

Функционално поле на алгебрично многообразие. Локален пръстен на точка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. *Квази-афинно (квази-проективно) многообразие е непразно сечение $V \cap U$ на афинно (проективно) алгебрично многообразие V със Зариски отворено подмножество U на $\bar{k}^n$, съответно на $\mathbb{P}^n(\bar{k})$.*

Квази-афинните и квази-проективните многообразия $V \cap U$ са неприводими съгласно разглежданията от доказателството на Твърдение 5.37(iii).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. *Нека $V \subseteq \bar{k}^n$ е квази-афинно многообразие, $p \in V$, а $W(p)$ е Зариски отворена околност на p , върху V . Функция $f : W(p) \rightarrow \bar{k}$ е регулярна в точка p , ако съществува Зариски отворена околност $W'(p) \subseteq W(p)$, в която $f = \frac{g}{h}$ се представя като частно на елементи $g, h \in \bar{k}[V]$ на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$ на V с $h(p) \neq 0$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. *Нека $V \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$ е квази-проективно многообразие, $p \in V$, а $W(p)$ е Зариски отворена околност на p върху V . Функция $f : W(p) \rightarrow \bar{k}$ е регулярна в точка p , ако за всички стандартни афинни отворени подмножества $U_i = \{x \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid x_i \neq 0\} \simeq \bar{k}^n$ на $\mathbb{P}^n(\bar{k})$ с $W(p) \cap U_i \neq \emptyset$, ограниченията $f : W(p) \cap U_i \rightarrow \bar{k}$ са регулярни в p функции.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. *Функция $f : W \rightarrow \bar{k}$ е регулярна в Зариски отворено подмножество W на квази-афинно или квази-проективно многообразие V , ако f е регулярна във всяка точка p на W .*

ПРИМЕР 6.5. *Ако $X = \{(x, y) \in \bar{k}^2 \mid x^5 = y^2 + y\}$, то функцията $\frac{x}{y}$ не е регулярна върху точките $(a_1, 0) \in X$. Уравнението $x^5 = 0$ има единствено решение $x = 0$, така че $\frac{x}{y}$ е регулярна върху $X \setminus \{(0, 0)\}$. Функцията $\frac{y}{x}$ не е регулярна върху точките $(0, a_2) \in X$. Уравнението $y^2 + y = y(y + 1) = 0$ има две решения - $y_1 = 0$ и $y_2 = -1$, така че $\frac{y}{x}$ е регулярна върху $X \setminus \{(0, 0), (0, -1)\}$.*

Да разгледаме наредените двойки (W, f) , където W е непразно Зариски отворено подмножество на квази-афинно или квази-проективно многообразие V , а $f : W \rightarrow \bar{k}$ е функция, регулярна в W . Двойките (W_1, f_1) и (W_2, f_2) са еквивалентни, $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$, ако съществува непразно Зариски отворено подмножество $\emptyset \neq W \subseteq W_1 \cap W_2$, върху което $f_1|_W \equiv f_2|_W$ съвпадат. Да отбележим, че сечението на непразни Зариски отворени подмножества W_1, W_2 на квази-афинно или квази-проективно многообразие V е непразно. В противен случай имаме разлагане $V = (V \setminus W_1) \cup (V \setminus W_2)$ в обединение на Зариски затворените $V \setminus W_j$ и $V = V \setminus W_j$ за някое $1 \leq j \leq 2$, съгласно неприводимостта на V . В резултат, $W_j = \emptyset$, което е противоречие. Твърдим, че определена по-горе релация $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$ е релация на еквивалентност. Ясно е, че $(W, f) \sim (W, f)$ и $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$ е равносилно на $(W_2, f_2) \sim (W_1, f_1)$. Ако $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$ и $(W_2, f_2) \sim (W_3, f_3)$, то избираме Зариски отворени $\emptyset \neq W_{12} \subseteq W_1 \cap W_2$, $\emptyset \neq W_{23} \subseteq W_2 \cap W_3$ с $f_1|_{W_{12}} = f_2|_{W_{12}}$, $f_2|_{W_{23}} = f_3|_{W_{23}}$. В резултат, върху Зариски отвореното подмножество $\emptyset \neq W = W_{12} \cap W_{23}$ имаме

$f_1|_W = f_2|_W = f_3|_W$, откъдето $(W_1, f_1) \sim (W_3, f_3)$. Оттук следва, че двойките (W, f) се разбиват на непресичащи се класове на еквивалентност $\overline{(W, f)}$. Определяме събиране и умножение на класове на еквивалентност $\overline{(W_j, f_j)}$ чрез техни представители

$$\overline{(W_1, f_1)} + \overline{(W_2, f_2)} := \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 + f_2)}, \quad \overline{(W_1, f_1)} \cdot \overline{(W_2, f_2)} := \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 f_2)}.$$

Определението е коректно, т.е. не зависи от избора на представители на класовете на еквивалентност. По-точно, ако $(W_i, f_i) \sim (W'_i, f'_i)$ с $f_i|_{U_i} = f'_i|_{U_i}$ за Зариски отворени $\emptyset \neq U_i \subseteq W_i \cap W'_i$, то $\emptyset \neq U_o := U_1 \cap U_2 \subseteq (W_1 \cap W'_1) \cap (W_2 \cap W'_2)$ е непразно Зариски отворено подмножество на V , върху което $f_1 + f_2|_{U_o} = f'_1 + f'_2|_{U_o}$, $f_1 f_2|_{U_o} = f'_1 f'_2|_{U_o}$.

ЛЕМА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.6. *Множеството $\bar{k}(V)$ на класовете на еквивалентност $\overline{(W, f)}$ е поле, което се нарича функционално поле на квази-афинното или квази-проективното многообразие V .*

Доказателство: Комутативните и асоциативните закони за събиране и умножение, както и дистрибутивният закон за събиране и умножение зависят от краен брой аргументи $\overline{(W_i, f_i)}$, $1 \leq i \leq m$ с $m = 2$ или $m = 3$. Съгласно неприводимостта на V , сечението $W = \bigcap_{i=1}^m W_i$ е непразно Зариски отворено подмножество на V и гореспоменатите аксиоми в $\bar{k}(V)$ се свеждат до съответните аксиоми в пръстена на функциите $W \rightarrow \bar{k}$. Нулевият елемент на $\bar{k}(V)$ е $\overline{(W, 0)}$, а единичният елемент е $\overline{(W, 1)}$ за произволно непразно Зариски отворено подмножество $W \subseteq V$. Всеки елемент $\overline{(W, f)}$ има противоположен $\overline{(W, -f)}$. Произволен елемент $\overline{(W, f)} \neq \overline{(W', 0)}$ има обратен $\overline{(W \setminus Z(f), f^{-1})}$, където $Z(f)$ е множеството на нулите на f . Зариски отвореното подмножество $W \setminus Z(f)$ на V е непразно, защото в противен случай $W \subseteq Z(f)$ и $f|_W \equiv 0$, противно на $\overline{(W, f)} \neq \overline{(W', 0)}$, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 6.7. *Ако U е непразно Зариски отворено подмножество на квази-афинно или квази-проективно многообразие V , то функционалните полета на U и V съвпадат, $\bar{k}(U) = \bar{k}(V)$.*

Доказателство: Твърдим, че всяка двойка (W, f) върху U е двойка върху V . По определение, произволно Зариски отворено подмножество W на U е от вида $W = W' \cap U$ за Зариски отворено подмножество $W' \subseteq V$. Следователно W е Зариски отворено във V и (W, f) е двойка върху V . Оттук следва включването $\bar{k}(U) \subseteq \bar{k}(V)$. Обратно, всеки клас на еквивалентност $\overline{(W_o, f_o)} \in \bar{k}(V)$ има представител $\overline{(W_o \cap U, f_o)} \in \bar{k}(U)$, така че $\bar{k}(V) \subseteq \bar{k}(U)$ и $\bar{k}(V) = \bar{k}(U)$, Q.E.D. В частност, функционалното поле на проективно алгебрично многообразие $V \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$ съвпада с функционалното поле $\bar{k}(V \cap U_i)$ на сечението $V \cap U_i$ на V с произволно стандартно афинно отворено подмножество U_i , стига $V \cap U_i \neq \emptyset$.

ЛЕМА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.8. *За произволна точка p на квази-афинно или квази-проективно многообразие V , класовете на еквивалентност $\overline{(W, f)} \in \bar{k}(V)$ с $p \in W$ образуват локален подпръстен $\mathcal{O}_p(V)$ на $\bar{k}(V)$ с максимален идеал*

$$\mathfrak{M}_p(V) = \{\overline{(W, f)} \in \bar{k}(V) \mid p \in W, f(p) = 0\}. \quad (6.1)$$

Пръстенът $\mathcal{O}_p(V)$ се нарича локален пръстен на точката p във V .

Доказателство: Подмножеството $\mathcal{O}_p(V)$ на $\bar{k}(V)$ е затворено относно изваждане и умножение, т.е.

$$\begin{aligned} \overline{(W_1, f_1)} - \overline{(W_2, f_2)} &= \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 - f_2)} \in \mathcal{O}_p(V), \\ \overline{(W_1, f_1)} \cdot \overline{(W_2, f_2)} &= \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 f_2)} \in \mathcal{O}_p(V) \quad \text{за} \quad \forall \overline{(W_j, f_j)} \in \mathcal{O}_p(V), \end{aligned}$$

защото от $p \in W_1$ и $p \in W_2$ следва $p \in W_1 \cap W_2$. Следователно $\mathcal{O}_p(V)$ е подпръстен на $\bar{k}(V)$.

Елементът $(W, f) \in \mathcal{O}_p(V)$ е обратим в $\mathcal{O}_p(V)$, ако съществува обратен елемент $(W \setminus Z(f), f) \in \bar{k}(V)$ с $p \in W \setminus Z(f)$. С други думи, $(W, f) \in \mathcal{O}_p(V)^*$ точно когато $f(p) \neq 0$ или необратимостта на $(W, f) \in \mathcal{O}_p(V)$ в $\mathcal{O}_p(V)$ е еквивалентна на $(W, f) \in \mathfrak{M}_p(V)$. По този начин, всеки собствен идеал в $\mathcal{O}_p(V)$ се съдържа в $\mathfrak{M}_p(V)$ и $\mathfrak{M}_p(V)$ е единственият максимален идеал на $\mathcal{O}_p(V)$, Q.E.D.

От Следствие 6.7 и Лема-Определение 6.8 получаваме непосредствено следното

СЛЕДСТВИЕ 6.9. *За произволно непразно Зариски отворено подмножество U на квази-афинно или квази-проективно многообразие V и произволна точка $p \in U$, локалният пръстен на p в U съвпада с локалния пръстен на p във V , $\mathcal{O}_p(U) = \mathcal{O}_p(V)$.*

В частност, за произволно квази-проективно многообразие $V \subset \mathbb{P}^n(\bar{k})$ и произволно стандартно афинно отворено подмножество $U_i \subset \mathbb{P}^n(\bar{k})$, съдържащо точката $p \in V$, локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V) = \mathcal{O}_p(V \cap U_i)$ съвпадат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.10. *Локалният пръстен на непразно Зариски отворено подмножество U на квази-афинно или квази-проективно многообразие V се определя като сечението*

$$\mathcal{O}_U(V) = \bigcap_{p \in U} \mathcal{O}_p(V)$$

на локалните пръстени на всичките му точки.

По този начин, за произволно Зариски отворено подмножество U на квази-афинно или квази-проективно многообразие V и произволна точка $p \in U$ са в сила включванията на пръстени

$$\mathcal{O}_V(V) \subseteq \mathcal{O}_U(V) \subseteq \mathcal{O}_p(V) \subseteq \bar{k}(V).$$

За да опишем връзките между афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$ на афинно алгебрично многообразие V , функционалното поле $\bar{k}(V)$ и локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V)$ на $p \in V$ да напомним локализацията на комутативна област с единица R по прост идеал $\mathfrak{p} \triangleleft R$.

ЗАДАЧА 6.11. *Нека $\mathfrak{p}$ е прост идеал в комутативна област с единица R . Тогава подмножеството*

$$R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \mid \alpha, \beta \in R, \beta \notin \mathfrak{p} \right\}$$

на полето от частни $F(R)$ на R е локален подпръстен на $F(R)$ с максимален идеал

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \in R_{\mathfrak{p}} \mid \alpha \in \mathfrak{p} \right\}.$$

Пръстенът $R_{\mathfrak{p}}$ се нарича локализация на R относно простия идеал $\mathfrak{p}$ и съдържа R като подпръстен.

Упътване: Проверете, че множеството $R_{\mathfrak{p}}$ е затворено относно изваждане и умножение, за да твърдите, че $R_{\mathfrak{p}}$ е подпръстен на $F(R)$. Мултипликативната група $R_{\mathfrak{p}}^*$ на $R_{\mathfrak{p}}$ се състои от онези $\frac{\alpha}{\beta} \in R_{\mathfrak{p}}$, за които $\alpha \notin \mathfrak{p}$. Следователно множеството на необратимите елементи на $R_{\mathfrak{p}}$ съвпада с $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ и $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ е единственият максимален идеал на $R_{\mathfrak{p}}$.

Определение 5.41 въведе понятията афинен координатен пръстен на афинно алгебрично множество $V \subseteq \bar{k}^n$ и афинен координатен пръстен над k на афинно алгебрично множество V/k , определено над k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.12. Ако $V \subseteq \bar{k}^n$ е квази-афинно многообразие, то множеството $I(V) = \{f(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \mid f(a) = 0 \text{ за } \forall a \in V\}$ на полиномите, анулиращи се върху V е идеал в $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ и фактор-пръстенът

$$\bar{k}[V] = \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$$

се нарича афинен координатен пръстен на V .

Ако $V/k \subseteq \bar{k}^n$ е квази-афинно многообразие, определено над k , то $I(V)_k = I(V) \cap k[x_1, \dots, x_n]$ е идеал в $k[x_1, \dots, x_n]$ и фактор-пръстенът

$$k[V] = k[x_1, \dots, x_n]/I(V)_k$$

се нарича афинен координатен пръстен на V над k .

ЛЕМА 6.13. (i) Ако $V \subseteq \bar{k}^n$ е афинно многообразие, а $U \subseteq \bar{k}^n$ е Зариски отворено подмножество с $V \cap U \neq \emptyset$, то афинните координатни пръстени $\bar{k}[V] = \bar{k}[V \cap U]$ на V и $V \cap U$ съвпадат.

(ii) Ако $V/k \subseteq \bar{k}^n$ е афинно многообразие, определено над k , а $U \subseteq \bar{k}^n$ е Зариски отворено подмножество с $V \cap U \neq \emptyset$, то V и $V \cap U$ има един и същи афинен координатен пръстен $k[V] = k[V \cap U]$ над k .

Доказателство: (i) Достатъчно е да установим, че идеалите $I(V) = I(V \cap U)$ на V и $V \cap U$ съвпадат. От $V \cap U \subseteq V$ следва, че $I(V \cap U) \supseteq I(V)$. За произволен полином $g(x_1, \dots, x_n) \in I(V \cap U) \subseteq \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ имаме $V \cap U \subseteq Z(g)$. Съгласно неприводимостта на V , Зариски затворената обвивка $V = \bar{V} \cap \bar{U} \subseteq Z(g)$, така че $g \in I(V)$ и $I(V \cap U) \subseteq I(V)$. Това доказва $I(V) = I(V \cap U)$ и $\bar{k}[V] = \bar{k}[V \cap U]$.
(ii) От (i) следва, че

$$I(V)_k = I(V) \cap k[x_1, \dots, x_n] = I(V \cap U) \cap k[x_1, \dots, x_n] = I(V \cap U)_k$$

и $k[V] = k[V \cap U]$, Q.E.D.

ЛЕМА 6.14. Нека V е афинно алгебрично многообразие. Тогава:

(i) точките $p = (a_1, \dots, a_n) \in V \subseteq \bar{k}^n$ са във взаимно-еднозначно съответствие с максималните идеали

$$\mathfrak{M}_p = \{f \in \bar{k}[V] \mid f(p) = 0\} = \langle x_1 - a_1 + I(V), \dots, x_n - a_n + I(V) \rangle$$

на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$;

(ii) локалният пръстен

$$\mathcal{O}_p(V) \simeq \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \bar{k}[V], g \notin \mathfrak{M}_p \right\}$$

на точка $p \in V$ е изоморфен на локализацията $\bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$ на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$ по максималния идеал $\mathfrak{M}_p$, отговарящ на p ;

(iii) $\mathcal{O}_V(V) \simeq \bar{k}[V]$;

(iv) функционалното поле $\bar{k}(V)$ е полето от частни $F(\bar{k}[V])$ на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$.

Доказателство: (i) Ако $\mathfrak{M}$ е максимален идеал в $\bar{k}[V]$, а

$$\pi : \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \bar{k}[V] = \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$$

е естественят епиморфизъм с ядро $\ker(\pi) = I(V)$, то пълният праобраз $\widetilde{\mathfrak{M}} := \pi^{-1}(\mathfrak{M})$ е максимален идеал в $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. По-точно, за произволни полиноми $f(x_1, \dots, x_n), g(x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ и $h(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ имаме

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n) + I(V) &= \\ = (f(x_1, \dots, x_n) + I(V)) - (g(x_1, \dots, x_n) + I(V)) &\in \mathfrak{M} \triangleleft \bar{k}[V] \quad \text{и} \\ f(x_1, \dots, x_n)h(x_1, \dots, x_n) + I(V) &= \end{aligned}$$

$$= (f(x_1, \dots, x_n) + I(V))(h(x_1, \dots, x_n) + I(V)) \in \mathfrak{M} \triangleleft \bar{k}[V]$$

така че $\widetilde{\mathfrak{M}}$ е идеал в $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. Идеалът $\mathfrak{M} \triangleleft \bar{k}[V]$ е максимален точно когато фактор-пръстенът

$$\bar{k}[V]/\mathfrak{M} = [\bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V)] / (\widetilde{\mathfrak{M}}/I(V)) \simeq \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/\widetilde{\mathfrak{M}}$$

е поле и идеалът $\widetilde{\mathfrak{M}} \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ е максимален. Съгласно Лема 4.25 съществува точка $p = (a_1, \dots, a_n) \in \bar{k}^n$, така че

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$$

е идеалът на $p \in \bar{k}^n$ в $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. Оттук, всеки максимален идеал $\mathfrak{M} \triangleleft \bar{k}[V]$ е от вида

$$\mathfrak{M} = \widetilde{\mathfrak{M}}/I(V) = \langle x_1 - a_1 + I(V), \dots, x_n - a_n + I(V) \rangle.$$

Да означим $\mathfrak{M}_p := \{f \in \bar{k}[V] \mid f(p) = 0\}$ и да забележим, че $\mathfrak{M}_p$ е собствен идеал на $\bar{k}[V]$, съдържащ максималния идеал $\mathfrak{M}$ на $\bar{k}[V]$. Следователно $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}$.

(ii) По определение, локализацията на $\bar{k}[V]$ относно максималния идеал $\mathfrak{M}_p$ е пръстенът

$$\bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \bar{k}[V], g \notin \mathfrak{M}_p \right\}.$$

Елементите на $\bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$ са регулярни функции в p , така че имаме хомоморфизъм на пръстени

$$\begin{aligned} \varphi : \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} &\longrightarrow \mathcal{O}_p(V), \\ \varphi\left(\frac{f}{g}\right) &= \overline{\left(V \setminus Z(g), \frac{f}{g}\right)} \end{aligned}$$

за Зариски отворената околност $V \setminus Z(g)$ на p върху V . Хомоморфизмът φ е влагане, защото $\overline{\left(V \setminus Z(g), \frac{f}{g}\right)} = \overline{(U, 0)}$ означава съществуване на непразно Зариски отворено подмножество $U_o \subseteq (V \setminus Z(g)) \cap U$ с $\frac{f}{g}|_{U_o} = 0$. В резултат, $U_o \subseteq Z\left(\frac{f}{g}\right) \subseteq Z(f)$ и Зариски затворената обвивка $V = \overline{U_o} \subseteq Z(f)$. Това води до тъждествено анулиране на f върху V и $\ker(\varphi) = \{0\}$. От друга страна, φ е епиморфизъм, защото всеки клас на еквивалентност $\overline{(U, \psi)} \in \mathcal{O}_p(V)$ задава регулярна функция $\psi : U \rightarrow \bar{k}$ в Зариски отворена околност U на p . По определението за регулярност на ψ в точка p съществува Зариски отворена околност $p \in U_o \subseteq U$, в която $\psi = \frac{f}{g} : U_o \rightarrow \bar{k}$ е частно на $f, g \in \bar{k}[V]$ с $g(p) \neq 0$. Сега $\frac{f}{g} \in \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$ и

$$\varphi\left(\frac{f}{g}\right) = \overline{\left(V \setminus Z(g), \frac{f}{g}\right)} = \overline{(U_o, \frac{f}{g})} = \overline{(U_o, \psi)} = \overline{(U, \psi)},$$

откъдето $\varphi : \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \rightarrow \mathcal{O}_p(V)$ е изоморфизъм на пръстени.

(iii) От определението на $\mathcal{O}_V(V)$ и (ii) имаме

$$\mathcal{O}_V(V) = \cap_{p \in V} \mathcal{O}_p(V) = \cap_{p \in V} \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}.$$

Остава да проверим, че

$$\cap_{p \in V} \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} = \bar{k}[V].$$

Включването $\cap_{p \in V} \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \supseteq \bar{k}[V]$ е ясно. Обратно, нека $\frac{f}{g} \in \cap_{p \in V} \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \subseteq F(\bar{k}[V])$, където $F(\bar{k}[V])$ е полето от частни на $\bar{k}[V]$. Съгласно (i) елементът $g \in \bar{k}[V]$ не принадлежи на нито един максимален идеал на $\bar{k}[V]$, така че $g \in \bar{k}[V]^*$ е обратим в $\bar{k}[V]$. С други думи, $\frac{1}{g} \in \bar{k}[V]$ и $\frac{f}{g} \in \bar{k}[V]$, Q.E.D.

(iv) За $F(\bar{k}[V]) \subseteq \bar{k}(V)$ използваме, че $\bar{k}(V)$ е поле, съдържащо $\mathcal{O}_V(V) \simeq \bar{k}[V]$. За обратното включване $\bar{k}(V) \subseteq F(\bar{k}[V])$ да изберем произволен клас на еквивалентност $(\bar{U}, \bar{\psi}) \in \bar{k}(V)$ и да отбележим, че регулярността на $\bar{\psi}$ в произволна точка $p \in U$ дава представяне $\bar{\psi} = \frac{f}{g}$ с $f, g \in \bar{k}[V]$, $g(p) \neq 0$. Тогава можем да считаме, че $\frac{f}{g} \in \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \subset F(\bar{k}[V])$. Това доказва, че $\bar{k}(V) = F(\bar{k}[V])$, Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 6.15. Нека V е квази-афинно алгебрично многообразие. Тогава:
(i) локалният пръстен

$$\mathcal{O}_p(V) \simeq \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \bar{k}[V], g \notin \mathfrak{M}_p \right\}$$

на точка $p \in V$ е изоморфен на локализацията $\bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$ на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$ по максималния идеал $\mathfrak{M}_p$, отговарящ на p ;

(ii) функционалното поле $\bar{k}(V)$ е полето от частни $F(\bar{k}[V])$ на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$.

Доказателство: Да забележим, че (i) следва от Следствие 6.9, Лема 6.15 (ii) и Лема 6.13. Аналогично, Следствие 6.13 (ii), Лема 6.15 (iv) и Следствие 6.13 (i) доказват (ii), Q.E.D.

ЗАДАЧА 6.16. Дадени са афинна хипер-елиптична крива

$$V = \{(x, y) \in \bar{k}^2 \mid y^2 = f_{2n+1}(x)\},$$

където $f_{2n+1}(x) \in \bar{k}[x]$ е полином от степен $2n+1$ с корен $\alpha \in \bar{k}$ и точки $p = (\alpha, 0)$, $q = (\beta, \gamma) \in V$ с $\gamma \neq 0$. Да се докаже, че афинният координатен пръстен

$$\bar{k}[V] = \{a(x) + b(x)y \mid a(x), b(x) \in \bar{k}[x]\}.$$

Да се опишат локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V)$, $\mathcal{O}_q(V)$ и функционалното поле $\bar{k}(V)$ на V .

ЗАДАЧА 6.17. В означенията от Задача 6.16 да се докаже, че афинната хипер-елиптична крива V има проективна обвивка

$$\bar{V} = \left\{ [x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\bar{k}) \mid y^2 z^{2n-1} = z^{2n+1} f_{2n+1}\left(\frac{x}{z}\right) \right\}.$$

Да се опише функционалното поле $\bar{k}(\bar{V})$ на $\bar{V}$ и локалните пръстени $\mathcal{O}_P(\bar{V})$, $\mathcal{O}_Q(\bar{V})$ на точките $P = [\alpha : 0 : 1]$, $Q = [\beta : \gamma : 1] \in \bar{V}$.

ЗАДАЧА 6.18. В означенията от Задачи 6.16 и 6.17, нека $f_{2n+1}(x) = \sum_{i=3}^{2n+1} x^i$, $U_1 = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\bar{k}) \mid y \neq 0\}$ и $t_1 = \frac{x}{y}$, $t_2 = \frac{z}{y}$. Да се докаже, че афинният координатен пръстен на $V \cap U_1$ е

$$\bar{k}[V \cap U_1] = \left\{ \sum_{i=0}^{2n-2} a_i(t_1) t_2^i \mid a_i(t_1) \in \bar{k}[t_1] \right\}.$$

Да се опише локалният пръстен $\mathcal{O}_S(\bar{V})$ на точката $S = [0 : 1 : 0] \in \bar{V}$.

ЗАДАЧА 6.19. За произволно свършено поле k и полиноми $f(x), g(x) \in \bar{k}[x]$ да се докаже, че афинният координатен пръстен на

$$V = \{(x, y, z) \in \bar{k}^3 \mid y^2 = f(x), z^2 = g(x)\}$$

е изоморфен на

$$\bar{k}[V] = \{a(x) + b(x)y + c(x)z + d(x)yz \mid a(x), b(x), c(x), d(x) \in \bar{k}[x]\}.$$

Нека α е общ корен на $f(x)$ и $g(x)$, β е корен на $f(x)$, но не и на $g(x)$, а γ не е корен нито на $f(x)$, нито на $g(x)$. Да се опишат локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V)$, $\mathcal{O}_r(V)$, $\mathcal{O}_q(V)$ на точките $p = (\alpha, 0, 0)$, $q = (\beta, 0, \lambda)$, $r = (\gamma, \mu, \nu) \in V$.

ЗАДАЧА 6.20. В означенията от Задача 6.19 да се докаже, че ако $\deg(f) \geq 3$, $\deg(g) \geq 3$, то проективната обвивка на V е

$$\bar{V} = \left\{ [x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid y^2 t^{\deg(f)-2} = t^{\deg(f)} f\left(\frac{x}{t}\right), z^2 t^{\deg(g)-2} = t^{\deg(g)} g\left(\frac{x}{t}\right) \right\}.$$

Да се опише функционалното поле $\bar{k}(\bar{V})$ на $\bar{V}$ и локалните пръстени $\mathcal{O}_P(\bar{V})$, $\mathcal{O}_Q(\bar{V})$, $\mathcal{O}_R(\bar{V})$ на точките

$$P = [\alpha : 0 : 0 : 1], \quad Q = [\beta : 0 : \lambda : 1], \quad R = [\gamma : \mu : \nu : 1] \in \bar{V}.$$

ЗАДАЧА 6.21. В означенията от Задача 6.20 да се докаже, че стандартната хиперравнина $H_4 = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid t = 0\}$ пресича $\bar{V}$ в проективната права

$$\bar{V} \cap H_4 = \{[0 : y : z : 0] \in \mathbb{P}^3(\bar{k})\} \simeq \{[y : z] \in \mathbb{P}^1(\bar{k})\} = \mathbb{P}^1(\bar{k}).$$

За $U_1 = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid y \neq 0\}$ да се провери, че афинният координатен пръстен $\bar{k}[\bar{V} \cap H_4 \cap U_1] = \bar{k}\left[\frac{z}{y}\right]$ съвпада с пръстена на полиномите на една променлива и да се опишат локалните пръстени на точките от $\bar{V} \cap H_4 \cap U_1$.

Сега ще разгледаме ефекта на разширението на полето от константи k до алгебричната обвивка $\bar{k}$ на k върху афинния координатен пръстен и функционалното поле на афинно многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.22. Ако V/k е квази-афинно многообразие, определено над поле k , то полето от частни $F(k[V])$ на афинния координатен пръстен $k[V]$ на V над k се нарича k -функционално поле на V/k и се бележи с $k(V)$.

Ако V/k е квази-проективно многообразие, определено над поле k , то за произволно стандартно афинно отворено подмножество U_i , полето от частни $F(k[V \cap U_i])$ на афинния координатен пръстен $k[V \cap U_i]$ на $V \cap U_i$ над k се нарича k -функционално поле на V/k .

Следващата лема доказва коректността на определението на k -функционално поле на квази-проективно многообразие $V/k \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$, определено над k .

ЛЕМА 6.23. Ако $V/k \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$ е квази-проективно многообразие, определено над k , а U_i, U_j са стандартни афинни отворени подмножества с $V \cap U_i \neq \emptyset$, $V \cap U_j \neq \emptyset$, то k -функционалните полета

$$k(V \cap U_i) = k(V \cap U_j)$$

на $V \cap U_i$ и $V \cap U_j$ съвпадат.

Доказателство: Достатъчно е да докажем съпадението

$$k[V \cap U_i] = k[V \cap U_j]$$

на афинните координатни пръстени на $V \cap U_i$ и $V \cap U_j$ над k , за да получим съпадението

$$F(k[V \cap U_i]) = F(k[V \cap U_j])$$

на съответните полета от частни. Съгласно Лема 6.13 (ii) имаме

$$k[V \cap U_i] = k[V \cap U_i \cap U_j] = k[V \cap U_j],$$

Q.E.D.

Нека V/k е афинно многообразие, определено над съвършено поле k . Тъждествено влагане

$$k[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$$

индуцира влагане на афинните координатни пръстени

$$k[x_1, \dots, x_n]/I_k(V) = k[V] \hookrightarrow \bar{k}[V] = \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V),$$

защото $k[x_1, \dots, x_n] \cap I(V) = I_k(V)$. Оттук следва влагането на полетата от частни

$$F(k[V]) = k(V) \hookrightarrow \bar{k}(V) = F(\bar{k}[V]).$$

ТВЪРДЕНИЕ 6.24. Ако $V/k \subseteq \bar{k}^n$ е квази-афинно многообразие, определено над поле k , то:

- (i) афинният координатен пръстен $\bar{k}[V] = l_{\bar{k}}(k[V])$ съвпада с $\bar{k}$ -линейната обвивка на афинния координатен пръстен $k[V]$ на V над k ;
- (ii) функционалното поле $\bar{k}(V) = \bar{k} * k(V)$ на V е композицията $\bar{k} * k(V)$ на алгебричната обвивка $\bar{k}$ на k с k -функционалното поле $k(V)$ на V , т.е. $\bar{k} * k(V)$ е подполе на $\bar{k}(V)$, породено от $\bar{k}$ и $k(V)$.

Доказателство: (i) Да забележим, че $\bar{k}$ -линейната обвивка на полиномиалния пръстен $k[x_1, \dots, x_n]$ е $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. Аналогично, $\bar{k}$ -линейната обвивка на идеала $I(V)_k$ на V над k е $l_{\bar{k}}(I(V)_k) = I(V)$. Твърдим, че фактор-пръстенът

$$\bar{k}[V] = \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V) = l_{\bar{k}}(k[x_1, \dots, x_n])/l_{\bar{k}}(I(V)_k)$$

съвпада с $\bar{k}$ -линейната обвивка

$$l_{\bar{k}}(k[x_1, \dots, x_n]/I(V)_k)$$

на афинния координатен пръстен $k[V]$ на V над k или вземането на $\bar{k}$ -линейна обвивка комутира с факторизацията по съответния идеал. По-точно, за произволни $\alpha_i \in \bar{k}$ и $f_i(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ можем да представим

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x_1, \dots, x_n) + l_{\bar{k}}(I(V)_k) = \sum_{i=1}^m \alpha_i [f_i(x_1, \dots, x_n) + I(V)_k] \in l_{\bar{k}}(k[V]).$$

Обратно, за произволни $\beta_j \in \bar{k}$ и $g_j(x_1, \dots, x_n) + I(V)_k \in k[V]$ имаме

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \beta_j [g_j(x_1, \dots, x_n) + I(V)_k] = \\ & = \sum_{j=1}^n \beta_j g_j(x_1, \dots, x_n) + l_{\bar{k}}(I(V)_k) \in l_{\bar{k}}(k[x_1, \dots, x_n])/l_{\bar{k}}(I(V)_k) = \bar{k}[V]. \end{aligned}$$

Това доказва (i).

(ii) От равенството на областите $\bar{k}[V] = l_{\bar{k}}(k[V])$ следва съвпадението на полетата от частни

$$\bar{k}(V) = F(\bar{k}[V]) = F(l_{\bar{k}}(k[V])).$$

Достатъчно е да проверим, че полето от частни на $\bar{k}$ -линейната обвивка на $k[V]$ съвпада с композицията на $\bar{k}$ с полето от частни на $k[V]$,

$$F(l_{\bar{k}}(k[V])) = \bar{k} * F(k[V]), \quad (6.2)$$

за да получим верността на (ii). Алгебричната обвивка $\bar{k}$ на k и полето от частни $F(k[V])$ на афинния координатен пръстен $k[V]$ на V над k се съдържат в $F(l_{\bar{k}}(k[V]))$, така че и полето $\bar{k} * F(k[V])$, породено от тях се съдържа в $F(l_{\bar{k}}(k[V]))$. Обратно, $\bar{k} * F(k[V])$ е поле, така че е достатъчно да забележим, че $\bar{k}$ и $k[V]$ се съдържат в $\bar{k} * F(k[V])$, за да твърдим, че $F(l_{\bar{k}}(k[V])) \subseteq \bar{k} * F(k[V])$ и (6.2), Q.E.D.

ЗАДАЧА 6.25. Да се докаже, че за произволно афинно многообразие $V \subset \bar{k}^n$ съществува крайно алгебрично разширение $E \supseteq k$, така че функционалното поле $\bar{k}(V) = \bar{k} * F(E[V])$ съвпада с композита на $\bar{k}$ и полето от частни $F(E[V])$ на фактор-пръстена $E[V] = E[x_1, \dots, x_n]/(I(V) \cap E[x_1, \dots, x_n])$.

ЛЕМА 6.26. Всеки автоморфизъм $\varphi \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ от абсолютната група на Galois на свършено поле k индуцира автоморфизъм

$$\varphi : \bar{k}[V_o] \longrightarrow \bar{k}[V_o]$$

на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V_o]$ на квази-афинно многообразие V_o/k , определено над k и автоморфизъм

$$\varphi : \bar{k}(V_o) \longrightarrow \bar{k}(V_o)$$

на функционалното поле $\bar{k}(V_o)$ на V_o/k .

Доказателство: По определение, квази-афинното многообразие $V_o/k = V/k \cap U$, определено над k е сечение на афинно многообразие V/k , определено над k със Зариски отворено подмножество $U \subset \bar{k}^n$. Съгласно $\bar{k}[V_o] = \bar{k}[V \cap U] = \bar{k}[V]$ и $\bar{k}(V_o) = \bar{k}(V \cap U) = \bar{k}(V)$, достатъчно е да докажем лемата за афинното многообразие V/k , определено над k .

Всеки елемент $\varphi \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ задава автоморфизъм

$$\varphi : \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n],$$

$$\varphi \left(\sum_{i=(i_1, \dots, i_n)} c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) = \sum_{i=(i_1, \dots, i_n)} \varphi(c_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

на полиномиалния пръстен $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. По-точно, φ е съгласувано със събирането на полиноми,

$$\begin{aligned} \varphi \left(\sum_i c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} + \sum_i d_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) &= \varphi \left(\sum_i (c_i + d_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) = \\ &= \sum_i \varphi(c_i + d_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = \sum_i \varphi(c_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} + \sum_i \varphi(d_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = \\ &= \varphi \left(\sum_i c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) + \varphi \left(\sum_i d_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right). \end{aligned}$$

В наредените n -торки от неотрицателни цели числа $(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ въвеждаме частична наредба $i < j$, ако $j - i = (j_1 - i_1, \dots, j_n - i_n) \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$. Тогава

$$\begin{aligned} \varphi \left(\left(\sum_i c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) \left(\sum_j d_j x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \right) \right) &= \varphi \left(\sum_m \left(\sum_{i < m} c_i d_{m-i} \right) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \right) = \\ &= \sum_k \varphi \left(\sum_{i < m} c_i d_{m-i} \right) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} = \sum_m \sum_{i < m} \varphi(c_i) \varphi(d_{m-i}) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} = \\ &= \left(\sum_i \varphi(c_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) \left(\sum_j \varphi(d_j) x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \right) = \varphi \left(\sum_i c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) \cdot \varphi \left(\sum_j d_j x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \right) \end{aligned}$$

и $\varphi : \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ е хомоморфизъм на пръстени. Непосредствено се вижда, че този хомоморфизъм се обръща от

$$\varphi^{-1} : \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n],$$

така че $\varphi : \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ е автоморфизъм на $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$.

Ако $V = Z(S)/k$, $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$ е афинно алгебрично многообразие, определено над k , то всеки елемент $\varphi \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ задава взаимно еднозначно изображение $\varphi : V \rightarrow V$. По-точно, за всяка точка $a \in V$ и всеки полином $f(x_1, \dots, x_n) \in S$ е в сила

$$0 = \varphi(0) = \varphi(f(a)) = f(\varphi(a)),$$

така че $\varphi(a) \in Z(S) = V$.

Оттук следва, че $\forall \varphi \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ индуцира взаимно еднозначно изображение

$$\varphi : I(V) \longrightarrow I(V),$$

защото за произволен полином $g(x_1, \dots, x_n) \in I(V) \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ и произволна точка $a \in V \subseteq \bar{k}^n$ имаме

$$\varphi(g)(a) = \varphi(g)(\varphi\varphi^{-1}(a)) = \varphi(g(\varphi^{-1}(a))) = \varphi(0) = 0,$$

съгласно $\varphi^{-1}(a) \in V$.

Аutomорфизмът $\varphi : \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$, който се ограничава до изображение $\varphi : I(V) \rightarrow I(V)$ индуцира автоморфизъм

$$\varphi : \bar{k}[V] = \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V) \longrightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V) = \bar{k}[V]$$

на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$ на афинното алгебрично многообразие V/k . По-точно, $\varphi(f + I(V)) = \varphi(f) + I(V)$ за $\forall f \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ е коректно определено, защото от $f_1 - f \in I(V)$ следва $\varphi(f_1) - \varphi(f) = \varphi(f_1 - f) \in I(V)$. Освен това, φ е хомоморфизъм на пръстени с нулево ядро, защото ако $\varphi(f) \in I(V)$, то $f = \varphi^{-1}\varphi(f) \in I(V)$. Всеки елемент $g + I(V) \in \bar{k}[V]$ има праобраз $\varphi^{-1}(g) + I(V)$ под действие на φ и $\varphi : \bar{k}[V] \rightarrow \bar{k}[V]$ е автоморфизъм на $\bar{k}[V]$.

Този автоморфизъм се продължава до автоморфизъм

$$\varphi : \bar{k}(V) = F(\bar{k}[V]) \longrightarrow F(\bar{k}[V]) = \bar{k}(V)$$

на полето от частни $\bar{k}(V)$ на $\bar{k}[V]$. По-точно, $\varphi\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\varphi(f)}{\varphi(g)}$ за $\forall f, g \in \bar{k}[V]$, $g \neq 0$ е коректно зададена върху $\bar{k}(V)$, защото от $\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}$ следва $fg_1 = f_1g$, така че $\varphi(f)\varphi(g_1) = \varphi(fg_1) = \varphi(f_1g) = \varphi(f_1)\varphi(g)$ и $\frac{\varphi(f)}{\varphi(g)} = \frac{\varphi(f_1)}{\varphi(g_1)}$. Освен това, φ е хомоморфизъм на пръстени съгласно

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}\right) &= \varphi\left(\frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2}\right) = \frac{\varphi(f_1g_2 + f_2g_1)}{\varphi(g_1g_2)} = \\ &= \frac{\varphi(f_1)\varphi(g_2) + \varphi(f_2)\varphi(g_1)}{\varphi(g_1)\varphi(g_2)} = \frac{\varphi(f_1)}{\varphi(g_1)} + \frac{\varphi(f_2)}{\varphi(g_2)} = \varphi\left(\frac{f_1}{g_1}\right) + \varphi\left(\frac{f_2}{g_2}\right) \end{aligned}$$

и

$$\varphi\left(\frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2}\right) = \varphi\left(\frac{f_1f_2}{g_1g_2}\right) = \frac{\varphi(f_1f_2)}{\varphi(g_1g_2)} = \frac{\varphi(f_1)\varphi(f_2)}{\varphi(g_1)\varphi(g_2)} = \frac{\varphi(f_1)}{\varphi(g_1)} \cdot \frac{\varphi(f_2)}{\varphi(g_2)} = \varphi\left(\frac{f_1}{g_1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{f_2}{g_2}\right).$$

Хомоморфизмът $\varphi : \bar{k}(V) \rightarrow \bar{k}(V)$ е изоморфизъм, защото има коректно определен обратен хомоморфизъм $\varphi^{-1} : \bar{k}(V) \rightarrow \bar{k}(V)$, Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 6.27. Нека k е свършено поле, а $V/k \subseteq \bar{k}^n$ е квази-афинно многообразие, определено над k . Тогава

(i) $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -инвариантите на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$ се изчерпват от афинния координатен пръстен $k[V]$ на V над k ,

$$\bar{k}[V]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} = k[V];$$

(ii) $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -инвариантите на функционалното поле $\bar{k}(V)$ на V се изчерпват от k -функционалното поле $k(V)$ на V ,

$$\bar{k}(V)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} = k(V).$$

Доказателство: (i) Всеки елемент на $\bar{k}[V] = l_{\bar{k}}(k[V])$ е $\bar{k}$ -линейна комбинация $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i$ на $f_1, \dots, f_m \in k[V]$ с коефициенти $\alpha_i \in \bar{k}$. Групата на Galois $Gal(\bar{k}/k)$ оставя на място f тогава и само тогава, когато

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i = f = \varphi(f) = \sum_{i=1}^m \varphi(\alpha_i) f_i. \quad (6.3)$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че $f_1, \dots, f_m$ са линейно независими над $\bar{k}$ след замяна на $f_1, \dots, f_m$ с максимална линейно независима над $\bar{k}$ подсистема. Тогава от (6.3) следва $\varphi(\alpha_i) = \alpha_i$ за $\forall 1 \leq i \leq m$, $\varphi \in Gal(\bar{k}/k)$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in k$. По този начин установихме, че $f \in \bar{k}[V]^{Gal(\bar{k}/k)}$ точно когато $f \in k[V]$.

Всеки елемент на функционалното поле $\bar{k}(V)$ е частно $\frac{f}{g}$ на $f, g \in \bar{k}[V]$. Повдиганията $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n), \tilde{g}(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ на f и g до полиноми на $x_1, \dots, x_n$ имат краен брой коефициенти, които са алгебрични над k . Нека обединението на коефициентите на $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)$ и $\tilde{g}(x_1, \dots, x_n)$ е $c_1, \dots, c_m$. Да означим с $h_i(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ минималните полиноми на c_i над k и да разгледаме полето на разлагане E на произведението

$$h_1(x_1, \dots, x_n) \dots h_m(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$$

над k . Полето E е крайно разширение на Galois на k и абсолютната група на Galois $Gal(\bar{k}/k)$ се ограничава до крайната група $Gal(\bar{k}/k)|_E = Gal(E/k)$. Ако $\frac{f}{g} \in F(\bar{k}(V)^{Gal(\bar{k}/k)}) = \bar{k}(V)^{Gal(\bar{k}/k)}$, то $Gal(\bar{k}/k)$ -инвариантното частно

$$\frac{f}{g} = \frac{\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) + I(V)}{\tilde{g}(x_1, \dots, x_n) + I(V)} = \frac{\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) \prod_{\sigma \in Gal(E/k) \setminus \{Id\}} \sigma(\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)) + I(V)}{\tilde{g}(x_1, \dots, x_n) \prod_{\sigma \in Gal(E/k) \setminus \{Id\}} \sigma(\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)) + I(V)}$$

има $Gal(\bar{k}/k)$ -инвариантен числител $F(x_1, \dots, x_n) + I(V)$ с

$$F(x_1, \dots, x_n) = \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) \prod_{\sigma \in Gal(E/k) \setminus \{Id\}} \sigma(\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)),$$

така че и знаменателят

$$G(x_1, \dots, x_n) = \tilde{g}(x_1, \dots, x_n) \prod_{\sigma \in Gal(E/k) \setminus \{Id\}} \sigma(\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)) + I(V)$$

е $Gal(\bar{k}/k)$ -инвариантен. Прилагайки (i) получаваме съществуването на полиноми $F'(x_1, \dots, x_n), G'(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ с $F'(x_1, \dots, x_n) + I(V) = F(x_1, \dots, x_n) + I(V)$, $G'(x_1, \dots, x_n) + I(V) = G(x_1, \dots, x_n) + I(V)$. Оттук

$$\frac{f}{g} = \frac{F'(x_1, \dots, x_n) + I(V)}{G'(x_1, \dots, x_n) + I(V)} = \frac{F'(x_1, \dots, x_n) + I(V)_k}{G'(x_1, \dots, x_n) + I(V)_k} \in F(k[V]) = k(V),$$

съгласно

$$\begin{aligned} & (k[x_1, \dots, x_n] + I(V))/I(V) \simeq \\ & \simeq k[x_1, \dots, x_n]/(k[x_1, \dots, x_n] \cap I(V)) = k[x_1, \dots, x_n]/I(V)_k, \end{aligned}$$

Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 6.28. Ако V/k е квази-афинно многообразие, определено над свършено поле k , то k е пълното поле от константи на k -функционалното поле $k(V)$ на V .

Доказателство: Нека $\alpha \in k(V)$ е алгебрично над k . Тогава $\alpha \in k(V) = \bar{k}(V)^{Gal(\bar{k}/k)}$ съгласно Твърдение 6.27 (ii), така че $\varphi(\alpha) = \alpha$ за всяко $\varphi \in Gal(\bar{k}/k)$. Но алгебричният над k елемент α принадлежи на алгебричната обвивка $\bar{k}$ и $\bar{k}^{Gal(\bar{k}/k)} = k$, така че $\alpha \in k$, Q.E.D.

Да напомним, че за произволно квази-проективно многообразие V/k , определено над k и произволно стандартно афинно отворено подмножество U_i , пресичащо V имаме $k(V) = k(V \cap U_i)$ по определение. От друга страна, доказахме, че $\bar{k}(V) = \bar{k}(V \cap U_i)$. За свършено поле k комбинираме тези факти с Твърдение 6.24 (ii), Твърдение 6.27 (ii) и Следствие 6.28, за да получим следното

СЛЕДСТВИЕ 6.29. Ако V/k е квази-проективно многообразие, определено над свършено поле k , то

- (i) функционалното поле $\bar{k}(V) = \bar{k} * k(V)$ на V съвпада с композита на алгебричната обвивка $\bar{k}$ на k с k -функционалното поле $k(V)$ на V ;
- (ii) $Gal(\bar{k}/k)$ -инвариантите на функционалното поле $\bar{k}(V)$ на V образуват k -функционалното поле $\bar{k}(V)^{Gal(\bar{k}/k)} = k(V)$ на V ;
- (iii) k е пълното поле от константи на k -функционалното поле $k(V)$ на V .