

Морфизми на алгебрични многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Изображението $\varphi : V \rightarrow W$ на алгебрични многообразия е морфизъм, ако:

- (i) φ е непрекъснато относно топологията на Зариски и
- (ii) всяка регулярна функция $f : W_1 \rightarrow \bar{k}$ върху Зариски отворено подмножество $W_1 \subseteq W$ с непразен праобраз $\varphi^{-1}(W_1) \neq \emptyset$ се издърпва до регулярна функция $\varphi^*(f) = f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W_1) \rightarrow \bar{k}$.

Твърдение 7.2 (i) дава основен пример за морфизъм на квази-афинни многообразия. В Следствие 7.10 ще установим, че всеки морфизъм на квази-афинно многообразие в афинно многообразие е от този вид. Твърдение 7.2 (ii) дискутира пример за морфизъм на квази-проективни многообразия. Съгласно Следствие 7.15, всеки морфизъм на проективни многообразия се моделира локално от този пример.

ТВЪРДЕНИЕ 7.2. (i) Нека $V \subseteq \bar{k}^n$ и $W \subseteq \bar{k}^m$ са квази-афинни многообразия, а $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ са такива полиноми, за които изображението $\varphi = (f_1, \dots, f_m) : V \rightarrow \bar{k}^m$ има образ $\varphi(V) \subseteq W$, съдържащ се в W . Тогава $\varphi : V \rightarrow W$ е регулярно изображение на V в W .

(ii) Нека $V \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$ и $W \subseteq \mathbb{P}^m(\bar{k})$ са квази-проективни многообразия, а

$$f_0(x_0, \dots, x_n), \dots, f_m(x_0, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$$

са такива хомогенни полиноми от една и съща степен, за които изображението $\varphi = [f_0 : \dots : f_m] : V \rightarrow \mathbb{P}^m(\bar{k})$ има образ $\varphi(V) \subseteq W$, съдържащ се в W . Тогава $\varphi : V \rightarrow W$ е регулярно изображение на V в W .

Доказателство: (ii) За проверка на непрекъснатостта на изображението $\varphi = [f_0 : \dots : f_m] : V \rightarrow W$ да разгледаме Зариски затворено подмножество $Z_h(S) \subseteq W$ за някое крайно множество от полиноми $S \subseteq \bar{k}[y_0, \dots, y_m]$. Праобразът

$$\varphi^{-1}Z_h(S) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in Z_h(S)\} =$$

$$= \{v \in V \mid f\varphi(v) = f(f_0, \dots, f_m)(v) = 0 \text{ за } \forall \text{ хомогенен } f \in S\}.$$

За произволен полином $g(y_0, \dots, y_m) \in \bar{k}[y_0, \dots, y_m]$, суперпозицията $g(f_0, \dots, f_m)$ от $\bar{k}[x_0, \dots, x_n]$ е хомогенен полином на $x_0, \dots, x_n$ тогава и само тогава, когато $g \in \bar{k}[y_0, \dots, y_m]$ е хомогенен полином. По-точно, ако $g \in \bar{k}[y_0, \dots, y_m]$ е хомогенен полином от степен d , а $f_0, \dots, f_m \in \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$ са хомогенни полиноми от степен d_0 , то $g(f_0, \dots, f_m) \in \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$ е хомогенен полином от степен dd_0 . Обратно, ако $g(f_0, \dots, f_m) \in \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$ е хомогенен полином от степен D и $g(y_0, \dots, y_m) \in \bar{k}[y_0, \dots, y_m]$ има моном от степен k , то $kd_0 = D$, така че d_0 дели D и всеки моном на $g(y_0, \dots, y_m)$ е от степен $\frac{D}{d_0}$.

Нека $f : W_1 \rightarrow \bar{k}$ е регулярна функция върху Зариски отворено подмножество $W_1 \subseteq W$ с $\varphi^{-1}(W_1) \neq \emptyset$. Трябва да проверим, че $\varphi^*f = f\varphi : \varphi^{-1}(W_1) \rightarrow \bar{k}$ е регулярна функция върху $\varphi^{-1}(W_1)$. Фиксираме точка $p \in \varphi^{-1}(W_1)$ и афинна Зариски отворена околност $U(p)'$ на p върху $\varphi^{-1}(W_1)$, която се съдържа в

стандартното афинно отворено подмножество

$$U_0 = \{x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid x_0 \neq 0\},$$

след евентуално преномериране на хомогенните координати върху $\mathbb{P}^n(\bar{k})$. Избираме афинна Зариски отворена околност $W(q)'$ на $q = \varphi(p) = [f_0(p) : \dots : f_m(p)]$ върху W_1 , която се съдържа в стандартното афинно отворено подмножество

$$U'_0 = \{y = [y_0 : \dots : y_m] \in \mathbb{P}^m(\bar{k}) \mid y_0 \neq 0\}$$

върху $\mathbb{P}^m(\bar{k})$, след евентуално преномериране на хомогенните координати върху $\mathbb{P}^m(\bar{k})$. Тогава съществува Зариски отворена околност $W(q)$ на q върху $W(q)'$, така че

$$f|_{W(q)} = \frac{g}{h}$$

за g, h от афинния координатен пръстен $\bar{k}[W(q)] = \bar{k}\left[\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right] / I(W(q))$ на $W(q)$ с $h(r) \neq 0$ за $\forall r \in W(q)$. Повдигаме g и h до полиноми

$$\tilde{g}\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right), \tilde{h}\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right) \in \bar{k}\left[\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right]$$

и представяме

$$f|_{W(q)} = \frac{\tilde{g}\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right) + I(W(q))}{\tilde{h}\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right) + I(W(q))} \Big|_{W(q)} = \frac{\tilde{g}\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right)}{\tilde{h}\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right)} \Big|_{W(q)}$$

за идеала $I(W(q)) \triangleleft \bar{k}\left[\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right]$ на $W(q)$. Ако $U(p) := \varphi^{-1}W(q)$, то функцията

$$f\varphi|_{U(p)} = \frac{\tilde{g}\left(\frac{f_1\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{f_0\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}, \dots, \frac{f_n\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{f_0\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}\right)}{\tilde{h}\left(\frac{f_1\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{f_0\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}, \dots, \frac{f_n\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{f_0\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}\right)} \Big|_{U(p)} = \frac{P\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{Q\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)} \Big|_{U(p)}$$

се представя като частно на полиноми $P\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right), Q\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in \bar{k}\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right]$ на афинните координати $\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}$ върху U_0 . Освен това, $f\varphi|_{U(p)}$ е коректно определено върху $U(p)$, защото $f_0\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \neq 0$ и

$$\tilde{h}\left(\frac{f_1\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{f_0\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}, \dots, \frac{f_n\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{f_0\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}\right) \quad \text{за} \quad \forall \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in U(p).$$

Следователно $f\varphi : \varphi^{-1}(W_1) \rightarrow \bar{k}$ е регулярна функция и

$$\varphi = [f_0 : \dots : f_m] : V \rightarrow W$$

е морфизъм.

ЗАДАЧА 7.3. Да се докаже Твърдение 7.2 (i).

ПРИМЕР 7.4. Изображението

$$\varphi : V_0 = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{F}_9}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}_9},$$

$$\varphi(x, y) = (x + 1)y$$

е морфизъм на афинното многообразие V_0 върху $\overline{\mathbb{F}_9}$.

ПРИМЕР 7.5. *Изображението*

$$\psi : W_0 = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{F}}_9) \mid y^2 z = x^3 + y^3\},$$

$$\psi([x : y : z]) = [x^2 : xy : z^2]$$

е морфизъм на проективното многообразие W_0 в $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_9)$.

ЛЕМА 7.6. *Всяка регулярна функция $f : V \rightarrow \bar{k}$ върху квази-афинно или квази-проективно многообразие V е непрекъсната относно топологията на Зариски.*

Доказателство: Да напомним, че Зариски затворените подмножества S на $\bar{k}$ са $S = \emptyset$, $S = \bar{k}$ или $S = \{a_1, \dots, a_m\}$ за някое $m \in \mathbb{N}$. Съгласно $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\bar{k}) = V$ и $f^{-1}(\{a_1, \dots, a_m\}) = \cup_{i=1}^m f^{-1}(a_i)$, достатъчно е да докажем, че $f^{-1}(a)$ е Зариски затворено подмножество на V за $\forall a \in \bar{k}$. Първо ще проверим, че $f^{-1}(a)$ е локално затворено във V , т.е. всяка точка $p \in V$ има Зариски отворена околност $U(p)$ върху V , така че $U(p) \cap f^{-1}(a)$ е относително Зариски затворено в $U(p)$. Наистина, съгласно определението за регулярност на $f : V \rightarrow \bar{k}$ в $p \in V$ съществува афинна Зариски отворена околност $U(p)$ на p върху V , така че $f|_{U(p)} = \frac{g}{h}$ за $g, h \in \bar{k}[U(p)]$, $h(p) \neq 0$. Ако полиномите $\tilde{g}(x_1, \dots, x_n), \tilde{h}(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ повдигат $g = \tilde{g}(x_1, \dots, x_n) + I(U(p))$, $h = \tilde{h}(x_1, \dots, x_n) + I(U(p))$, то сечението

$$U(p) \cap f^{-1}(a) = \left\{ x \in U(p) \mid \frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{h}(x)} = a \right\} = \{x \in U(p) \mid \tilde{g}(x) - a\tilde{h}(x) = 0\}$$

е Зариски затворено подмножество на $U(p)$. Това означава съществуване на Зариски затворено $Z(p) \subseteq V$ с $U(p) \cap f^{-1}(a) = U(p) \cap Z(p)$.

Покриваме $V = \cup_{p \in V} U(p)$ със Зариски отворени околности $U(p)$ и представяме $f^{-1}(a) = \cup_{p \in V} U(p) \cap Z(p)$. Топологията на Зариски върху V е нъотерова, така че съществува крайно подпокриване $V = \cup_{i=1}^m U_i$, $U_i = U(p_i)$ и множеството $f^{-1}(a) = \cup_{i=1}^m U_i \cap f^{-1}(a) = \cup_{i=1}^m U_i \cap Z_i$, $Z_i = Z(p_i)$. Крайното сечение $U_1 \cap \dots \cap U_m$ на непразни Зариски отворени подмножества U_i на неприводимо алгебрично множество V е непразно Зариски отворено подмножество с

$$U_1 \cap \dots \cap U_m \cap f^{-1}(a) = U_1 \cap \dots \cap U_m \cap Z_i \quad \text{за } 1 \leq i \leq m.$$

Сравняването на Зариски затворените обвивки на двете страни дава $\overline{f^{-1}(a)} = Z_i$ за $\forall 1 \leq i \leq m$, така че

$$f^{-1}(a) = \cup_{i=1}^m U_i \cap \overline{f^{-1}(a)} = \overline{f^{-1}(a)}$$

и $f^{-1}(a)$ е Зариски затворено във V , Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 7.7. *Изображение $\varphi : V \rightarrow W$ на квази-афинно или квази-проективно многообразие V в квази-афинно многообразие $W \subset \bar{k}^m$ е морфизъм тогава и само тогава, когато композициите $y_j \circ \varphi : V \rightarrow \bar{k}$ са регулярни функции за всички $1 \leq j \leq m$.*

Доказателство: Координатните функции $y_j : W \rightarrow \bar{k}$ са регулярни върху W . Затова, ако $\varphi : V \rightarrow W$ е морфизъм, то издърпванията $\varphi^* y_j = y_j \circ \varphi : V \rightarrow \bar{k}$ са регулярни функции върху V .

Да предположим, че $\varphi^* y_j = y_j \circ \varphi : V \rightarrow \bar{k}$ са регулярни функции върху V за $\forall 1 \leq j \leq m$. За непрекъснатостта на $\varphi : V \rightarrow W$ трябва да докажем, че всяко Зариски затворено подмножество $Z = Z(S) \subseteq W$, зададено с крайно множество от полиноми $S \subset \bar{k}[y_1, \dots, y_m]$ има Зариски затворен праобраз $\varphi^{-1}(Z) \subseteq V$. За целта да отбележим, че регулярните функции $y_j \circ \varphi : V \rightarrow \bar{k}$ са непрекъснати,

както и суперпозициите $g\varphi : V \rightarrow \bar{k}$ с полиноми $g \in S \subset \bar{k}[y_1, \dots, y_m]$, защото сума и произведение на непрекъснати функции е непрекъсната функция. Следователно

$$\varphi^{-1}(Z) = \{v \in V \mid g\varphi(v) = 0, \forall g \in S\} = \bigcap_{g \in S} (g\varphi)^{-1}(0)$$

е затворено подмножество на V като сечение на на краен брой затворени подмножества $(g\varphi)^{-1}(0)$ на V .

Нека W_1 е Зариски отворено подмножество на W с $\varphi^{-1}(W_1) \neq \emptyset$ и $g : W_1 \rightarrow \bar{k}$ е регулярна функция върху W_1 . Тогава за всяка точка $p \in \varphi^{-1}(W_1)$ съществува Зариски отворена околност $U(q)$ на $q = \varphi(p)$ върху W_1 , така че $g|_{U(q)} = \frac{g_1}{g_2}|_{U(q)}$ за $g_1, g_2 \in \bar{k}[U(q)]$ с $g_2(r) \neq 0$ за $\forall r \in U(q)$. Избираме полиноми

$$\tilde{g}_1(y_1, \dots, y_m), \tilde{g}_2(y_1, \dots, y_m) \in \bar{k}[y_1, \dots, y_m],$$

които повдигат $g_1 = \tilde{g}_1 + I(U(q))$, $g_2 = \tilde{g}_2 + I(U(q))$ и представяме

$$g|_{U(q)} = \frac{\tilde{g}_1(y_1, \dots, y_m)}{\tilde{g}_2(y_1, \dots, y_m)} \Big|_{U(q)}.$$

Полагаме $U(p) = \varphi^{-1}U(q)$ и твърдим, че издърпването

$$\varphi^*g = g \circ \varphi|_{U(p)} = \frac{\tilde{g}_1 \circ \varphi}{\tilde{g}_2 \circ \varphi} \Big|_{U(p)} = \frac{\tilde{g}_1(y_1 \circ \varphi, \dots, y_m \circ \varphi) + I(U(p))}{\tilde{g}_2(y_1 \circ \varphi, \dots, y_m \circ \varphi) + I(U(p))} \Big|_{U(p)}$$

е регулярна функция върху $U(p)$. По-точно, $y_1 \circ \varphi, \dots, y_m \circ \varphi$ са регулярни функции върху $U(p)$, така че $\tilde{g}_j(y_1 \circ \varphi, \dots, y_m \circ \varphi) + I(U(p))$ са регулярни функции върху $U(p)$ като получени от $y_j \circ \varphi$ и константите чрез умножение и събиране. Регулярната функция $\tilde{g}_2(y_1 \circ \varphi, \dots, y_m \circ \varphi) + I(U(p))$ има стойност $\tilde{g}_2(y_1 \circ \varphi, \dots, y_m \circ \varphi)(x) = \tilde{g}_2(\varphi(x)) \neq 0$ за всички точки $x \in U(p)$, защото $\varphi(x) \in U(q)$, а $g_2 = \tilde{g}_2 + I(U(q))$ не се анулира върху $U(q)$. Следователно

$$\frac{1 + I(U(p))}{\tilde{g}_2(y_1 \circ \varphi, \dots, y_m \circ \varphi) + I(U(p))}$$

е регулярна функция върху $U(p)$, откъдето и $\varphi^*g : U(p) \rightarrow \bar{k}$ е регулярна функция. С това установихме, че $\varphi : V \rightarrow W$ е морфизъм, ако $y_j \circ \varphi : V \rightarrow \bar{k}$ са регулярни функции за $\forall 1 \leq j \leq m$, Q.E.D.

ЗАБЕЛЕЖКА 7.8. От Лема 7.6 и Твърдение 7.7 следва, че всяка регулярна функция $f : W \rightarrow \bar{k}$ е морфизъм.

ТЕОРЕМА 11. Морфизмите $\varphi : V \rightarrow W$ на квази-афинно или квази-проективно многообразие V в афинно многообразие $W \subseteq \bar{k}^n$ са във взаимно еднозначно съответствие с хомоморфизмите на $\bar{k}$ -алгебри $\varphi^* : \bar{k}[W] \rightarrow \mathcal{O}_V(V)$,

$$\text{Mor}(V, W) \simeq \text{Hom}_{\bar{k}\text{-alg}}(\bar{k}[W], \mathcal{O}_V(V)).$$

Доказателство: Произволен морфизъм $\varphi : V \rightarrow W$ индуцира изображение

$$\varphi^* : \bar{k}[W] \longrightarrow \mathcal{O}_V(V),$$

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi,$$

защото афинният координатен пръстен $\bar{k}[W] = \mathcal{O}_W(W)$ съвпада с пръстена на регулярните функции върху W и издърпването на регулярна функция върху W чрез морфизъм $\varphi : V \rightarrow W$ е регулярна функция върху V . Изображението φ^* е хомоморфизъм на $\bar{k}$ -алгебри, защото

$$\varphi^*(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2) \circ \varphi = f_1 \circ \varphi + f_2 \circ \varphi = \varphi^*(f_1) + \varphi^*(f_2),$$

$$\varphi^*(f_1 f_2) = (f_1 f_2) \circ \varphi = (f_1 \circ \varphi)(f_2 \circ \varphi) = \varphi^*(f_1) \varphi^*(f_2) \quad \text{и}$$

$$\varphi^*(cf) = (cf) \circ \varphi = c(f \circ \varphi) = c\varphi^*(f) \quad \text{за} \quad \forall f_1, f_2 \in \bar{k}[W], \quad \forall c \in \bar{k}.$$

Обратно, нека $\alpha : \bar{k}[W] = \mathcal{O}_W(W) \rightarrow \mathcal{O}_V(V)$ е хомоморфизъм на $\bar{k}$ -алгебри. Тогава за $\forall 1 \leq j \leq m$ регулярните функции $y_j + I(W)$ върху W се изобразяват в регулярни функции $\alpha(y_j + I(W)) : V \rightarrow \bar{k}$ върху V . Изображението

$$\varphi_\alpha = (\alpha(y_1 + I(W)), \dots, \alpha(y_m + I(W))) : V \longrightarrow \bar{k}^m$$

взема стойности в W , защото за всеки полином $g(y_1, \dots, y_m)$ от идеала $I(W)$ на $W \subseteq \bar{k}^m$ и произволна точка $v \in V$ е в сила

$$(g \circ \varphi_\alpha)(v) = g(\alpha(y_1 + I(W)), \dots, \alpha(y_m + I(W)))(v) = \alpha(g(y_1, \dots, y_m) + I(W))(v),$$

доколкото α е хомоморфизъм на $\bar{k}$ -алгебри. Но $g(y_1, \dots, y_m) + I(W) = I(W) \in \bar{k}[W]$ е нулевият елемент на $\bar{k}[W]$, така че $\alpha(g(y_1, \dots, y_m) + I(W)) = \alpha(I(W)) = I(V)$ и $(g \circ \varphi_\alpha)(v) = I(V)(v) = 0$. Това доказва, че $\varphi_\alpha : V \rightarrow W$ е изображение на V в W . Съгласно Твърдение 7.7, достатъчно е да забележим, че композициите $y_j \circ \varphi_\alpha = \alpha(y_j + I(W)) \in \mathcal{O}_V(V)$ са регулярни функции върху V , за да твърдим, че $\varphi_\alpha : V \rightarrow W$ е морфизъм на V в W .

Остава да проверим, че φ_α индуцира $\varphi_\alpha^* = \alpha : \bar{k}[W] \rightarrow \mathcal{O}_V(V)$. Наистина, за произволен елемент $h = \tilde{h}(y_1, \dots, y_m) + I(W) = \tilde{h}(y_1 + I(W), \dots, y_m + I(W)) \in \bar{k}[W]$, който се повдига до полином $\tilde{h}(y_1, \dots, y_m) \in \bar{k}[y_1, \dots, y_m]$ е изпълнено

$$\varphi_\alpha^* h = h \circ \varphi_\alpha = h(\alpha(y_1 + I(W)), \dots, \alpha(y_m + I(W))) =$$

$$= \tilde{h}(\alpha(y_1 + I(W)), \dots, \alpha(y_m + I(W))) = \alpha \tilde{h}(y_1 + I(W), \dots, y_m + I(W)),$$

защото $\alpha : \bar{k}[W] \rightarrow \mathcal{O}_V(V)$ е хомоморфизъм на $\bar{k}$ -алгебри, Q.E.D.

ЗАДАЧА 7.9. Нека $I \subset J$ са собствени идеали в $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$, а

$$\alpha : \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I \longrightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/J$$

е естественният епиморфизъм с ядро $J/I \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I$. Да се докаже, че α индуцира тъждественото влагане $\varphi_\alpha : Z(J) \hookrightarrow Z(I)$.

СЛЕДСТВИЕ 7.10. Всеки морфизъм $\varphi : V \rightarrow W$ на афинни многообразия $V \subseteq \bar{k}^n$ и $W \subseteq \bar{k}^m$ се задава с наредена m -торка $\varphi = (f_1, \dots, f_m)$ от полиноми $f_i(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$.

Доказателство: Съгласно Теорема 11 имаме взаимно еднозначно съответствие

$$\text{Mor}(V, W) \simeq \text{Hom}_{\bar{k}\text{-alg}}(\bar{k}[W], \mathcal{O}_V(V))$$

между морфизмите $\varphi : V \rightarrow W$ и хомоморфизмите $\varphi^* : \bar{k}[W] \rightarrow \mathcal{O}_V(V)$. Още повече, всеки морфизъм $\varphi : V \rightarrow W$ е от вида

$$\varphi = \varphi_\alpha = (\alpha(y_1 + I(W)), \dots, \alpha(y_m + I(W)))$$

за някакъв хомоморфизъм на $\bar{k}$ -алгебри $\alpha : \bar{k}[W] \rightarrow \mathcal{O}_V(V)$. Лема 6.14 (iii) дава изоморфизъм на $\bar{k}$ -алгебри $\mathcal{O}_V(V) \rightarrow \bar{k}[V]$. В резултат, $\alpha(y_j + I(W)) \in \bar{k}[V]$ могат да се разглеждат като полиноми

$$f_j(x_1 + I(V), \dots, x_n + I(V)) \in \bar{k}[x_1 + I(V), \dots, x_n + I(V)] \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq m,$$

така че всяка точка $v = (v_1, \dots, v_n) \in V \subseteq \bar{k}^n$ има образ

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= (f_1(x_1, \dots, x_n) + I(V), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) + I(V))(v) = \\ &= (f_1(v_1, \dots, v_n), \dots, f_m(v_1, \dots, v_n)) \in W \end{aligned}$$

и действието на φ се задава с полиномите $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$, Q.E.D.

Нека $f : W \rightarrow \bar{k}$ е регулярна функция върху квази-афинно или квази-проективно многообразие W . Тогава всяка точка $p \in W$ има афинна околност $p \in U_p \subseteq W$,

$U_p \subseteq \bar{k}^n$. Ограничението $f : U_p \rightarrow \bar{k}$ е морфизъм на квази-афинното многообразие U_p в афинното многообразие $\bar{k}$, така че $f|_{U_p} = \tilde{f}(x_1, \dots, x_n)|_{U_p}$ се задава с полином $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. По този начин, всяка регуларна функция се задава локално с полином.

ЗАДАЧА 7.11. Нека $V \subseteq \bar{k}^n$ и $W \subseteq \bar{k}^m$ са афинни многообразия. Да се докаже, че морфизмите $\varphi : V \rightarrow W$ са във взаимно еднозначно съответствие с хомоморфизмите

$$\widetilde{\varphi}^* : \bar{k}[y_1, \dots, y_m] \longrightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$$

на $\bar{k}$ -алгебри, които трансформират идеала $I(W)$ на W в идеала $I(V)$ на V , $\widetilde{\varphi}^* I(W) \subseteq I(V)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.12. Квази-афинните или квази-проективните многообразия V и W са изоморфни, ако съществуват морфизми $\varphi : V \rightarrow W$ и $\psi : W \rightarrow V$, така че $\psi\varphi = \text{Id}_V$, $\varphi\psi = \text{Id}_W$.

ЛЕМА 7.13. Афинните многообразия $V \subseteq \bar{k}^n$ и $W \subseteq \bar{k}^m$ са изоморфни тогава и само тогава, когато афинните им координатни пръстени $\bar{k}[W] \simeq \bar{k}[V]$ са изоморфни като $\bar{k}$ -алгебри.

Доказателство: Ако $\varphi : V \rightarrow W$ и $\psi : W \rightarrow V$ са морфизми с $\psi\varphi = \text{Id}_V$, $\varphi\psi = \text{Id}_W$, то за $\forall f \in \bar{k}[V]$ е в сила

$$f = f\text{Id}_V = \text{Id}_V^* f = (\psi\varphi)^* f = f(\psi\varphi) = (f\psi)\varphi = \varphi^*(f\psi) = \varphi^*(\psi^*(f)),$$

откъдето $\text{Id}_{\bar{k}[V]} = \varphi^*\psi^*$. Аналогично, $\text{Id}_{\bar{k}[W]} = \psi^*\varphi^*$, така че $\varphi^* = (\psi^*)^{-1} : \bar{k}[W] \rightarrow \bar{k}[V]$ е изоморфизъм на $\bar{k}$ -алгебри.

Ако $\alpha : \bar{k}[W] \rightarrow \bar{k}[V]$ е изоморфизъм на $\bar{k}$ -алгебри, то

$$\varphi_\alpha = (\alpha(y_1 + I(W)), \dots, \alpha(y_m + I(W))) : V \longrightarrow W \quad \text{и}$$

$$\varphi_{\alpha^{-1}} = (\alpha^{-1}(x_1 + I(V)), \dots, \alpha^{-1}(x_n + I(V))) : W \rightarrow V$$

са морфизми с $\varphi_\alpha^* = \alpha$, $\varphi_{\alpha^{-1}}^* = \alpha^{-1}$. Следователно

$$(\varphi_{\alpha^{-1}}\varphi_\alpha)^* = \varphi_\alpha^*\varphi_{\alpha^{-1}}^* = \alpha\alpha^{-1} = \text{Id}_{\bar{k}[V]} = \text{Id}_V^*,$$

откъдето $\varphi_{\alpha^{-1}}\varphi_\alpha = \text{Id}_V$, съгласно Теорема 11. Аналогично, от

$$(\varphi_\alpha\varphi_{\alpha^{-1}})^* = \varphi_{\alpha^{-1}}^*\varphi_\alpha^* = \alpha^{-1}\alpha = \text{Id}_{\bar{k}[W]} = \text{Id}_W^*$$

получаваме $\varphi_\alpha\varphi_{\alpha^{-1}} = \text{Id}_W$, така че $V \subseteq \bar{k}^n$ и $W \subseteq \bar{k}^m$ са изоморфни, Q.E.D.

ЗАДАЧА 7.14. За произволен неразложим над $\bar{k}$ полином $f(x_1, x_2) \in \bar{k}[x_1, x_2]$ и произволен полином $g(x_1, x_2) \in \bar{k}[x_1, x_2]$ да се докаже, че $V = Z(f(x_1, x_2)) \subset \bar{k}^2$ и $W = Z(y_3 - g(y_1, y_2), f(y_1, y_2)) \subset \bar{k}^3$ са изоморфни помежду си афинни многообразия.

ТВЪРДЕНИЕ 7.15. Нека $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ е морфизъм на проективни многообразия $V_1 \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$, $V_2 \subseteq \mathbb{P}^m(\bar{k})$, $U \subseteq V_1$ е непразно Зариски отворено подмножество, върху което $\varphi|_U = [f_0 : \dots : f_m]$ се задава с хомогенни полиноми $f_0(x_0, \dots, x_n), \dots, f_m(x_0, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$ от една и съща степен. Тогава всяка точка $p \in V_1$ има Зариски отворена околност $U(p)$ върху V_1 , така че $\varphi|_{U(p)} = [h_0 : \dots : h_m]$ за хомогенни полиноми $h_0, \dots, h_m \in \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$ от една и съща степен и $h_i g_j - h_j g_i \in I(V_1)$ за всички индекси $0 \leq i, j \leq m$.

Доказателство: За произволна фиксирана точка $p \in V_1 \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$ съществуват такива хомогенни координати върху $\mathbb{P}^n(\bar{k})$, относно които p принадлежи на стандартното афинно отворено подмножество

$$U_0 = \{x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid x_0 \neq 0\}.$$

Разглеждаме афинното многообразие $V_1 \cap U_0 \subseteq U_0 \simeq \bar{k}^n$. Аналогично, съществуват хомогенни координати върху $\mathbb{P}^m(\bar{k}) \supseteq V_2$, относно които $\varphi(p) \in V_2$ е от стандартното афинно отворено подмножество

$$U'_0 = \{y = [y_0 : \dots : y_m] \in \mathbb{P}^m(\bar{k}) \mid y_0 \neq 0\}.$$

Разглеждаме афинното многообразие $V_2 \cap U'_0 \subseteq U'_0 \simeq \bar{k}^m$. Тогава $Y(p) = \varphi^{-1}(V_2 \cap U'_0) \cap U_0 \subseteq U_0$ е афинно многообразие в U_0 , защото непрекъснатото изображение φ издърпва Зариски затвореното подмножество $V_2 \cap U'_0$ на U'_0 в Зариски затворено подмножество на U_0 . Съгласно Следствие 7.10, морфизмът

$$\varphi : Y(p) = \varphi^{-1}(V_2 \cap U'_0) \cap U_0 \longrightarrow V_2 \cap U'_0 \subseteq U'_0.$$

на афинни многообразия се задава чрез наредена m -торка от полиноми $g_i \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \in \bar{k} \left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right]$, т.е. $\varphi|_{Y(p)} = (g_1, \dots, g_m)$. Ако $l = \max(\deg(g_1), \dots, \deg(g_m))$ е максимума на общите степени $\deg(g_j)$ на g_j , а

$$h_j(x_0, \dots, x_n) = x_0^l g_j \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \in \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$$

са хомогенизациите на g_j за $1 \leq j \leq m$ от степен l , то ограничението

$$\varphi|_{Y(p)} = [h_0 = x_0^l : h_1(x_0, \dots, x_n) : \dots : h_m(x_0, \dots, x_n)]$$

се задава чрез хомогенни полиноми на $x_0, \dots, x_n$ от една и съща степен l .

Ако $\varphi|_{Y(p)} = [h_0 : \dots : h_m]|_{Y(p)}$ за хомогенни полиноми $h_0, \dots, h_m \in \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$ от една и съща степен, то

$$\varphi|_{Y(p) \cap U} = [h_0 : \dots : h_m]|_{Y(p) \cap U} = [f_0 : \dots : f_m]|_{Y(p) \cap U}.$$

Следователно $Y(p) \cap U \subseteq Z(h_i g_j - h_j g_i \mid 0 \leq i, j \leq m)$ и Зариски затворената обвивка $V_1 = \overline{Y(p) \cap U} \subseteq Z(h_i g_j - h_j g_i \mid 0 \leq i, j \leq m)$, съгласно неприводимостта на V_1 и $\varphi^{-1}(V_2 \cap U'_0) = \varphi^{-1}(V_2) = V_1$. С други думи $h_i g_j - h_j g_i \in I(V_1)$ за всички $0 \leq i, j \leq m$, Q.E.D.

ЗАДАЧА 7.16. Дадена е проективната равнинна квадрика

$$X = \{x = [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{F}}_3) \mid x_0^2 + x_1^2 = x_2^2\}$$

и изображението $\varphi : X \cap U_1 \rightarrow \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_3)$, $\varphi([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 + x_2 : x_1]$ върху сечението $X \cap U_1$ на X със стандартното афинно отворено подмножество $U_1 = \{x = [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{F}}_3) \mid x_1 \neq 0\}$. Да се докаже, че φ се продължава до морфизъм $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_3)$.

Упътване: Изображението $\varphi([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 + x_2 : x_1]$ е коректно определено върху всички точки на X освен $p = [x_0 : 0 : -x_0] = [1 : 0 : -1]$. Вземайки предвид

$$-x_1^2 = x_0^2 - x_2^2 = (x_0 - x_2)(x_0 + x_2)$$

върху X , получаваме

$$[x_0 + x_2 : x_1] = [(x_0 + x_2)(x_0 - x_2) : x_1(x_0 - x_2)] = [-x_1^2 : x_1(x_0 - x_2)] = [x_1 : x_2 - x_0].$$

Да напомним, че ако афинно или проективно многообразие V/k е определено над свършено поле k , то абсолютната група на Galois $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ действа върху V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.17. Морфизмът $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ на квази-афинни или квази-проективни многообразия V_i/k , определени над свършено поле k се нарича

k -морфизъм, ако е $Gal(\bar{k}/k)$ -еквивариантен, т.е. всеки елемент $\sigma \in Gal(\bar{k}/k)$ изпълнява комутативна диаграма

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \end{array}.$$

Нека $V_1 \subseteq \bar{k}^n$ и $V_2 \subseteq \bar{k}^m$ са афинни алгебрични многообразия, определени над съвършено поле k . Тогава произволно изображение

$$\varphi = (f_1, \dots, f_m) : V_1 \longrightarrow V_2,$$

зададено с полиноми $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ е k -морфизъм съгласно

$$\sigma\varphi(a) = \sigma(f_1(a), \dots, f_m(a)) = (f_1(\sigma(a)), \dots, f_m(\sigma(a))) = \varphi\sigma(a)$$

за $\forall \sigma \in Gal(\bar{k}/k)$, $\forall a \in V_1$. Аналогично, ако $V_1 \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$ и $V_2 \subseteq \mathbb{P}^m(\bar{k})$ са проективни многообразия, определени над съвършено поле k , то произволно изображение

$$\varphi = [f_0 : \dots : f_m] : V_1 \longrightarrow V_2,$$

зададено с хомогенни полиноми $f_0(x_0, \dots, x_n), \dots, f_m(x_0, \dots, x_n) \in k[x_0, \dots, x_n]$ от една и съща степен е k -морфизъм съгласно

$$\begin{aligned} \sigma\varphi(a) &= \sigma[f_0(a) : \dots : f_m(a)] = [\sigma(f_0(a)) : \dots : \sigma(f_m(a))] = \\ &= [f_0(\sigma(a)) : \dots : f_m(\sigma(a))] = \varphi\sigma(a) \quad \text{за } \forall \sigma \in Gal(\bar{k}/k), \quad \forall a \in V_1. \end{aligned}$$

ТВЪРДЕНИЕ 7.18. Нека $V/\mathbb{F}_{q^m}$ е афинно или проективно многообразие, определено над $\mathbb{F}_{q^m}$ с идеал $I(V) \triangleleft \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ (съответно, с хомогенен идеал $I_h(V) \triangleleft \mathbb{F}_q[x_0, \dots, x_n]$), а

$$\begin{aligned} \Phi_q(I(V)) &= \\ &= \left\{ \Phi_q(f) = \sum_{i=(i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} c_i^q x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \mid f = \sum_{i=(i_1, \dots, i_n)} c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \in I(V) \right\}, \end{aligned}$$

съответно

$$\begin{aligned} \Phi_q(I_h(V)) &= \\ &= \left\{ \Phi_q(f) = \sum_{i=(i_0, \dots, i_n)} c_i^q x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} \mid f = \sum_{i=(i_0, \dots, i_n)} c_i x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} \in I_h(V)^{(d)} \right\} \end{aligned}$$

е образът на $I(V)$ (съответно, $I_h(V)$) под действие на автоморфизма на Frobenius $\Phi_q \in Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$. Тогава $Z(\Phi_q(I(V)))/\mathbb{F}_{q^m} \subseteq \bar{\mathbb{F}}_q^n$ е афинно (съответно, $Z_h(\Phi_q(I_h(V)))/\mathbb{F}_{q^m} \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_q)$ е проективно) многообразие, определено над $\mathbb{F}_{q^m}$, а $\Phi_q : \bar{\mathbb{F}}_q^n \rightarrow \bar{\mathbb{F}}_q^n$, $\Phi_q(a_1, \dots, a_n) = (a_1^q, \dots, a_n^q)$ (съответно, $\Phi_q : \mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_q) \rightarrow \mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_q)$, $\Phi_q([a_0 : \dots : a_n]) = [a_0^q : \dots : a_n^q]$) индуцира хомеоморфизъм и $\mathbb{F}_{q^m}$ -морфизъм

$$\Phi_q : V \longrightarrow Z(\Phi_q(I(V)))$$

(съответно, $\Phi_q : V \rightarrow Z_h(\Phi_q(I_h(V)))$.)

Доказателство: Ще разгледаме случая на проективно многообразие $V/\mathbb{F}_{q^m} \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_q)$. По определение, хомогенният идеал $I_h(V) \triangleleft \mathbb{F}_q[x_0, \dots, x_n]$ се поражда от хомогенни полиноми $f_i(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_{q^m}[x_0, \dots, x_n]$, $1 \leq i \leq m$. Следователно образът

$$\Phi_q(I_h(V)) = \Phi_q\langle f_1(x_0, \dots, x_n), \dots, f_m(x_0, \dots, x_n) \rangle = \langle \Phi_q(f_1), \dots, \Phi_q(f_m) \rangle$$

се поражда от хомогенните полиноми $\Phi_q(f_i) \in \mathbb{F}_{q^m}[x_0, \dots, x_n]$, защото Φ_q се ограничава до автоморфизъм $\Phi_q : \mathbb{F}_{q^m} \rightarrow \mathbb{F}_{q^m}$. Следователно $Z_h(\Phi_q(I_h(V)))/\mathbb{F}_{q^m} \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ е проективно алгебрично множество, определено над $\mathbb{F}_{q^m}$. Хомогонният идеал $\Phi_q(I_h(V)) \triangleleft \overline{\mathbb{F}_q}[x_0, \dots, x_n]$ е прост. По-точно, наличието на автоморфизъм $\Phi_q : \overline{\mathbb{F}_q}[x_0, \dots, x_n] \rightarrow \overline{\mathbb{F}_q}[x_0, \dots, x_n]$ позволява да представим произволни два хомогенни полинома от $\overline{\mathbb{F}_q}[x_0, \dots, x_n]$ във вида $\Phi_q(f)$, $\Phi_q(g)$ за еднозначно определени $f, g \in \overline{\mathbb{F}_q}[x_0, \dots, x_n]$. Ако $\Phi_q(f)\Phi_q(g) = \Phi_q(fg) \in \Phi_q(I_h(V))$, то $fg \in I_h(V)$. Съгласно простотата на хомогонния идеал $I_h(V)$ на проективното многообразие V , оттук следва $f \in I_h(V)$ или $g \in I_h(V)$. В резултат, $\Phi_q(f) \in \Phi_q(I_h(V))$ или $\Phi_q(g) \in \Phi_q(I_h(V))$, което доказва простотата на идеала $\Phi_q(I_h(V))$. С това установихме, че $Z_h(\Phi_q(I_h(V)))/\mathbb{F}_{q^m} \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ е проективно многообразие, определено над $\mathbb{F}_{q^m}$.

Изображението $\Phi_q : V \rightarrow \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ взема стойности в $Z_h(\Phi_q(I_h(V)))$, защото за произволна точка $a \in V$ и произволен хомогенен полином $f \in I_h(V)$ е в сила

$$\Phi_q(f)(\Phi_q(a)) = \Phi_q(f(a)) = \Phi_q(0) = 0.$$

Ако $\Phi_q(a) = [a_0^q : \dots : a_n^q] = [b_0^q : \dots : b_n^q] = \Phi_q(b)$ за $a, b \in V$, то $a = b$. По-точно, ако l е минималното естествено число, за което $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{F}_{q^l}$, то $\Phi_q^{-1}|_{\mathbb{F}_{q^l}} = \Phi_{q^{l-1}}$. Затова от $\Phi_q(a) = \Phi_q(b)$ получаваме

$$a = \Phi_{q^l}(a) = \Phi_{q^{l-1}}\Phi_q(a) = \Phi_{q^{l-1}}\Phi_q(b) = \Phi_{q^l}(b) = b.$$

Всяка точка $a \in Z_h(\Phi_q(I_h(V)))$ е от образа на $\Phi_q : V \rightarrow Z_h(\Phi_q(I_h(V)))$. Ако $a = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$, l е минималното естествено число с $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}_{q^l}$ и $b = \Phi_{q^{l-1}}(a)$, то $\Phi_q(b) = a$. Точката $b \in V$, защото за всеки хомогенен полином $f \in I_h(V)$ е в сила $\Phi_q(f)(\Phi_q(b)) = \Phi_q(f(b)) = 0$, откъдето $f(b) = 0$. С това доказахме взаимната еднозначност на $\Phi_q : V \rightarrow Z_h(\Phi_q(I_h(V)))$.

Произволно Зариски затворено подмножество $Z_h(S) \subseteq V = Z_h(I_h(V))$ се изобразява в Зариски затворено подмножество $\Phi_q Z_h(S) = Z_h(\Phi_q I_h Z_h(S))$ на $\Phi_q(V) = Z_h(\Phi_q(I_h(V)))$, съгласно доказаното $\Phi_q(V) = Z_h \Phi_q(I_h(V))$. Това установява непрекъснатостта на Φ_q^{-1} . Аналогично, ако $Z_h(S)$ е Зариски затворено подмножество на $\Phi_q(V)$, то $\Phi_q^{-1} Z_h(S)$ е Зариски затворено подмножество на V . По-точно, $v \in \Phi_q^{-1} Z_h(S)$ точно когато $f\Phi_q(v) = 0$ за всеки хомогенен полином $f \in I_h Z_h(S)$. Понеже $f\Phi_q(v) = f(v_0^q, \dots, v_n^q)$ е хомогенен полином на $v_0, \dots, v_n$, $\Phi_q^{-1} Z_h(S)$ е проективно подмногообразие на V и Φ_q е непрекъснато. С това проверихме, че Φ_q е хомеоморфизъм.

Съгласно Твърдение 7.2 (ii), изображението

$$\Phi_q : \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q}),$$

$$\Phi_q[x_0 : \dots : x_n] = [x_0^q : \dots : x_n^q]$$

е морфизъм, защото се задава с хомогенни полиноми от една и съща степен q . Тези полиноми са с коефициенти от простото подполе на $\overline{\mathbb{F}_q}$, така че Φ_q е $\mathbb{F}_{q^l}$ -морфизъм за $\forall l \in \mathbb{N}$.

ЗАДАЧА 7.19. Да се докаже Твърдение 7.18 за афинно многообразие $V/\mathbb{P}_{q^m} \subseteq \overline{\mathbb{F}_q}$, определено над $\mathbb{F}_{q^m}$.

ЗАДАЧА 7.20. Нека $\mathbb{F}_9 = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{F}_3, \alpha^2 = \alpha + 1\}$ е полето с 9 елемента,

$$V = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{F}_3} \mid y^2 - \alpha xy + \alpha = 0\}$$

а $\Phi_3 : \overline{\mathbb{F}_3} \rightarrow \overline{\mathbb{F}_3}$, $\Phi_3(x) = x^3$ е автоморфизмът на Frobenius.

(i) Да се докаже, че V е афинно многообразие, т.е. полиномът $y^2 - \alpha xy + \alpha$ е неразложим над $\overline{\mathbb{F}_3}$.

(ii) Да се намери многообразието $\Phi_3(V)$.

(iii) Да се докаже, че $V \cap \Phi_3(V) = \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 7.21. Ако $V/\mathbb{F}_q$ е афинно или проективно многообразие, определено над $\mathbb{F}_q$, то $\Phi_q(V) = V$.

Доказателство: За включването $V \subseteq \Phi_q(V)$ да изберем точка $a \in V$. Тогава $\Phi_q(a)$ принадлежи на многообразието $\Phi_q(V)/\mathbb{F}_q$ и $\mathbb{F}_q$ -затворената точка $Q = \text{Orb}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)}(\Phi_q(a))$, породена от $\Phi_q(a)$ се съдържа изцяло във $\Phi_q(V)$. В частност, $a \in Q$ се съдържа във $\Phi_q(V)$.

Обратно, нека $b \in \Phi_q(V)$. Тогава съществува еднозначно определена точка $a \in V$, така че $\Phi_q(a) = b$. Многообразието $V/\mathbb{F}_q$ е определено над $\mathbb{F}_q$ и $\mathbb{F}_q$ -затворената точка $P = \text{Orb}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)}(a)$, породена от a се съдържа изцяло във V . В частност, $b = \Phi_q(a) \in V$ и $\Phi_q(V) \subseteq V$.

От $V \subseteq \Phi_q(V)$ и $\Phi_q(V) \subseteq V$ получаваме $V = \Phi_q(V)$, Q.E.D.

Сега ще докажем, че произволно квази-афинно или квази-проективно многообразие V се покрива със Зариски отворени подмножества, които са изоморфни на афинни многообразия.

ЛЕМА 7.22. Нека $Z(f) = \{x \in \bar{k}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ е неприводима афинна хиперповърхнина. Тогава допълнението

$$\bar{k}^n \setminus Z(f) \simeq Z(x_{n+1}f(x_1, \dots, x_n) - 1)$$

е изоморфно на афинно многообразие на $Z(x_{n+1}f(x_1, \dots, x_n) - 1) \subset \bar{k}^{n+1}$.

Доказателство: Проекцията

$$\Pi : Z(x_{n+1}f(x_1, \dots, x_n) - 1) \longrightarrow \bar{k}^n,$$

$$\Pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$$

върху първите n компоненти изобразява разглежданата хиперповърхнина $Z(x_{n+1}f(x_1, \dots, x_n) - 1)$ в допълнението $\bar{k}^n \setminus Z(f)$ на $Z(f)$. Изображението Π е взаимно еднозначно, защото за произволна точка $a = (a_1, \dots, a_n) \in \bar{k}^n \setminus Z(f)$ съществува единствена точка

$$a' = \left(a_1, \dots, a_n, \frac{1}{f(a_1, \dots, a_n)} \right) \in Z(x_{n+1}f(x_1, \dots, x_n) - 1)$$

с $\Pi(a') = a$. Изображенията Π и Π^{-1} са морфизми съгласно Твърдение 7.7, защото за $\forall 1 \leq i \leq n$ композициите $x_i \circ \Pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_i$ са регулярни функции върху $Z(x_{n+1}f(x_1, \dots, x_n) - 1)$, както и $x_i \circ \Pi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = x_i$ за $1 \leq i \leq n$, $x_{n+1} \circ \Pi^{-1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)}$ са регулярни функции върху $\bar{k}^n \setminus Z(f)$, Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 7.23. Всяка точка p на квази-афинно или квази-проективно многообразие V има Зариски отворена околност, която е изоморфна на квази-афинно многообразие.

Доказателство: След евентуално пресичане на V с афинно Зариски отворено подмножество можем да считаме, че V е квази-афинно многообразие. Тогава $V = V_0 \cap W \subseteq W \subseteq \bar{k}^n$ за афинно многообразие $V_0 = Z(S) \subseteq \bar{k}^n$ и Зариски отворено подмножество $W \subseteq \bar{k}^n$. Допълнението $V_0 \setminus W \subseteq \bar{k}^n$ е Зариски затворено множество, така че $V_0 \setminus W = Z(f_1, \dots, f_m)$ за някакви полиноми $f(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. Твърдим, че

$$V = V_0 \cap W \subseteq \bigcup_{i=1}^m (\bar{k}^n \setminus Z(f_i)),$$

защото за всяка точка $p \in V = V_0 \cap W$ с $p \notin \bar{k}^n \setminus Z(f_i)$ за всички $1 \leq i \leq m$ следва $p \in Z(f_i)$ за всички $1 \leq i \leq m$ и $p \in Z(f_1, \dots, f_m) = V_0 \setminus W$, което е противоречие. Още повече,

$$V = V_0 \cap W = \left(\bigcup_{i=1}^m (\bar{k}^n \setminus Z(f_i)) \right) \cap V_0,$$

защото от $q \in \left(\bigcup_{i=1}^m (\bar{k}^n \setminus Z(f_i)) \right) \cap V_0$ следва $q \in V_0 \cap (\bar{k}^n \setminus Z(f_i))$ за някое $1 \leq i \leq m$, така че $q \notin V_0 \setminus W = Z(f_1, \dots, f_m)$ и $q \in V_0 \cap W = V$. Сега Зариски отворената околност V на точка $p \in V$ е крайно обединение $\bigcup_{i=1}^m \left[(\bar{k}^n \setminus Z(f_i)) \cap V_0 \right]$ на множества, които са изоморфни на афинни многообразия, съгласно Лема 7.22. Оттук V е изоморфно на афинно многообразие, Q.E.D.