

Рационални изображения на алгебрични многообразия

Нека V и W са квази-афинни или квази-проективни многообразия. Разглеждаме двойките (U, φ_U) , където $U \subseteq V$ е непразно Зариски отворено подмножество, а $\varphi_U : U \rightarrow W$ е морфизъм. Определяме релация $(U_1, \varphi_{U_1}) \sim (U_2, \varphi_{U_2})$, ако съществува непразно Зариски отворено подмножество $U \subseteq U_1 \cap U_2$ с $\varphi_{U_1}|_U = \varphi_{U_2}|_U$. Съгласно следващата лема, $(U_1, \varphi_{U_1}) \sim (U_2, \varphi_{U_2})$ тогава и само тогава, когато $\varphi_{U_1}|_{U_1 \cap U_2} = \varphi_{U_2}|_{U_1 \cap U_2}$.

ЛЕМА 8.1. *Нека $\varphi_1 : V \rightarrow W$ и $\varphi_2 : V \rightarrow W$ са морфизми на алгебрични многообразия. Ако $\varphi_1|_U = \varphi_2|_U$ съвпадат върху непразно Зариски отворено подмножество $U \subseteq V$, то $\varphi_1|_V = \varphi_2|_V$ съвпадат върху V .*

Доказателство: Достатъчно е да докажем, че всяка точка $p \in V$ има Зариски отворена околност $U(p)$, върху която $\varphi_1|_{U(p)} = \varphi_2|_{U(p)}$ съвпадат. По-точно, избираме квази-афинна околност $U'(p) \subseteq \bar{k}^n$ на p върху V , афинна околност $W' \subseteq \bar{k}^m$ на $q_1 = \varphi_1(p)$ върху W и разглеждаме морфизма

$$\varphi_1 : U''(p) = U'(p) \cap \varphi_1^{-1}(W') \longrightarrow W'$$

от квази-афинната околност $U''(p) = U'(p) \cap \varphi_1^{-1}(W')$ на p в афинната околност W' на q_1 . Съгласно Следствие 7.10, ограничението

$$\varphi_1|_{U''(p)} = (f_1, \dots, f_m) : U''(p) \longrightarrow W' \subseteq \bar{k}^m$$

се задава с наредена m -торка полиноми $f_i(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. Избираме афинна околност $W'' \subseteq \bar{k}^m$ на $q_2 = \varphi_2(p)$ върху W и квази-афинна околност $U(p) = U''(p) \cap \varphi_2^{-1}(W'')$ на p върху V , така че

$$\varphi_2|_{U(p)} = (g_1, \dots, g_m) : U(p) \longrightarrow W'' \subseteq \bar{k}^m$$

се задава с наредена m -торка полиноми $g_i(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. Съгласно неприводимостта на V , Зариски отворените подмножества U и $U(p)$ на V имат непразно Зариски отворено сечение и

$$\varphi_1|_{U \cap U(p)} = \varphi_2|_{U \cap U(p)}.$$

Следователно $U \cap U(p) \subseteq Z(f_1 - g_1, \dots, f_m - g_m)$ и Зариски затворената обвивка

$$V = \overline{U \cap U(p)} \subseteq Z(f_1 - g_1, \dots, f_m - g_m),$$

защото Зариски отвореното подмножество $U \cap U(p) \subseteq V$ е Зариски гъсто във V . Оттук $\varphi_1|_{U(p)} = \varphi_2|_{U(p)}$ и $\varphi_1|_V = \varphi_2|_V$, Q.E.D.

Съотношението $(U_1, \varphi_{U_1}) \sim (U_2, \varphi_{U_2})$ за $\varphi_{U_1}|_{U_1 \cap U_2} = \varphi_{U_2}|_{U_1 \cap U_2}$ е релация на еквивалентност. Класовете на еквивалентност $\varphi = (U, \varphi_U)$ се наричат рационални изображения $\varphi : V \dashrightarrow W$. Рационалните изображения $\varphi : V \dashrightarrow W$ не са обезателно определени във всяка точка на V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. *Обединението $\mathcal{D} = \cup_{(U, \varphi_U) \in \varphi} U$ се нарича област на регулярност на φ .*

Областта на регулярност $\mathcal{D}$ на рационално изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ е квази-афинно или квази-проективно многообразие. Ограничението $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow W$ е морфизъм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3. *Рационалното изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ е доминантно, ако образът $\varphi(\mathcal{D})$ на областта на регулярност $\mathcal{D}$ на φ е навсякъде гъст в W .*

ЛЕМА 8.4. *Рационалното изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ е доминантно тогава и само тогава, когато за произволен представител (U, φ_U) на класа на еквивалентност $(U, \varphi_U) = \varphi$ образът $\varphi_U(U)$ на U е Зариски гъст в W .*

Доказателство: По определение, U се съдържа в областта на регулярност $\mathcal{D} = \cup_{(U, \varphi_U) \in \varphi} U$ на φ , така че от $\varphi_U(U) = W$ следва $\varphi(\mathcal{D}) = W$.

Нека $\varphi : V \dashrightarrow W$ е доминантно рационално изображение с област на регулярност $\mathcal{D}$, а (U, φ_U) е представител на φ . Тогава $\mathcal{D} \subseteq V = \overline{U}$, така че $\mathcal{D}$ се състои от гранични точки $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, $p_n \in U$ на U . Морфизмът $\varphi_U : U \rightarrow W$ е непрекъснат относно топологиите на Зариски и

$$\varphi(p) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(p_n)$$

е гранична точка на $\varphi_U(U)$. Сега от $\varphi(\mathcal{D}) \subseteq \overline{\varphi_U(U)}$ и $\overline{\varphi(\mathcal{D})} = W$ получаваме $\overline{\varphi_U(U)} = W$, Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 8.5. *Доминантните рационални изображения $\varphi : V \dashrightarrow W$ са във взаимно еднозначно съответствие с влаганията $\varphi^* : \overline{k}(W) \hookrightarrow \overline{k}(V)$ на съответните функционални полета като $\overline{k}$ -алгебри.*

Доказателство: Нека (U, φ_U) е представител на доминантно рационално изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$. Твърдим, че всеки елемент $(\overline{W_0}, f) \in \overline{k}(W)$ се издърпва от морфизма $\varphi_U : U \rightarrow W$ до елемент $(\varphi_U^{-1}(W_0), \varphi_U^* f) \in \overline{k}(V)$. Преди всичко, Зариски отвореното подмножество $\varphi_U^{-1}(W_0) \subseteq V$ е непразно. При допускане на противното, от $\varphi_U^{-1}(W_0) = \emptyset$ следва, че $\varphi_U(U) \subseteq W \setminus W_0$. Вземайки Зариски затворени обвивки получаваме $W = \overline{\varphi_U(U)} \subseteq W \setminus W_0$ съгласно Лема 8.4. Оттук $W_0 = \emptyset$, което противоречи на определението за функционално поле $\overline{k}(W)$. И така, произволен представител (U, φ_U) на доминантно рационално изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ задава съответствие

$$\varphi_U^* : \overline{k}(W) \longrightarrow \overline{k}(V),$$

$$\varphi_U^* \overline{(W_0, f)} = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_0), \varphi_U^* f)}.$$

Ако (U_1, φ_{U_1}) е друг представител на φ , то $(\varphi_{U_1}^{-1}(W_0), \varphi_{U_1}^* f) \sim (\varphi_U^{-1}(W_0), \varphi_U^* f)$, защото от $f|_{W_0 \cap \varphi_U \varphi_{U_1}^{-1}(W_0)} = f|_{\varphi_{U_1} \varphi_U^{-1}(W_0) \cap W_0}$ следва

$$f \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(W_0) \cap \varphi_{U_1}^{-1}(W_0)} = f \varphi_{U_1}|_{\varphi_U^{-1}(W_0) \cap \varphi_{U_1}^{-1}(W_0)}.$$

Ако $(W_0, f) \sim (W_1, g)$, то $f|_{W_0 \cap W_1} = g|_{W_0 \cap W_1}$ и

$$f \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(W_0) \cap \varphi_U^{-1}(W_1)} = g \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(W_0) \cap \varphi_U^{-1}(W_1)}.$$

С това получаваме, че изображението

$$\varphi^* : \overline{k}(W) \longrightarrow \overline{k}(V),$$

$$\varphi^* \overline{(W_0, f)} = \varphi_U^* \overline{(W_0, f)} = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_0), \varphi_U^* f)}$$

е коректно определено и не зависи от избора на представители $(U, \varphi_U) \in \varphi$ и $(W_0, f) \in \overline{(W_0, f)}$. Още повече, φ^* е хомоморфизъм на $\overline{k}$ -алгебри, защото

$$\varphi^*(\overline{(W_1, f_1)} + \overline{(W_2, f_2)}) = \varphi^*(\overline{(W_1 \cap W_2, f_1 + f_2)}) =$$

$$\begin{aligned}
&= (\overline{\varphi_U^{-1}(W_1 \cap W_2)}, \overline{\varphi^*(f_1 + f_2)}) = (\overline{\varphi_U^{-1}(W_1)}, \overline{\varphi_U^* f_1}) + (\overline{\varphi_U^{-1}(W_2)}, \overline{\varphi_U^* f_2}), \\
\varphi^*((\overline{W_1}, \overline{f_1}) \cdot (\overline{W_2}, \overline{f_2})) &= \varphi^*((\overline{W_1 \cap W_2}, \overline{f_1 \cdot f_2})) = (\overline{\varphi_U^{-1}(W_1 \cap W_2)}, \overline{\varphi^*(f_1 \cdot f_2)}) = \\
&= (\overline{\varphi_U^{-1}(W_1)}, \overline{\varphi_U^* f_1}) \cdot (\overline{\varphi_U^{-1}(W_2)}, \overline{\varphi_U^* f_2}) \quad \text{и} \\
\varphi^*(c(\overline{W_1}, \overline{f_1})) &= \varphi^*((\overline{W_1}, c\overline{f_1})) = (\overline{\varphi_U^{-1}(W_1)}, \overline{\varphi_U^*(c\overline{f_1})}) = c(\overline{\varphi_U^{-1}(W_1)}, \overline{\varphi_U^* f_1})
\end{aligned}$$

за $\forall (\overline{W_1}, \overline{f_1}), (\overline{W_2}, \overline{f_2}) \in \overline{k}(W)$, $\forall c \in \overline{k}$.

Твърдим, че φ^* е влагане, защото ако $\varphi^*(\overline{W_0}, \overline{f}) = (\overline{\varphi_U^{-1}(W_0)}, \overline{\varphi_U^*(f)}) = (\overline{V_0}, \overline{0})$ за Зариски отворено $\emptyset \neq V_0 \subseteq V$, то $f\varphi_U|_{V_0 \cap \varphi_U^{-1}(W_0)} = 0$. Оттук $f|_{\varphi_U(V_0 \cap \varphi_U^{-1}(W_0))} = 0$ или $\varphi_U(V_0 \cap \varphi_U^{-1}(W_0)) \subseteq Z(f)$. Понеже $(V_0 \cap \varphi_U^{-1}(W_0), \varphi_U)$ е представител на $\varphi = (\overline{U}, \overline{\varphi_U})$, подмножеството $\varphi_U(V_0 \cap \varphi_U^{-1}(W_0)) \subseteq W$ е Зариски гъсто в W и $W \subseteq Z(f)$. Следователно $\overline{(W_0, f)} = \overline{(W, 0)}$ е нулевият елемент на $\overline{k}(W)$ и φ^* е влагане.

Нека $\alpha : \overline{k}(W) \hookrightarrow \overline{k}(V)$ е влагане на $\overline{k}$ -алгебри. Избираме непразно афинно Зариски отворено подмножество $W_0 \subseteq \overline{k}^m$ на W и представяме $\overline{k}(W) = \overline{k}(W_0) = F(\overline{k}[W_0])$ като полето от частни на афинния координатен пръстен $\overline{k}[W_0] = \overline{k}[y_1, \dots, y_m]/I(W_0)$ на W_0 . Разглеждаме елементите $y_j + I(W_0) \in \overline{k}[W_0]$ и техните образи $\alpha(y_j + I(W_0)) = (\overline{V_j}, \overline{f_j}) \in \overline{k}(V)$ под действие на α . Сечението $V_0 = V_1 \cap \dots \cap V_m$ на краен брой непразни Зариски отворени подмножества V_i на алгебричното многообразие V е непразно Зариски отворено подмножество V_0 на V , съгласно неприводимостта на V . Ако квази-афинното многообразие $W_0 = W_1 \cap W'$ е сечение на афинно многообразие $W_1 \subseteq \overline{k}^m$ и Зариски отворено подмножество $W' \subseteq \overline{k}^m$, то регулярните функции $\alpha(y_1 + I(W_0)), \dots, \alpha(y_m + I(W_0)) \in \mathcal{O}_{V_0}(V)$ върху V_0 задават морфизъм

$$\varphi_\alpha(\alpha(y_1 + I(W_0)), \dots, \alpha(y_m + I(W_0))) : V_0 \rightarrow W_1$$

по Теорема 11. От съвпадението

$$\varphi_\alpha^* = \alpha : \overline{k}[W_1] = \overline{k}[W_0] \longrightarrow \mathcal{O}_{V_0}(V)$$

върху афинния координатен пръстен $\overline{k}[W_1]$ на W_1 следва съвпадението

$$\varphi_\alpha^* = \alpha : F(\overline{k}[W_0]) = \overline{k}(W_0) = \overline{k}(W) \longrightarrow \overline{k}(V)$$

върху функционалните полета. Класът на еквивалентност на двойката (V_0, φ_α) е рационално изображение $\varphi_\alpha : V \dashrightarrow W$. Остава да проверим доминантността на φ_α . Да допуснем, че φ_α не е доминантно. Тогава по Лема 8.4, Зариски затворената обвивка $\overline{\varphi_\alpha(V_0)}$ на $\varphi_\alpha(V_0)$ е собствено Зариски затворено подмножество на W . Твърдим, че $\overline{\varphi_\alpha(V_0)} \cap W_0 \subsetneq W_0$, защото допускането $W_0 \subseteq \overline{\varphi_\alpha(V_0)}$ води до $W = \overline{W_0} \subseteq \varphi_\alpha(W_0) \subsetneq W$. Оттук следва, че идеалите $I(W_0) \subsetneq I(\overline{\varphi_\alpha(V_0)} \cap W_0)$ се съдържат строго и съществува полином $g(y_1, \dots, y_m) \in I(\overline{\varphi_\alpha(V_0)} \cap W_0) \setminus I(W_0)$. В резултат, $\overline{\varphi_\alpha(V_0)} \cap W_0 \subseteq Z(g)$ и

$$\overline{\varphi_\alpha(V_0)} = \overline{\varphi_\alpha(V_0)} \cap \overline{W_0} = \overline{\overline{\varphi_\alpha(V_0)} \cap W_0} \subseteq Z(g),$$

откъдето $g \in I(\overline{\varphi_\alpha(V_0)})$. За произволна точка $v_0 \in V_0$ имаме

$$0 = g\varphi_\alpha(v_0) = g(\alpha(y_1 + I(W_0)), \dots, \alpha(y_m + I(W_0))) = \alpha(g(y_1, \dots, y_m) + I(W_0)),$$

защото α е хомоморфизъм на $\overline{k}$ -алгебри. По предположение, $\alpha : \overline{k}(W) \hookrightarrow \overline{k}(V)$ е влагане, така че $g(y_1, \dots, y_m) + I(W_0) = I(W_0)$. Противоречието с избора на $g(y_1, \dots, y_m) \notin I(W_0)$ доказва доминантността на рационалното изображение $\varphi_\alpha : V \dashrightarrow W$, Q.E.D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.6. Рационалното изображение $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално, ако се ограничава до изоморфизъм $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ на непразни Зариски отворени подмножества $U_i \subseteq V_i$.

Ако $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално изображение, то съществува рационално изображение $\psi = \overline{(U_2, (\varphi^{-1}|_{U_2}))} : V_2 \dashrightarrow V_1$ с $\psi\varphi = \text{Id}_{V_1}$, $\varphi\psi = \text{Id}_{V_2}$. Ако $\mathcal{D}_\varphi$ е областта на регулярност на φ , а $\mathcal{D}_\psi$ е областта на регулярност на ψ , то $\psi\varphi|_{\mathcal{D}_\varphi \cap \varphi^{-1}(\mathcal{D}_\psi)} = \text{Id}$, $\varphi\psi|_{\mathcal{D}_\psi \cap \psi^{-1}(\mathcal{D}_\varphi)} = \text{Id}$. По-точно, $\mathcal{D}_\varphi \cap \varphi^{-1}(\mathcal{D}_\psi) \subseteq V_1 = \overline{U_1}$ се състои от гранични точки $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, на $U_1 \ni p_n$. Съгласно непрекъснатостта на композиция на морфизми и $\psi\varphi|_{U_1} = \text{Id}_{U_1}$ имаме

$$\psi\varphi(p) = \psi\varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi\varphi(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p.$$

Това доказва $\psi\varphi|_{\mathcal{D}_\varphi \cap \varphi^{-1}(\mathcal{D}_\psi)} = \text{Id}$. Следователно $\psi|_{\varphi(\mathcal{D}_\varphi) \cap \mathcal{D}_\psi} = \varphi^{-1}|_{\varphi(\mathcal{D}_\varphi) \cap \mathcal{D}_\psi}$ и можем да означим $\psi = \varphi^{-1}$.

ЛЕМА 8.7. *Рационалното изображение $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално тогава и само тогава, когато индуцираният хомоморфизъм на $\bar{k}$ -алгебри $\varphi^* : \bar{k}(W) \rightarrow \bar{k}(V)$ е изоморфизъм.*

Доказателство: Ако $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално изображение, то съществува рационално изображение $\varphi^{-1} : V_2 \dashrightarrow V_1$ с $\varphi^{-1}\varphi = \text{Id}_{V_1}$, $\varphi\varphi^{-1} = \text{Id}_{V_2}$. В резултат, $\varphi^*(\varphi^{-1})^* = (\varphi^{-1}\varphi)^* = \text{Id}_{V_1}^* = \text{Id}_{\bar{k}(V_1)}$, $(\varphi^{-1})^*\varphi^* = (\varphi\varphi^{-1})^* = \text{Id}_{V_2}^* = \text{Id}_{\bar{k}(V_2)}$ и $\varphi^* : \bar{k}(V_2) \rightarrow \bar{k}(V_1)$ е изоморфизъм на $\bar{k}$ -алгебри.

Ако рационалното изображение $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ индуцира изоморфизъм на $\bar{k}$ -алгебри $\varphi^* : \bar{k}(V_2) \rightarrow \bar{k}(V_1)$, то съгласно Твърдение 8.5 съществува доминантно рационално изображение $\psi : V_2 \dashrightarrow V_1$ с $\psi^* = (\varphi^*)^{-1}$. От $\text{Id}_{V_1}^* = \text{Id}_{\bar{k}(V_1)} = (\varphi^*)^{-1}\varphi^* = \psi^*\varphi^* = (\varphi\psi)^*$ и $\text{Id}_{V_2}^* = \text{Id}_{\bar{k}(V_2)} = \varphi^*(\varphi^*)^{-1} = \varphi^*\psi^* = (\varphi\psi)^*$ следват $\varphi\psi = \text{Id}_{V_1}$ и $\psi\varphi = \text{Id}_{V_2}$ по същото твърдение. Ако $\mathcal{D}_1 \subset V$ е областта на регулярност на φ , а $\mathcal{D}_2 \subseteq W$ е областта на регулярност на ψ , то ограничението $\varphi : \mathcal{D}_1 \cap \varphi^{-1}(\mathcal{D}_2) \rightarrow \varphi(\mathcal{D}_1) \cap \mathcal{D}_2$ е изоморфизъм с $\varphi^{-1} = \psi$ и $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално изображение, Q.E.D.

ЗАДАЧА 8.8. *Дадени са проективна повърхнина*

$$V = \{x = [x_0 : \dots : x_3] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid x_0x_3^2 = x_0^3 - x_0^2x_1 + x_0x_1^2 - x_2^3\}$$

и рационално изображение

$$\varphi : \mathbb{P}^3(\bar{k}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\bar{k}),$$

$$\varphi([x_0 : \dots : x_3]) = [x_0 : x_1 : x_2].$$

Да се докаже, че ограничението $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\bar{k})$ е доминантно рационално изображение и функционалното поле $\bar{k}(V)$ на V е крайно разширение на $\varphi^\bar{k}(\mathbb{P}^2(\bar{k}))$. Да се намери степента на разширението $\bar{k}(V) \supset \varphi^*\bar{k}(\mathbb{P}^2(\bar{k}))$ и да се определи дали $\varphi : V \rightarrow \mathbb{P}^2(\bar{k})$ е бирационално.*

Упътване: Използвайте, че $V \cap U_0$ за $U_0 = \{x \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid x_0 \neq 0\}$ е афинно Зариски отворено подмножество на V .

ЗАДАЧА 8.9. *Дадени са проективна повърхнина*

$$V = \{x = [x_0 : \dots : x_3] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid x_0x_3^2 = x_0^3 - x_0^2x_1 + x_0x_1^2 - x_2^3\}$$

и рационално изображение

$$\varphi : \mathbb{P}^3(\bar{k}) \dashrightarrow \mathbb{P}^3(\bar{k}),$$

$$\varphi([x_0 : \dots : x_3]) = [x_1 : x_2 : x_3 : x_1 + x_2].$$

Да се докаже, че:

- (i) $\varphi : V \rightarrow \mathbb{P}^3(\bar{k})$ е недоминантен морфизъм;
- (ii) $\varphi : V \rightarrow H = \{y = [y_0 : \dots : y_3] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid y_0 + y_1 - y_3 = 0\} \simeq \mathbb{P}^2(\bar{k})$ е доминантен, небирационален морфизъм;

(iii) функционалното поле $\bar{k}(V)$ на V е разширение от степен 3 на $\varphi^*\bar{k}(H)$, където $\bar{k}(H)$ е функционалното поле на H .

Упътване: Работете с $V \cap U_1$ за $U_1 = \{x = [x_0 : \dots : x_3] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid x_1 \neq 0\}$.

ЗАДАЧА 8.10. Дадени са проективна повърхнина

$$V = \{x = [x_0 : \dots : x_3] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid x_0 x_3^2 = x_0^3 - x_0^2 x_1 + x_0 x_1^2 - x_2^3\}$$

и рационално изображение

$$\varphi : \mathbb{P}^3(\bar{k}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\bar{k}),$$

$$\varphi([x_0 : \dots : x_3]) = [x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2].$$

Да се докаже, че:

- (i) допълнението $V \setminus \mathcal{D}$ на областта на регулярност $\mathcal{D}$ на $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\bar{k})$ е точка p ;
- (ii) рационалното изображение $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\bar{k})$ не е доминантно;
- (iii) разширението $\bar{k}(\mathcal{D} \cap U_0) \supset \varphi^*\bar{k}(\varphi(\mathcal{D} \cap U_0))$ не е крайно.

ЗАДАЧА 8.11. Дадени са проективна повърхнина

$$V = \{x = [x_0 : \dots : x_3] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid x_0 x_3^2 = x_0^3 - x_0^2 x_1 + x_0 x_1^2 - x_2^3\}$$

и рационално изображение

$$\varphi : \mathbb{P}^3(\bar{k}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\bar{k}),$$

$$\varphi([x_0 : \dots : x_3]) = [x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2].$$

Да се докаже, че:

- (i) допълнението $V \setminus \mathcal{D}$ на областта на регулярност $\mathcal{D}$ на $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\bar{k})$ е проективна права;
- (ii) рационалното изображение $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\bar{k})$ е доминантно;
- (iii) разширението $\bar{k}(V) \supset \varphi^*\bar{k}(\mathbb{P}^2(\bar{k}))$ е от степен 4.

Упътване: (ii) Проверете, че $\varphi(V \cap U_0) \subset U'_0$ за

$$U_0 = \{x = [x_0 : \dots : x_3] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid x_0 \neq 0\}, \quad U'_0 = \{y = [y_0 : y_1 : y_2] \in \mathbb{P}^2(\bar{k}) \mid y_0 \neq 0\};$$

(iii) Ако $t_1 = \frac{x_1}{x_0}$ и $t_2 = \frac{x_2}{x_0}$, то функционалното поле $\bar{k}(V) = \bar{k}(V \cap U_0) = \bar{k}(\overline{t_1}, \overline{t_2}, \overline{t_3})$ е породено от $\overline{t_i} = t_i + I(V \cap U_0)$ за $1 \leq i \leq 3$ със съотношението $\overline{t_3}^2 = -\overline{t_2}^3 + \overline{t_1}^2 - \overline{t_1} + 1$. Проверете, че $\varphi^*\bar{k}(\mathbb{P}^2(\bar{k})) = \bar{k}(\overline{t_1}, \overline{t_2}^2)$ и пресметнете степеня

$$[\bar{k}(V) : \bar{k}(\overline{t_1}, \overline{t_2}^2)] = [\bar{k}(V) : \bar{k}(\overline{t_1}, \overline{t_2})][\bar{k}(\overline{t_1}, \overline{t_2}) : \bar{k}(\overline{t_1}, \overline{t_2}^2)].$$

В останалата част от въпроса ще докажем, че всяко алгебрично многообразие е бирационално на афинно пространство или на хиперповърхнина в афинно пространство.

ЛЕМА 8.12. Нека полето $F = K(a_1, \dots, a_n)$ е крайно породено разширение на полето K . Тогава всеки две максимални алгебрично независими над K системи елементи $x_1, \dots, x_k \in F$ и $y_1, \dots, y_m \in F$ имат един и същи брой елементи $k = m$.

Произволна максимална алгебрично независима над K подсистема $x_1, \dots, x_k \in F$ се нарича базис на трансцендентност на F над K .

Броят на елементите в кой и да е базис на трансцендентност на F над K се нарича степен на трансцендентност на F над K и се бележи с $\text{tr deg}_K(F)$.

Доказателство: Допускаме, че $k > m$. С индукция по $1 \leq i \leq m$ ще установим, че ако $F \supseteq K(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_m)$ е алгебрично разширение, то след замяна на y_i с x_i полето F е алгебрично разширение на $K(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_m)$. За $i = m$ получаваме, че $F \supseteq K(x_1, \dots, x_m)$ е алгебрично разширение, което противоречи на алгебричната независимост на $x_1, \dots, x_k$ над K при $k > m$ и доказва $k = m$.

За $i = 1$ знаем, че $F \supseteq K(y_1, \dots, y_m)$ е алгебрично разширение. Следователно $x_1 \in F$ е алгебрично над $K(y_1, \dots, y_m)$ и съществува полином $f_1(t, y_1, \dots, y_m) \in K[t, y_1, \dots, y_m] \setminus \{0\}$ с $f_1(x_1, y_1, \dots, y_m) = 0$. Поради алгебричната независимост на x_1 над K , полиномът $f_1(t, y_1, \dots, y_m)$ зависи от поне едно y_j с $1 \leq j \leq m$. След евентуална преномерация на $y_1, \dots, y_m$ можем да считаме, че $f_1(t, y_1, \dots, y_m)$ зависи от y_1 и y_1 е алгебрично над $K(x_1, y_2, \dots, y_m)$. Твърдим, че $F \supseteq K(x_1, y_2, \dots, y_m)$ е алгебрично разширение. Наистина, за $\forall z \in F$ степента

$$[K(z, x_1, y_1, \dots, y_m) : K(x_1, y_2, \dots, y_m)] = [K(z, x_1, y_1, \dots, y_m) : K(x_1, y_1, \dots, y_m)][K(x_1, y_1, \dots, y_m) : K(x_1, y_2, \dots, y_m)] < \infty$$

е крайна при пресмятане чрез изпускане на z и y_1 . Следователно при изпускане на y_1 получаваме подполе $K(z, x_1, y_2, \dots, y_m) \subseteq K(z, x_1, y_1, \dots, y_m)$ от крайна степен

$$[K(z, x_1, y_2, \dots, y_m) : K(x_1, y_2, \dots, y_m)] < \infty$$

над $K(x_1, y_2, \dots, y_m)$ и $z \in F$ е алгебрично над $K(x_1, y_2, \dots, y_m)$. Това доказва алгебричността на разширението $F \supseteq K(x_1, y_2, \dots, y_m)$.

Да предположим, че $F \supseteq K(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_m)$ е алгебрично разширение за някое $2 \leq i \leq m$. Тогава x_i е алгебрично над $K(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_m)$ и съществува полином $f_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_m) \in K[t, x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_m] \setminus \{0\}$ с $f_i(x_i, x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_m) = 0$. Съгласно алгебричната независимост на $x_1, \dots, x_i$ над K , полиномът $f_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_m)$ зависи от поне едно y_j с $i \leq j \leq m$. След евентуална преномерация на $y_i, \dots, y_m$ можем да считаме, че $f_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_m)$ зависи от y_i и y_i е алгебрично над $K(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_m)$. Твърдим, че $F \supseteq K(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_m)$ е алгебрично разширение. По-точно, за $\forall z \in F$ степента

$$\begin{aligned} [K(z, x_1, \dots, x_i, y_i, \dots, y_m) : K(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_m)] &= \\ = [K(z, x_1, \dots, x_i, y_i, \dots, y_m) : K(x_1, \dots, x_i, y_i, \dots, y_m)] \cdot \\ \cdot [K(x_1, \dots, x_i, y_i, \dots, y_m) : K(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_m)] &< \infty \end{aligned}$$

е крайна при изпускане на z и y_i . Следователно при изпускане на y_i получаваме подполе $K(z, x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_m) \subseteq K(z, x_1, \dots, x_i, y_i, \dots, y_m)$ от крайна степен

$$[K(z, x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_m) : K(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_m)] < \infty$$

над $K(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_m)$ и z е алгебрично над $K(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_m)$. Това доказва алгебричността на $F \supseteq K(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_m)$ и завършва доказателството на лемата, Q.E.D.

ТЕОРЕМА 12. Нека $F = K(a_1, \dots, a_n)$ е крайно породено разширение на алгебрично затворено поле K , което не е чисто трансцендентно над K . Тогава съществува базис на трансцендентност $x_1, \dots, x_d$ на F над K и сепарабелен над $K(x_1, \dots, x_d)$ елемент $\theta \in F$, така че $F = K(x_1, \dots, x_d, \theta)$.

Доказателство: Нека $d = \text{tr deg}(F)$ е степента на трансцендентност на $F = K(a_1, \dots, a_n)$ над K , т.е. максималният брой алгебрично независими над K елементи на F . Ще докажем теоремата с индукция по $n - d \geq 1$. Ако $F = (a_1, \dots, a_d, a_{d+1}) \supseteq K$, то съществува максимална алгебрично независима над

K подсистема $t_1, \dots, t_d \in \{a_1, \dots, a_d, a_{d+1}\}$, т.е., базис на трансцендентност $t_1, \dots, t_d$ на F над K , съдържащ се в пораждащата система $a_1, \dots, a_d, a_{d+1}$ на F над K . Полето $F = K(t_1, \dots, t_d, t_{d+1}) \supset F_0 = K(t_1, \dots, t_d)$ е просто алгебрично разширение $F = F_0(t_{d+1}) \supset F_0$ на F_0 . Нека $g(t_1, \dots, t_d, x_{d+1}) \in K(t_1, \dots, t_d)[x_{d+1}]$ е минималният полином на t_{d+1} над $F_0 = K(t_1, \dots, t_d)$. След освобождаване от знаменателите на коефициентите на g от $K(t_1, \dots, t_d)$ получаваме полином $f(t_1, \dots, t_d, x_{d+1}) \in K[t_1, \dots, t_d][x_{d+1}]$ от минимална степен относно x_{d+1} с корен t_{d+1} . Ако $f(t_1, \dots, t_d, x_{d+1}) \in K[t_1, \dots, t_d][x_{d+1}]$ няма кратни корени като полином на x_{d+1} с коефициенти от $K[t_1, \dots, t_d]$, то $t_{d+1} \in F$ е сепарабелен над F_0 и теоремата е доказана. Ако $f(t_1, \dots, t_d, x_{d+1})$ има кратен корен като полином на x_{d+1} с коефициенти от $K[t_1, \dots, t_d]$, то $f(t_1, \dots, t_d, x_{d+1})$ и $\frac{\partial f}{\partial x_{d+1}} \in K[t_1, \dots, t_d][x_{d+1}]$ имат общ корен t_{d+1} . Следователно $f(t_1, \dots, t_d, x_{d+1})$ и $\frac{\partial f}{\partial x_{d+1}}(t_1, \dots, t_d, x_{d+1})$ имат най-голям общ делител $GCD\left(f, \frac{\partial f}{\partial x_{d+1}}\right) \notin K^*$ като полиноми на x_{d+1} . Полиномът $f \in K[t_1, \dots, t_d][x_{d+1}]$ е неразложим над $K[t_1, \dots, t_d]$, така че $GCD\left(f, \frac{\partial f}{\partial x_{d+1}}\right) = f$ и $\frac{\partial f}{\partial x_{d+1}}(t_1, \dots, t_d, x_{d+1}) \equiv 0$, съгласно $\deg \frac{\partial f}{\partial x_{d+1}} < \deg f$. В такъв случай твърдим, че $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \not\equiv 0$ за някое $1 \leq i \leq d$. При допускане на противното, степенните показатели на всички променливи от всички мономи на f се делят на $p = \text{char}(K)$ и

$$f(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) = g(x_1, \dots, x_d, x_{d+1})^{p^l}$$

за някакъв полином $g(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \in K[x_1, \dots, x_d][x_{d+1}]$ и някакво естествено число l . Това противоречи на неразложимостта на f над $K[x_1, \dots, x_d]$ и доказва $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \not\equiv 0$ за някое $1 \leq i \leq d$. Ще проверим, че ако $\frac{\partial f}{\partial x_i} \not\equiv 0$, то $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{d+1}$ е базис на трансцендентност на F над K . Наистина, ако допуснем, че $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{d+1}$ са алгебрично зависими над K и присъединим алгебричния над $K(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{d+1})$ елемент t_i , то получаваме система $t_1, \dots, t_d, t_{d+1}$ с не повече от $d-1$ алгебрично независими над K елемента. Това противоречи на трансцендентността на $t_1, \dots, t_d$ над K и доказва трансцендентността на $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{d+1}$ над K . В общия случай, за $n-d \geq 2$ избираме базис на трансцендентност $t_1, \dots, t_d$ измежду пораждащите $a_1, \dots, a_n$ на $F = K(a_1, \dots, a_n)$ над K . Представяме $F = K(t_1, \dots, t_d, t_{d+1}, \dots, t_n)$ и забелязваме, че $t_1, \dots, t_d$ е базис на трансцендентност и на $F_1 = K(t_1, \dots, t_d, t_{d+1}, \dots, t_{n-1})$. По индукционно предположение съществува базис на трансцендентност $s_1, \dots, s_d$ на F_1 над K и сепарабелен над $F_0 = K(t_1, \dots, t_d)$ елемент $s_{d+1} \in F_1$, така че $F_1 = K(t_1, \dots, t_{n-1}) = K(s_1, \dots, s_d, s_{d+1})$. В резултат, $F = K(s_1, \dots, s_d, s_{d+1}, t_n)$ за сепарабелен над $K(s_1, \dots, s_d)$ елемент s_{d+1} и алгебричен над $K(s_1, \dots, s_d)$ елемент t_n . Съгласно Забележка 2.3 съществува примитивен елемент θ на F над $F_0 = K(s_1, \dots, s_d)$, така че $F = K(s_1, \dots, s_d, \theta) \supset K(s_1, \dots, s_d)$ е алгебрично разширение. Ако алгебричният над $F_0 = K(s_1, \dots, s_d)$ елемент θ е сепарабелен, то теоремата е доказана. Ако θ не е сепарабелен над $F_0 = K(s_1, \dots, s_d)$, то повтаряме разсъжденията от случая $n-d=1$ и получаваме базис на трансцендентност $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_d, \theta$ на F над K , така че s_i е сепарабелен над $K(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_d, \theta)$, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 8.13. *Всяко алгебрично многообразие V е бирационално на афинно пространство или на хиперповърхнина в афинно пространство.*

Доказателство: Избираме афинно отворено подмножество $V_0 \subset \bar{k}^n$ на V . Тогава функционалното поле

$$\bar{k}(V) = \bar{k}(V_0) = F(\bar{k}[V_0]) = F(\bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V_0)) = \bar{k}(x_1 + I(V_0), \dots, x_n + I(V_0))$$

е крайно породено разширение на $\bar{k}$. Означаваме с d степента на трансценден-
тност на $\bar{k}(V)$ над $\bar{k}$.

Ако $\bar{k}(V)$ на V е чисто трансцендентно разширение $\bar{k}(V) = \bar{k}(t_1, \dots, t_d)$ на $\bar{k}$ от
степен d , то V е бирационално на $\bar{k}^d$, защото афинният координатен пръстен на
 $\bar{k}^d$ е полиномиалният пръстен $\bar{k}[x_1, \dots, x_d]$, а неговото поле от частни $\bar{k}(\bar{k}^d) =$
 $F(\bar{k}[\bar{k}^d]) = F(\bar{k}[x_1, \dots, x_d]) = \bar{k}(x_1, \dots, x_d)$ е чисто трансцендентно разширение
на $\bar{k}$ с $x_1, \dots, x_d$.

Ако $\bar{k}(V) \supset \bar{k}$ не е чисто трансцендентно разширение на $\bar{k}$, то съгласно Теорема
12, съществува базис на трансценден-тност $\tau_1, \dots, \tau_d$ на $\bar{k}(V)$ над $\bar{k}$ и сепара-
белен над $\bar{k}(\tau_1, \dots, \tau_d)$ елемент $\tau_{d+1} \in \bar{k}(V)$, така че $\bar{k}(V) = \bar{k}(\tau_1, \dots, \tau_d, \tau_{d+1})$.
Нека $g(\tau_1, \dots, \tau_d, x_{d+1}) \in \bar{k}(\tau_1, \dots, \tau_d)[x_{d+1}]$ е минималният полином на τ_{d+1}
над $\bar{k}(\tau_1, \dots, \tau_d)$. Освобождавайки се от знаменателите на коефициентите от
 $\bar{k}(\tau_1, \dots, \tau_d)$ получаваме полином

$$f(\tau_1, \dots, \tau_d, x_{d+1}) \in \bar{k}[\tau_1, \dots, \tau_d][x_{d+1}]$$

от минимална степен с условието $f(\tau_1, \dots, \tau_d, \tau_{d+1}) = 0$. Хиперповърхнината
 $Z(f) \subset \bar{k}^{d+1}$ има афинен координатен пръстен

$$\bar{k}[Z(f)] = \bar{k}[x_1, \dots, x_d, x_{d+1}][f] = \bar{k}[x_1 + \langle f \rangle, \dots, x_d + \langle f \rangle, x_{d+1} + \langle f \rangle].$$

Следователно функционалното поле на $Z(f)$ е крайно породено разширение

$$\bar{k}(Z(f)) = F(\bar{k}[Z(f)]) = \bar{k}(x_1 + \langle f \rangle, \dots, x_d + \langle f \rangle, x_{d+1} + \langle f \rangle) \supset \bar{k}.$$

Елементите $x_1 + \langle f \rangle, \dots, x_d + \langle f \rangle$ на $\bar{k}(Z(f))$ са алгебрично независими над $\bar{k}$,
защото идеалът $IZ(f) = r(\langle f \rangle)$ не съдържа ненулеви полиноми, които не за-
висят от x_{d+1} . Следователно $\bar{k}(x_1 + \langle f \rangle, \dots, x_d + \langle f \rangle) \supset \bar{k}$ е чисто трансцен-
дентно разширение, а $x_{d+1} + \langle f \rangle$ е корен на полинома $f(\tau_1, \dots, \tau_d, x_{d+1}) \in$
 $\bar{k}[\tau_1, \dots, \tau_d][x_{d+1}]$. Следователно функционалните полета $\bar{k}(Z(f)) \simeq \bar{k}(V)$ са
изоморфни като $\bar{k}$ -алгебри. Съгласно Лема 8.7, това е достатъчно за бирацио-
налността на V с $Z(f)$, Q.E.D.

ЗАДАЧА 8.14. *Да се докаже, че проективната крива*

$$V = \{x = [x_0 : \dots : x_3] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid x_0^2 - x_0x_1 + x_2^2 = 0, \quad x_0^3 - x_0^2x_2 + x_3^3 = 0\}$$

е бирационална, но не и изоморфна на афинната права $\bar{k}$.

Упътване: Проверете, че $V \cap U_0$ за $U_0 = \{x \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid x_0 \neq 0\}$ е изоморфно
на $\bar{k}$, а $V \setminus U_0$ е точка.

ЗАДАЧА 8.15. *Да се намери хиперповърхнина V_0 в $\bar{k}^2$, която е бирационална
на проективната крива*

$$V = \{x = [x_0 : \dots : x_3] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid x_0^2 - x_0x_1 + x_2^2 = 0, \quad x_0^3 - x_0x_2^2 + x_3^3 = 0\}.$$

Упътване: Използвайте, че V е бирационална на $V \cap U_0$, където

$$U_0 = \{x \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid x_0 \neq 0\}.$$