4. Обобщени производни. Пространства на Соболев. Пълнота.

Увод

Най-напред ще въведем икономични и удобни означения за частните производни от висок ред. Интересуваме се от функции, притежаващи непрекъснати производни, поради което редът на диференцираме е несъществен, трябва само да укажем по коя променлива колко пъти диференцираме. За целта използваме мултииндекси.

Дефиниция. Мултииндекс наричаме всеки вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ с цели неотрицателни компоненти $\alpha_i \geq 0$, $(i = 1, \dots, m)$. Възприемаме следните кратки означения

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m,$$

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_m!,$$

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} = \partial^\alpha u,$$

като $|\alpha|$ е реда на частната производна,

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} = x^\alpha,$$

като $|\alpha|$ е степента на едночлена.

Например при $m = 3$ частната производна $u_{x_1 x_1 x_3} = \partial^\alpha u$, където мултииндексът $\alpha = (2, 0, 1)$. Със същия мултииндекс имаме $x_1^2 x_3 = x^\alpha$.

Приемаме, че при $|\alpha| = 0$ имаме $\partial^\alpha u = u$. Ще използваме и означението

$$\alpha \leq \beta,$$

когато

$$\alpha_i \leq \beta_i,\ i = 1, \dots, m.$$

Напомняме, че с $C^l(G)$ означаваме пространството от функции u, дефинирани в G, които притежават непрекъснати в G частни производни до ред l включително, т.е. $\partial^\alpha u \in C(G)$ за всеки мултииндекс α, $|\alpha| \leq l$, където G е отворено подмножество на R^m.

Удобството на въведените означения веднага се вижда, ако ги използваме за да напишем формулата на Тейлор за функция на много променливи, например с остатъчен член във вида на Пеано.

Теорема (Формула на Тейлор). Ако $u \in C^l(B_R(a))$, то е в сила представянето

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq l} \frac{\partial^\alpha u(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + o(|x-a|^l),\ \forall x \in B_R(a),$$

където $B_R(a)$ е m-мерното кълбо с център a и радиус R.

С въвеждането на мултииндекси формулата на Тейлор в многомерния случай се записва точно както за функции на една променлива.

По-нататък ще ни бъде полезно едно обобщение на формулата на Лайбниц за диференциране на произведение. Нека $u, v \in C^l(G)$ и $|\alpha| \leq l$. Като диференцираме, последователно получаваме

$$(uv)_{x_1} = u_{x_1} v + u v_{x_1},$$

$$(uv)_{x_1 x_1} = u_{x_1 x_1} v + 2u_{x_1} v_{x_1} + u v_{x_1 x_1},$$

$$(uv)_{x_1 x_1 x_2} = u_{x_1 x_1 x_2} v + u_{x_1 x_1} v_{x_2} + 2u_{x_1 x_2} v_{x_1} + 2u_{x_1} v_{x_1 x_2} + u_{x_2} v_{x_1 x_1} + u v_{x_1 x_1 x_2}.$$

Виждаме, че всяко ново диференциране пада или върху лявата или върху дясната страна на кое да е произведение във вече получения израз. По индукция можем да покажем, че

$$\partial^\alpha (uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\beta \partial^\beta u \partial^{\alpha - \beta} v,$$

където коефициентите C^β зависят само от мултииндексите α и β, но не зависят от конкретните функции u и v. За да определим коефициента C_γ ще изберем u и v по подходящ начин, а именно $u = x^\gamma$, $v = x^{\alpha - \gamma}$. Тогава

$$\partial^\alpha (uv) = \partial^\alpha x^\alpha = \alpha!,$$

$$\partial^\gamma x^\gamma = \gamma!,\ \partial^{\alpha - \gamma} x^{\alpha - \gamma} = (\alpha - \gamma)!.$$

Ясно е, че $\partial^\beta x^\gamma \neq 0$ само при $\beta \leq \gamma$, а $\partial^{\alpha - \beta} x^{\alpha - \gamma} \neq 0$ само при $\alpha - \beta \leq \alpha - \gamma$, т.е. $\beta \geq \gamma$. Следователно при заместване в горната формула единственото различно от нула събираемо отдясно се получава при $\beta = \gamma$, т.е.

$$\alpha! = C_\gamma \gamma! (\alpha - \gamma)!,$$

откъдето намираме

$$C_\gamma = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha - \gamma)!}.$$

По аналогия с едномерния случай въвеждаме обобщените биномни коефициенти

$$\binom{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha - \gamma)!}$$

и така стигаме до "формулата на Лайбниц"

$$\partial^\alpha (uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta u \partial^{\alpha - \beta} v.$$

При въведените означения с мултииндекси тя се записва по един и същ начин в едномерния и многомерния случай.

След като привикнахме с използването на мултииндекси, да въведем и така наречената формула за интегриране по части. Най-напред ще напомним интегралната формула на Гаус-Остроградски, от която тя е следствие.

Нека G е ограничена област с частично гладка граница $\partial G = \Gamma$, т.е. границата Γ е сума на краен брой гладки повърхнини, а $n = n(x)$ е единичният външен нормален вектор във точка $x \in \Gamma$, като $n = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$. Много често за компонентите на нормалния вектор се използва и класическото означение $n_i = \cos(n, x_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Ако $P_i \in C(\overline{G})$, $P_{ix_i} \in C(G)$, то

$$\int\limits_G \sum_{i=1}^{m} P_{ix_i}(x) dG = \int\limits_\Gamma \sum_{i=1}^{m} P_i(x) n_i d\Gamma.$$

В този си вид формулата на Гаус-Остроградски има хидродинамичен смисъл и с нея са свързани основни понятия от хидродинамиката и електродинамиката. Ние ще я използваме предимно като средство за преобразуване на обемен интеграл със специална подинтегрална функция в повърхнинен интеграл. Да предположим, че само $P_i \equiv P \not\equiv 0$, а $P_j \equiv 0$, $j \neq i$. Тогава горната формула добива вида

$$\int\limits_G P_{x_i}(x) dG = \int\limits_\Gamma P(x) n_i d\Gamma.$$

Нека $u, v \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$. Тогава, като приложим горната формула получаваме

$$\int\limits_G (u_{x_i} v + u v_{x_i}) dG = \int\limits_G (uv)_{x_i} dG = \int\limits_\Gamma u v n_i d\Gamma.$$

т.е. формулата за интегриране по части

$$\int\limits_G u_{x_i} v dG = -\int\limits_G u v_{x_i} dG + \int\limits_\Gamma u v n_i d\Gamma,$$

която можем да разглеждаме като многомерен аналог на формулата за интегриране по части при функции на една променлива.

Ако произведението uv е равно на нула върху границата Γ (например, ако $v|_\Gamma = 0$, или дори ако функцията v е нула в околност на границата Γ), то интегралът по границата е нула и стигаме до следния специален вид на формулата за интегриране по части

$$\int\limits_G u_{x_i} v dG = -\int\limits_G u v_{x_i} dG.$$

Да предположим, че G е неограничена област $u \in C^1(G)$ но $v \in C_0^1(G)$. Последната формула отново е вярна, защото интегрирането е само върху носителя на v и можем без ограничение на общността да си мислим, че прилагаме горната формула в ограничена област с гладка граница.

Друг начин да се убедим във верността на последната формула е да я изведем, без да се позоваваме на формулата на Гаус-Остроградски (ще използваме само идеята, върху която се основава изводът на формулата на Гаус-Остроградски, но тъй като няма гранични членове, всичко ще стане по-просто). Нека си мислим, че u и v са продължени като нула извън G. Нека

$$\Pi = \{x : a_j < x_j < b_j,\ j = 1, \ldots, m\} = D \times (a_i, b_i)$$

е краен правоъгълен паралелепипед, който съдържа носителя на v във вътрешността си. Като използваме представянето на обемния интеграл като кратен и формулата за интегриране по части от едномерния случай получаваме

$$\int_G u_{x_i} v dG = \int_\Pi u_{x_i} v dG = \int_D \left(\int_{a_i}^{b_i} u_{x_i} v dx_i \right) dD =$$

$$\int_D \left(- \int_{a_i}^{b_i} u v_{x_i} dx_i \right) dD = - \int_\Pi u v_{x_i} dG = - \int_G u v_{x_i} dG.$$

Нека G е област, ограничена или неограничена, като $u \in C^l(G)$, функцията $v \in C_0^l(G)$, а $|\alpha| \le l$. Като приложим многократно формулата за интегриране по части получаваме

$$\int_G (\partial^\alpha u) v dG = (-1)^{|\alpha|} \int_G u \partial^\alpha v dG.$$

Ако положим $w = \partial^\alpha u$ виждаме, че u и нейната класическа производна w удовлетворяват интегралното тъждество

$$\int_G u \partial^\alpha v dG = (-1)^{|\alpha|} \int_G w v dG$$

за всички функции $v \in C_0^l(G)$. Формално погледнато интегралите в двете страни имат смисъл за функции u и w, които са сумируеми върху компактните подмножества на G (интегрираме само върху носителя на v, който е компактно множество).

Дефиниция. Казваме, че измеримата функция f е локално сумируема в G и пишем $f \in L_1^{loc}(G)$, ако $f \in L_1(K)$ за всяко компактно подмножество K на G.

Горното интегрално тъждество ни подсеща да дадем следната дефиниция за обобщена производна на функция, която не е диференцируема в обичайния (класически) смисъл.

Обобщени производни

Дефиниция. Казваме, че функцията $f \in L_1^{loc}(G)$ притежава обобщена производна $g \in L_1^{loc}(G)$, ако

$$\int\limits_G f\partial^\alpha v dG = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_G g v dG,\ \forall v \in C_0^{|\alpha|}(G). \qquad *$$

Ще използваме и означението оп$\partial^\alpha f = g$ или просто $\partial^\alpha f = g$, когато е ясно, че диференцирането се разбира в обобщен смисъл.

Тъй като проверяваме съществуването на обобщена производна, пробвайки верността на интегралното тъждество за всяка функция $v \in C_0^{|\alpha|}(G)$, общоприето е функциите от класа $C_0^{|\alpha|}(G)$ да наричаме пробни функции. Когато се появи ключовата дума "пробна функция", веднага трябва да разбираме, че ще проверяваме валидността на някакво отношение (релация), като проверяваме валидността на интегрално тъждество за всевъзможните пробни функции.

Най-напред да отговорим на естествения въпрос, дали обобщената производна $\partial^\alpha f = g$ е еднозначно определена. Ще ни бъде необходима следната лема, която ще докажем по-нататък

Лема. Нека $f \in L_1^{loc}(G)$ и е в сила тъждеството

$$\int\limits_G f v dG = 0,\ \forall v \in C_0^\infty(G)$$

за всички безкрайно гладки финитни пробни функции v. Тогава функцията f е равна на нула почти навсякъде в G.

Да предположим, че съществува $g_1 \in L_1^{loc}(G)$, която също е обобщена производна от ред α на f, т.е. в сила е интегралното тъждество

$$\int\limits_G f\partial^\alpha v dG = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_G g_1 v dG,\ \forall v \in C_0^{|\alpha|}(G).$$

Като извадим последното равенство от $*$ получаваме

$$\int\limits_G (g - g_1) v dG,\ \forall v \in C_0^{|\alpha|}(G)$$

и съгласно лемата $g - g_1 = 0$ п.н. (почти навсякъде в G), т.е. $g = g_1$ п.н., което показва, че обобщената производна $\partial^\alpha f = g$ е еднозначно определена.

Свойства на обобщените производни:

1. Обобщената производна $\partial^\alpha f = g$ е еднозначно определена от функцията f.

2. Производната в класически смисъл е и обобщена производна и в частност коя да е обобщената производна на константа е равна на нула.

Наистина, ако f притежава класическа производна $\partial^\alpha f = g$, то както вече отбелязахме, с интегриране по части получаваме валидността на интегралното тъждество $*$ и следователно g е и обобщена производна $\partial^\alpha f = g$ на f.

3. Диференцирането в обобщен смисъл е линейна операция, т.е.

$$\partial^\alpha(f_1 + f_2) = \partial^\alpha f_1 + \partial^\alpha f_2,$$

$$\partial^\alpha(\lambda f) = \lambda\partial^\alpha f,\ \lambda \in R.$$

като релациите имат следния смисъл. Ако съществуват обобщените производни в десните страни на равенствата, то съществуват и обобщените производни в левите страни и горните равенства са изпълнени почти навсякъде в G.

Проверката на това свойство извършваме, като използваме линейността на интеграла, линейността на операцията умножение с функция и еднозначната определеност на обобщената производна, съгласно свойство 1. Наистина, нека съществуват обобщените производни $\partial^\alpha f_1 = g_1$ и $\partial^\alpha f_2 = g_2$. Като съберем дефиниционните тъждества

$$\int\limits_G f_1\partial^\alpha v dG = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_G g_1 v dG,\ \forall v \in C_0^{|\alpha|}(G)$$

и

$$\int\limits_G f_2\partial^\alpha v dG = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_G g_2 v dG,\ \forall v \in C_0^{|\alpha|}(G)$$

получаваме

$$\int\limits_G (f_1 + f_2)\partial^\alpha v dG = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_G (g_1 + g_2) v dG,\ \forall v \in C_0^{|\alpha|}(G),$$

т.е. съществува обобщената производна $\partial^\alpha(f_1 + f_2) = g_1 + g_2 = \partial^\alpha f_1 + \partial^\alpha f_2$. Второто равенство се проверява по аналогичен начин.

4. Редът на диференциране в обобщената производна е несъществен.

Това е възприето по дефиниция, тъй като за пробните функции редът на диференциране е несъществен. Например оп$f_{x_1x_2} =$ оп$f_{x_2x_1}$ защото

$$\int\limits_G fv_{x_1x_2}dG = \int\limits_G fv_{x_2x_1}dG = \int\limits_G gvdG, \ \forall v \in C_0^2(G).$$

Специално ще отбележим, че съществуването на обобщената производна $\partial^\alpha f$ се установява направо чрез проверка на интегралното тъждество за всички пробни функции, а не се извършва последователно диференциране, така че производните от по-нисък ред може и да не съществуват.

5. Ако функцията f притежава обобщена производна $\partial^\alpha f = g$, а g притежава обобщена производна $\partial^\beta g = h$, то функцията f притежава обобщена производна

$$\partial^{\alpha+\beta} f = \partial^\beta(\partial^\alpha f) = h.$$

Забележка. Ако съществува обобщената производна $\partial^{\alpha+\beta} f$, то обобщените производни $\partial^\alpha f$ или $\partial^\beta f$ може и да не съществуват.

За произволна пробна функция $v \in C_0^{|\alpha+\beta|}(G)$, като вземем предвид, че $\partial^\beta v \in C_0^{|\alpha|}(G)$ и $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$ последователно получаваме

$$\int\limits_G f\partial^{\alpha+\beta} vdG = \int\limits_G f\partial^\alpha(\partial^\beta v)dG = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_G g\partial^\beta vdG =$$

$$= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int\limits_G hvdG = (-1)^{|\alpha+\beta|} \int\limits_G h\partial vdG,$$

с което свойство 5 е доказано.

6. В дефиницията на обобщена производна е достатъчно да разглеждаме само пробни функции от по-тясното пространство $C_0^\infty(G) \subset C_0^{|\alpha|}(G)$, т.е следната дефиниция е еквивалентна на горната

Дефиниция. Казваме, че функцията $f \in L_1^{loc}(G)$ притежава обобщена производна $g \in L_1^{loc}(G)$, ако

$$\int\limits_G f\partial^\alpha vdG = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_G gvdG, \ \forall v \in C_0^\infty(G). \qquad **$$

Очевидно е, че щом $*$ е изпълнено за финитни пробни функции с крайна гладкост, то е изпълнено и за безкрайно гладки финитни пробни функции, т.е. в сила е $**$. Обратното твърдение установяваме с помощта на следната апроксимационна лема, която ще докажем по-нататък.

Лема. За всяка функция $v \in C_0^l(G)$ съществува апроксимираща редица от функции $v_\nu \in C_0^\infty(G)$, всички с носител в някакво компактно множество K, $K \subset \operatorname{supp} v \subset G$, като в него имаме равномерната сходимост $\partial^\alpha v_\nu \rightrightarrows \partial^\alpha v$ за всеки мултииндекс $|\alpha| \le l$.

Нека $v \in C_0^{|\alpha|}(G)$ и $v_\nu \in C_0^\infty(G)$, е съществуващата според лемата апроксимираща редица. По предположение имаме

$$\int\limits_G f\partial^\alpha v_\nu dG = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_G g v_\nu dG.$$

Като извършим в това равенство граничен преход при $\nu \to \infty$ получаваме желаното равенство $*$. Наистина

$$\left|\int\limits_G f\partial^\alpha (v - v_\nu) dG\right| = \left|\int\limits_K f\partial^\alpha (v - v_\nu) dK\right| \le \int\limits_K |f||\partial^\alpha (v - v_\nu)| dK \le$$

$$\le \max_K |\partial^\alpha (v - v_\nu)| \int\limits_K |f| dK \to 0 \text{ при } \nu \to \infty$$

поради равномерната сходимост на производните върху K. Аналогично се проверява, че

$$\left|\int\limits_G g(v - v_\nu) dG\right| \to 0 \text{ при } \nu \to \infty.$$

7. Ако f притежава обобщените производни $\partial^{\alpha+\beta} f = h$ и $\partial^\alpha f = g$, то g притежава обобщена производна

$$\partial^\beta g = \partial^\beta(\partial^\alpha f) = \partial^{\alpha+\beta} f = h.$$

Това правило можем да изкажем и така: **Ако за една функция съществува дадена обобщена производна и същевременно обобщена производна от по-нисък ред, то производната от по-висок ред е обобщена производна на производната от по-нисък ред,** т.е. може да се разглежда като получена с последователно диференциране по указания начин.

Доказателство. По предположение имаме

$$\int\limits_G f\partial^\alpha v dG = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_G g v dG, \ \forall v \in C_0^\infty(G).$$

В това равенство пробната функция избираме от вида $v = \partial^\beta w$, където $w \in C_0^\infty(G)$ е произволна функция и получаваме

$$\int\limits_G f\partial^{\alpha+\beta} w dG = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_G g\partial^\beta w dG, \ \forall w \in C_0^\infty(G).$$

По предположение е в сила и равенството

$$\int\limits_G f\partial^{\alpha+\beta} w dG = (-1)^{|\alpha+\beta|} \int\limits_G h w dG, \ \forall w \in C_0^\infty(G).$$

Тъй като $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$, окончателно получаваме

$$\int\limits_G g\partial^\beta w dG = (-1)^{|\beta|} \int\limits_G h w dG, \ \forall w \in C_0^\infty(G),$$

което искахме да докажем.

8. В сила е правилото на Лайбниц за диференциране на произведение

$$(uf)_{x_i} = u_{x_i} f + u f_{x_i}, \ u \in C^1(G), \ f, \mathbf{оп} f_{x_i} \in L_1^{loc}(G)$$

и неговото обобщение

$$\partial^\alpha(uf) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta u \partial^{\alpha-\beta} f,$$

където $u \in C^{|\alpha|}(G)$ **и съществуват обобщените производни** $\partial^\beta f \in L_1^{loc}(G)$ **за всеки мултииндекс** $\beta \le \alpha$.

Ще докажем само правилото за еднократно диференциране на произведение. Неговото обобщение се проверява както в случая, когато производните са класически.

Нека $v \in C_0^1(G)$ е произволна пробна функция и $u \in C^1(G)$. Тогава $(uv) \in C_0^1(G)$ също е пробна функция и понеже $uv_{x_i} = (uv)_{x_i} - u_{x_i} v$, последователно получаваме

$$\int\limits_G (uf) v_{x_i} dG = \int\limits_G f(uv_{x_i}) dG = \int\limits_G f(uv)_{x_i} dG - \int\limits_G f(u_{x_i} v) dG =$$

$$= -\int\limits_G f_{x_i}(uv) dG - \int\limits_G f(u_{x_i} v) dG = -\int\limits_G (u_{x_i} f + u f_{x_i}) v dG,$$

т.е. правилото за диференциране на произведение, в което единият от множителите е гладка функция е в сила и при диференциране в обобщен смисъл.

Свойствата на диференцирането в обобщен смисъл са аналогични на свойствата на диференцирането в класически смисъл. Една основна разлика е, че докато съществуването на класическа производна се установява поточково, т.е. за всяка точка от областта и можем да говорим за съществуването на класическата производна в точка, то понятието обобщена производна в точка няма смисъл, защото както функцията която диференцираме, така и функцията, която е нейна производна, са дефинирани почти навсякъде, т.е. не са дефинирани или приеманата стойност е без значение върху подмножество на дефиниционната област с лебегова мярка нула (например крайните и изброимите множества от точки имат лебегова мярка нула, точките от една частично гладка $(n-1)$-мерна повърхнина имат в n-мерното пространство (обемна) лебегова мярка нула). Макар, че може и да не е дефинирана в конкретна точка, стойността на обобщената производна в околност на тази точка се определя от стойностите на функцията в тази околност, т.е. налице е така нареченото "свойство локалност" на диференцирането не само в класически, но и в обобщен смисъл. С други думи и обобщените производни се пресмятат локално, т.е. в околност на всяка точка. Следващите две свойства разглеждат този аспект на диференцирането.

9. Ако $g = \partial^\alpha f \in L_1^{loc}(G)$ е обобщена производна на $f \in L_1^{loc}(G)$ в областта G, то $g \in L_1^{loc}(D)$ е обобщена производна от ред α на $f \in L_1^{loc}(D)$ и във всяка подобласт $D \subset G$.

Това твърдение очевидно е вярно, защото ако дефиниционното тъждество $*$ е изпълнено за пробни функции $v \in C_0^\infty(G)$ с носители в G, то е изпълнено и за класа от пробни функции $v \in C_0^\infty(D)$ с носители в D.

10. Нека $f, g \in L_1^{loc}(G)$ и всяка точка $x \in G$ притежава околност U_x, в която g е обобщена производна на f от ред α, т.е. оп$\partial^\alpha f = g$ в U_x. Тогава g е обобщена производна на f от ред α и в цялата област G.

Елементарната проверка на това свойство се основава на важното в подобен род въпроси "разлагане на единицата, подчинено на покритие с отворени множества".

Дефиниция. Казваме, че семейството от отворени множества $\{U_i\}_{i\in I}$, където I е множество от индекси с произволна природа, имащо произволна мощност, е отворено покритие на множеството A, ако $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.

Дефиниция. Нека $\{U_i\}_{i=1}^N$ е крайно отворено покритие на компактното множество K, т.е. $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_i$. Казваме, че семейството от безкрайно гладки финитни функции $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ е разлагане на единицата подчинено на отвореното покритие ако:

$$\varphi_i \in C_0^\infty(U_i),\ \varphi_i \geq 0,\ i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_i = 1 \text{ в околност на } K.$$

Наготово ще използваме следния резултат, който скоро ще бъде доказан, като използваме оператори за осредняване.

Теорема (за разлагане на единицата). За всяко крайно покритие на едно компактно множество в R^m съществува подчинено на него разлагане на единицата.

Проверка на свойство 10. Нека $v \in C_0^\infty(G)$ е произволна пробна функция. Да означим с K носителя й. Той се покрива от обединението на околностите U_x, в които оп$\partial^\alpha f = g$, т.е. $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$. Тъй като K е компактно множество, съществуват краен брой от тези околности $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_N}\}$, които също го покриват, т.е. $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_{x_i}$. Нека $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ е разлагането на единицата, подчинено на отвореното покритие $\{U_{x_i}\}_{i=1}^N$ на K. За пробната функция $(\varphi_i v) \in C_0^\infty(U_{x_i})$ по предположение имаме

$$\int\limits_G f \partial^\alpha (\varphi_i v) dG = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_G g(\varphi_i v) dG,\ i = 1, \ldots, N.$$

Като сумираме тези равенства и използваме линейността на интеграла и диференцирането в класически смисъл, получаваме

$$\int\limits_G f \partial^\alpha ((\sum_{i=1}^{N} \varphi_i) v) dG = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_G g(\sum_{i=1}^{N} \varphi_i) v dG,$$

откъдето следва интегралното равенство $**$, тъй като интегрираме само върху K, а там имаме $\sum_{i=1}^{N} \varphi_i = 1$.

Още веднъж да кажем какво направихме. Като използвахме разлагане на единицата доказахме, че ако установим локално (в околност на точка), че g е обобщена производна на f, то това свойство е налице и глобално (в цялата област G). Разлагането на единицата върши добра работа и в много други случаи, когато доказваме, че едно глобално свойство е изпълнено, като най-напред го установим локално (в околност на произволна точка).

Примери:

Ще разглеждаме само функции дефинирани в равнината, т.е. $G = R^2$.

Докажете, използвайки дефиницията, че съществуват обобщените производни

$$(|x_1|)_{x_1} = \operatorname{sign} x_1 \text{ и } (|x_1|)_{x_2} = 0,$$

докато в класически смисъл функцията $f(x) = x_1$ няма производна по x_1 при $x_1 = 0$.

Съгласно свойство 9, ако $f(x) = x_1$ има обобщена производна по x_1 в цялата равнина, то тя е нейна обобщена производна и в полуравнината $\{x_1 > 0\}$. Там тя съвпада с производната в класически смисъл и е равна на единица. Аналогично, производната в лявата полуравнина $\{x_1 < 0\}$ е равна на -1. Правата $\{x_1 = 0\}$ има лебегова равнинна мярка нула и върху нея обобщената производна може да приема каквито и да е стойности. За определеност приемаме, че там обобщената производна е равна на нула. И така, с помощта на свойство 9 открихме коя е обобщената производна, ако съществува. Не можем да приложим свойство 10, защото засега сме установили локално съществуването на обобщена производна само в околност на точките от лявата и дясната полуравнина, но не и в околност на точките върху правата $\{x_1 = 0\}$. Налага се да проверим дефиниционното интегрално тъждество за съществуването на обобщена производна, при това направо за цялата равнина (не е нужно да се позоваваме в случая на свойство 10).

Докажете, че не съществува обобщената производна $(\operatorname{sign} x_1)_{x_1}$, но съществува обобщената производна $(\operatorname{sign} x_1)_{x_2} = 0$.

Докажете, че съществува обобщената производна $(\operatorname{sign} x_1)_{x_1 x_2} = 0$, но не съществува $(\operatorname{sign} x_1)_{x_1}$.

Докажете, че съществува обобщената производна

$$(\operatorname{sign} x_1 + \operatorname{sign} x_2)_{x_1 x_2} = 0,$$

но не съществуват обобщените производни от първи ред $(\operatorname{sign} x_1 + \operatorname{sign} x_2)_{x_1}$ и $(\operatorname{sign} x_1 + \operatorname{sign} x_2)_{x_2}$.

Пространства на Соболев. Пълнота

Най-напред ще отбележим, че всяка функция със сумируем квадрат е и локално сумируема, т.е.

$$f \in L_2(G) \Longrightarrow f \in L_1^{loc}(G).$$

Това следва от факта, че ако K е ограничено измеримо подмножество на R^m, то

$$f \in L_2(K) \Longrightarrow f \in L_1(K).$$

В K тъждествено равната на единица функция е сумируема, а също има сумируем квадрат. Но тогава и произведението $f \cdot 1$ е сумируема функция и е в сила неравенството на Коши-Буняковски, т.е. $f = f \cdot 1$ е сумируема функция и

$$\left| \int_K f dK \right| = \left| \int_K (f \cdot 1) dK \right| \leq \sqrt{\int_K 1 dK} \sqrt{\int_K f^2 dK}.$$

Нека G е област в R^m, ограничена или неограничена, а $l \geq 0$ е неотрицателно цяло число.

Дефиниция. Пространство на Соболев $H^l(G)$ наричаме множеството от всички функции със сумируем квадрат в G, които притежават в G обобщени производни със със сумируем квадрат до ред l включително, т.е.

$$H^l(G) = \left\{ f \in L_2(G) : \exists \text{ оп}\partial^\alpha f \in L_2(G),\ |\alpha| \leq l \right\}.$$

Пространството $H^l(G)$ е линейно и в него въвеждаме норма

$$\|f\|_l = \|f\|_{l,G} = \sqrt{\sum_{|\alpha|\leq l} \|\partial^\alpha f\|^2} = \sqrt{\int\limits_G \sum_{|\alpha|\leq l} |\partial^\alpha f|^2 dG},$$

която очевидно се поражда от скаларното произведение

$$(f,g)_l = (f,g)_{l,G} = \int\limits_G \sum_{|\alpha|\leq l} \partial^\alpha f \partial^\alpha g dG.$$

Напомняме, че скаларното произведение и нормата в $L_2(G)$ означаваме с $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ съответно. Очевидно $H^0(G) = L_2(G)$.

Теорема. $H^l(G)$ е хилбертово пространство.

Доказателство. Трябва да установим само, че $H^l(G)$ е пълно пространство. Нека $f_j \in H^l(G)$, $j = 1, 2, \ldots$ е фундаментална редица, т.е. $\|f_i - f_j\|_l \to 0$, $i,j \to \infty$. Но тогава $\|\partial^\alpha f_i - \partial^\alpha f_j\| \to 0$, $i,j \to \infty$ при $|\alpha| \leq l$, т.е. $\partial^\alpha f_j$ е фундаментална редица в $L_2(G)$ и има граница f^α. В частност f_j има в $L_2(G)$ граница f. Ще докажем, че $f^\alpha = \text{оп}\partial^\alpha f$, $|\alpha| \leq l$, т.е. $f \in H^l(G)$. Нека $v \in C_0^\infty(G)$ е произволна пробна функция. По предположение имаме

$$\int\limits_G f_j \partial^\alpha v dG = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_G \partial^\alpha f_j v dG$$

и като извършим в това интегрално тъждество граничен преход при $j \to \infty$ получаваме

$$\int\limits_G f \partial^\alpha v dG = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_G f^\alpha v dG$$

т.е. f^α е обобщена производна на f от ред α. При граничния преход използвахме, че с помощта на неравенството на Коши-Буняковски

$$\left| \int\limits_G (f_j - f) \partial^\alpha v dG \right| \leq \|f_j - f\| \|\partial^\alpha v\| \to 0 \text{ при } j \to \infty$$

и

$$\left|\int_G (\partial^\alpha f_j - f^\alpha) v dG\right| \le \|\partial^\alpha f_j - f^\alpha\| \|v\| \to 0 \text{ при } j \to \infty.$$

Вече установихме, че $f \in H^l(G)$. Тя е граница в $H^l(G)$ на фундаменталната редица f_j, защото очевидно имаме

$$\|f_j - f\|_l^2 = \sum_{|\alpha| \le l} \|\partial^\alpha (f_j - f)\|^2 \to 0 \text{ при } j \to \infty.$$

С това теоремата е доказана.

Пространството на Соболев $\mathring{H}^l(G)$ дефинираме като затворената обвивка в $H^l(G)$ на $C_0^\infty(G)$. То очевидно е пълно хилбертово пространство със нормата и скаларното произведение на $H^l(G)$.