_{L_1(B_\delta(z))} \le \|f_\varepsilon - f\|_{L_1(B_{2\delta}(z))}$$

следва, че и $\|f_\varepsilon - f\|_{L_1(B_\delta(z))} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Но при $\varepsilon < \delta$ за $y \in B_\delta(z)$ ядрото $\frac{1}{\varepsilon^m}\omega(\frac{y-x}{\varepsilon})$ като функция на x е от $C_0^\infty(B_{2\delta}(z))$ и съгласно предположението

$$f_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_{B_{2\delta}(z)} \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) f(x) dG = \frac{1}{\varepsilon^m} \int\limits_G \omega(\frac{y-x}{\varepsilon}) f(x) dG = 0,$$

т.е. $f_\varepsilon \equiv 0$ в $B_\delta(z)$ и $f_\varepsilon \to f$ в $L_1(B_\delta(z))$ при $\varepsilon \to 0$. Следователно $f = 0$ п.н. в $B_\delta(z)$, с което лемата е доказана.

Следствие. Ако за локално сумируемите функции $f, g \in L_1^{loc}(G)$ имаме

$$\int\limits_G f\varphi dG = \int\limits_G g\varphi dG, \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(G)$$

то те съвпадат п.н., т.е. $f = g$ п.н. в G.

Доказателство. При направените предположения очевидно е изпълнено

$$(f-g) \in L_1^{loc}(G), \ \int\limits_G (f-g)\varphi dG = 0 \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(G)$$

и съгласно лемата $f - g = 0$ п.н., т.е. $f = g$ п.н. в G.

5_2. Гъстота на безкрайно гладките функции в пространствата на Соболев.

Упражнение 1. Докажете с граничен преход, че за $u, v \in H^1(G)$ произведението uv притежава обобщена производна $(uv)_{x_i} = u_{x_i} v + u v_{x_i}$ от $L_1(G)$.

Упражнение 2. Докажете, че за $u, v \in H^1_{loc}(G)$ съществува обобщената производна $(uv)_{x_i} = u_{x_i} v + u v_{x_i}$ от $L_1^{loc}(G)$.