

Проективни алгебрични множества. Топология на Зариски, неприводимост, размерност.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Множеството $\mathbb{P}^n(\bar{k}) = (\bar{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}) / \bar{k}^*$ на правите през началото $(0, 0) \in \bar{k}^{n+1}$ в афинното пространство $\bar{k}^{n+1}$ се нарича n -мерно проективно пространство.

Точките $a \in \mathbb{P}^n(\bar{k})$ представляват класове на пропорционалност на

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \bar{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\},$$

които ще бележим с $a = [a_0 : a_1 : \dots : a_n]$. Компонентите $a_0, \dots, a_n$ се наричат хомогенни координати на a и са определени с точност до ненулев множител от $\bar{k}$.

Проективното пространство $\mathbb{P}^n(\bar{k}) = \cup_{i=0}^n U_i$ се покрива от стандартните афинни подмножества

$$U_i = \{x = [x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid x_i \neq 0\}.$$

Изображенията

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \bar{k}^n,$$

$$\varphi_i([x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

са взаимно еднозначни.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Точките $x \in \mathbb{P}^n(\bar{k})$, които имат представяне от вида $x = [x_0 : \dots : x_n]$ с $x_i \in k$ за $\forall 0 \leq i \leq n$ се наричат k -рационални.

Точката $x \in \mathbb{P}^n(\bar{k})$ е k -рационална точно когато има представяне от вида $x = [a_0 : \dots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \dots : a_n]$ с $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \in k^n$.

ЛЕМА 5.3. Броят на $\mathbb{F}_q$ -рационалните точки $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ на проективното пространство $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ е

$$|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)| = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Доказателство: Множеството $\mathbb{F}_q^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ има $q^{n+1} - 1$ елемента. Всяка $\mathbb{F}_q^*$ -орбита върху $\mathbb{F}_q^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ се състои от $q - 1$ точки и броят на $\mathbb{F}_q^*$ -орбитите върху $\mathbb{F}_q^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ е $\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = |\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)|$, Q.E.D.

ЛЕМА 5.4. Абсолютната група на Galois $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ на свършено поле k действа върху проективното пространство $\mathbb{P}^n(\bar{k})$.

Фиксираните точки на $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ върху $\mathbb{P}^n(\bar{k})$ са точно k -рационалните,

$$\mathbb{P}^n(\bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} = \mathbb{P}^n(k).$$

Доказателство: Действието на $Gal(\bar{k}/k)$ върху афинното пространство $\bar{k}^{n+1}$ се ограничава до действие на $Gal(\bar{k}/k)$ върху $\bar{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. По-точно, за $\forall \varphi \in Gal(\bar{k}/k)$ и за $\forall (x_0, \dots, x_n) \in \bar{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ с $x_i \neq 0$ имаме $\varphi(x_i) \neq 0$ съгласно $\varphi(0) = 0$ и взаимната еднозначност на φ . Следователно $\varphi(x_0, \dots, x_n) = (\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_n)) \in \bar{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Ако $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ и $(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \bar{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ с $\lambda \in \bar{k}^*$ са точки от една и съща $\bar{k}^*$ -орбита, то за $\forall \varphi \in Gal(\bar{k}/k)$ е изпълнено

$$\varphi(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = (\varphi(\lambda)\varphi(x_0), \dots, \varphi(\lambda)\varphi(x_n))$$

с $\varphi(\lambda) \in \bar{k}^*$, така че $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ и $\varphi(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ са от една и съща $\bar{k}^*$ -орбита. По този начин, действието на $Gal(\bar{k}/k)$ върху $\bar{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ индуцира коректно зададено действие на $Gal(\bar{k}/k)$ върху множеството $\mathbb{P}^n(\bar{k})$ на $\bar{k}^*$ -орбитите върху $\bar{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Точката $a = [a_0 : a_1 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n(\bar{k})$ с $a_i \neq 0$ е неподвижна под действие на $Gal(\bar{k}/k)$ тогава и само тогава, когато $\varphi_i(a) = \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right) \in \bar{k}^n$ е неподвижна точка на $Gal(\bar{k}/k)$ за някое $0 \leq i \leq n$ с $a_i \neq 0$. Последното е еквивалентно на k -рационалност на $\varphi_i(a)$, а оттам и на a , Q.E.D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5. Орбитите $P = Orb_{Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}(a)$ на $a \in \mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_q)$ под действие на абсолютната група на Galois $Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ на крайно поле $\mathbb{F}_q$ се наричат $\mathbb{F}_q$ -затворени точки на $\mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_q)$.

Елементите на $\mathbb{F}_q$ -затворена точка върху $\mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_q)$ се наричат $\mathbb{F}_q$ -спрегнати.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.6. Дефиниционното поле на точка $a = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_q)$ се определя като разширението $\mathbb{F}_q\left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right)$ на $\mathbb{F}_q$ за някое $a_i \neq 0$.

ЛЕМА 5.7. Дефиниционното поле $\mathbb{F}_q\left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right)$ на точка $a = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_q)$ над $\mathbb{F}_q$ не зависи от избора на $a_i \neq 0$.

Доказателство: Достатъчно е да проверим, че ако $a_0 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$, то

$$\mathbb{F}_q\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_i}{a_0} \mid 2 \leq i \leq n\right) = \mathbb{F}_q\left(\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_i}{a_1} \mid 2 \leq i \leq n\right). \quad (5.1)$$

За целта, полагаме $c = \frac{a_1}{a_0}$ и представяме $\frac{a_i}{a_0} = c \frac{a_i}{a_1}$, за да стигнем до извода, че полето

$$\mathbb{F}_q\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_i}{a_0} \mid 2 \leq i \leq n\right) = \mathbb{F}_q\left(c, c \frac{a_i}{a_1} \mid 2 \leq i \leq n\right)$$

се съдържа в полето

$$\mathbb{F}_q\left(\frac{1}{c} = \frac{a_0}{a_1}, \frac{a_i}{a_1} \mid 2 \leq i \leq n\right).$$

Аналогични разглеждания дават обратното включване и (5.1), Q.E.D.

От Лема 5.7 и Лема-Определение 4.4 следва, че дефиниционното поле на точка $a \in \mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_q)$ съвпада с дефиниционното поле на $\sigma(a) \in \mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_q)$ за произволен автоморфизъм $\sigma \in Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$. Това дава възможност да определим дефиниционното поле на $\mathbb{F}_q$ -затворена точка върху $\mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_q)$ над $\mathbb{F}_q$ като дефиниционното поле на произволен неин елемент над $\mathbb{F}_q$.

Комбинирайки Лема 5.7 с Твърдение-Определение 4.5 получаваме следващото

СЛЕДСТВИЕ-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.8. (i) Всяка $\mathbb{F}_q$ -затворена точка

$$P = Orb_{Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}(a),$$

$a \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ е крайно множество.

Броят на елементите на $\mathbb{F}_q$ -затворена точка $P \subset \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ се нарича степен на P и се бележи с $\deg(P)$.

(ii) Степенята на $\mathbb{F}_q$ -затворена точка $P = \text{Orb}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)}(a)$ върху проективното пространство $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ е минималното естествено $m \in \mathbb{N}$, за което има представяне $a = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ с $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}_{q^m}$.

(iii) Степенята на $\mathbb{F}_q$ -затворена точка $P = \text{Orb}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)}(a)$ върху $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ е минималното естествено число m , за което автоморфизмът на Frobenius Φ_{q^m} оставя на място a , $\Phi_{q^m}(a) = a$.

(iv) Степенята на $\mathbb{F}_q$ -затворена точка $P = \text{Orb}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)}(a)$ върху $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ съвпада със степенята $\left[\mathbb{F}_q \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right) : \mathbb{F}_q \right]$ на дефиниционното поле на $a \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ над $\mathbb{F}_q$.

ЗАДАЧА 5.9. В означенията от Задача 4.6 да се намерят $\mathbb{F}_2$ -затворените точки

$$S = \text{Orb}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_2}/\mathbb{F}_2)}[\alpha_4 : \alpha_4^2 : \alpha_8], \quad T = \text{Orb}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_2}/\mathbb{F}_2)}[\alpha_4 - \alpha_8 : \alpha_8 : 1 + \alpha_4]$$

върху $\mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{F}_2})$, техните степени и дефиниционни полета над $\mathbb{F}_2$.

Лема 5.7 и Твърдение 4.7 дават следното

СЛЕДСТВИЕ 5.10. Ако $P = \text{Orb}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)}(a)$, $a \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ е $\mathbb{F}_q$ -затворена точка върху $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$, r е естествено число, $d = \text{GCD}(m, r)$ е най-големият общ делител на m и r , то

$$P = \cup_{j=1}^d P_j$$

се разлага в непресичащо се обединение от d на брой $\mathbb{F}_{q^r}$ -затворени точки P_j от степен $\deg(P_j) = \frac{m}{d}$.

В частност, $P = \cup_{j=1}^m P_j$ се разлага в обединение на m на брой $\mathbb{F}_{q^r}$ -рационални точки тогава и само тогава, когато m дели r .

ЗАДАЧА 5.11. В означенията от задача 4.6 да се разложат $\mathbb{F}_2$ -затворените точки

$$S = \text{Orb}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_2}/\mathbb{F}_2)}[\alpha_4 : \alpha_4^2 : \alpha_8], \quad T = \text{Orb}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_2}/\mathbb{F}_2)}[\alpha_4 - \alpha_8 : \alpha_8 : 1 + \alpha_4]$$

в непресичащо се обединение на $\mathbb{F}_{2^r}$ -затворени точки за $r = 2, 3, 6$.

Сега ще разгледаме накратко проективните алгебрични множества и някои техни свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.12. За произволна фамилия от полиноми $S \subseteq \overline{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, множеството

$$Z_h(S) = \{a = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n(\overline{k}) \mid f(a) = 0 \text{ за всеки хомогенен } f \in S\}$$

на нулите на хомогенните полиноми от S в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ се нарича проективно алгебрично множество.

Ако $f(x_0, \dots, x_n) \in \overline{k}[x_0, \dots, x_n]$ е хомогенен полином от степен d , то за $\forall a = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n(\overline{k})$ и $\forall \lambda \in \overline{k}^*$ е в сила $f(\lambda a_0, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n)$. Следователно $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ тогава и само тогава, когато $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0$ или произволен хомогенен полином $f(x_0, \dots, x_n)$ се анулира в $(a_0, \dots, a_n)$ точно когато се анулира във всички точки $(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) \in \overline{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, пропорционални на $(a_0, \dots, a_n)$. По този начин, анулирането на хомогенен полином $f(x_0, \dots, x_n)$ в точка $a \in \mathbb{P}^n(\overline{k})$ е коректно определено като анулиране на $f(x_0, \dots, x_n)$ във всички повдигания на a до точки на $\overline{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Нехомогенен полином $g(x_0, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ може да се анулира в някои точки от $\bar{k}^*$ -орбита и да не се анулира в други точки от същата орбита. Например $g(x_0, x_1) = x_0 - 1$ се анулира в $(1, 1) \in \bar{k}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, но не се анулира в точките $(\lambda, \lambda) \in Orb_{\bar{k}^*}(1, 1) \subset \bar{k}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ с $\lambda \in \bar{k}^* \setminus \{1\}$. Затова не можем да определим нулите на $g(x_0, x_1) = x_0 - 1$ върху $\mathbb{P}^1(\bar{k})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.13. Ако $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ се състои от полиноми с коефициенти от k , то проективното алгебрично множество $Z_h(S)/k$ е определено над k .

Ако $Z_h(S)/k$ е проективно алгебрично множество, определено над k , то сечението

$$Z_h(S)(k) := Z_h(S) \cap \mathbb{P}^n(k)$$

се нарича множество на k -рационалните точки на $Z_h(S)$.

Непосредствено се вижда, че $Gal(\bar{k}/k)$ -фиксираните точки на $Z_h(S)/k$ са точно k -рационалните,

$$Z_h(S)^{Gal(\bar{k}/k)} = Z_h(S)(k).$$

ЛЕМА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.14. Нека $Z_h(S)/\mathbb{F}_q$ е проективно алгебрично множество, определено над $\mathbb{F}_q$, $a \in Z_h(S)$. Тогава $\mathbb{F}_q$ -затворената точка

$$P = Orb_{Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}(a)$$

върху $\mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{F}}_q)$, породена от a се съдържа изцяло в $Z_h(S)$ и се нарича $\mathbb{F}_q$ -затворена точка на $Z_h(S)$.

Доказателство: За произволен хомогенен полином $f \in S \subset \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ и произволен автоморфизъм $\varphi \in Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ е в сила

$$f(\varphi(a)) = \varphi(f)(\varphi(a)) = \varphi(f(a)) = \varphi(0) = 0.$$

Следователно $\varphi(a) \in Z_h(S)$ и $P \subset Z_h(S)$, Q.E.D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.15. Идеалът $I \triangleleft F[x_1, \dots, x_n]$ е хомогенен, ако се поражда от хомогенни полиноми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.16. Хомогенният идеал $I_h(Z_h(S)) \triangleleft \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$, породен от хомогенните полиноми $f(x_0, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$, анулиращи се върху $Z_h(S)$ се нарича хомогенен идеал на проективното алгебрично множество $Z_h(S) \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$.

ЛЕМА 5.17. Идеалът $I \triangleleft F[x_1, \dots, x_n]$ е хомогенен тогава и само тогава, когато за всеки елемент $f = \sum_{i=0}^m f^{[i]}$ на I хомогенните компоненти $f^{[i]}$ на f от степен i принадлежат на I .

Доказателство: Ако идеалът $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ се поражда от хомогенни полиноми $f_1, \dots, f_s \in F[x_1, \dots, x_n]$, то произволен елемент на I е от вида

$$f = \sum_{j=1}^s g_j f_j.$$

Ако $\deg(f_j) = d_j$, то хомогенните компоненти

$$f^{[d]} = \sum_{j=1}^s g_j^{[d-d_j]} f_j$$

принадлежат на I .

Обратно, нека $I = \langle g_1, \dots, g_l \rangle$ се поражда от полиномите $g_1, \dots, g_l \in F[x_1, \dots, x_n]$.

По предположение, всички хомогенни компоненти $g_i^{[j]}$ на $g_i = \sum_{j=0}^{d_i} g_i^{[j]}$ принадлежат на I , така че идеалът

$$J = \langle g_i^{[j]} \mid 0 \leq j \leq d_i, 1 \leq i \leq l \rangle$$

се съдържа в идеала I . От друга страна, $I \subseteq J$, защото за произволни полиноми $h_1, \dots, h_l \in F[x_1, \dots, x_n]$ е в сила $\sum_{i=1}^l g_i h_i = \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^{d_i} g_i^{[j]} h_i \in J$. Следователно $I = J$ се поражда от хомогенните полиноми $g_i^{[j]}$ и I е хомогенен идеал, Q.E.D.

ЛЕМА 5.18. *Ако I е хомогенен идеал в $F[x_0, \dots, x_n]$, то идеалът I е прост тогава и само тогава, когато за произволни хомогенни полиноми*

$$f(x_0, \dots, x_n), g(x_0, \dots, x_n) \in F[x_0, \dots, x_n]$$

с $f(x_0, \dots, x_n)g(x_0, \dots, x_n) \in I$ е в сила $f(x_0, \dots, x_n) \in I$ или $g(x_0, \dots, x_n) \in I$.

Доказателство: Необходимостта на условието следва от определението за прост идеал. Да допуснем, че за произволни хомогенни полиноми $f(x_0, \dots, x_n), g(x_0, \dots, x_n) \in F[x_0, \dots, x_n]$ с $fg \in I$ следва $f \in I$ или $g \in I$, но идеалът I не е прост. Тогава съществуват полиноми $F, G \in F[x_0, \dots, x_n]$ с $FG \in I$, $F \notin I$, $G \notin I$. Ако

$$F = \sum_{i=0}^m F^{[i]} \quad \text{и} \quad G = \sum_{j=0}^n G^{[j]}$$

са разлаганията на F и G в сума от хомогенни компоненти, без ограничение на общостта можем да предполагаме, че $F^{[m]} \notin I$, $G^{[n]} \notin I$. В противен случай, $F_1 := F - F^{[m]}$ има произведение $F_1 G = FG - F^{[m]} G \in I$ и можем да разглеждаме F_1 и G вместо F и G . Хомогенната компонента от максимална степен

$$(FG)^{[m+n]} = \left[\left(\sum_{i=0}^m F^{[i]} \right) \left(\sum_{j=0}^n G^{[j]} \right) \right]^{[m+n]} = F^{[m]} G^{[n]} \in I$$

принадлежни на I , защото $FG \in I$ и I е хомогенен идеал. По предположение, от $F^{[m]} G^{[n]} \in I$ следва $F^{[m]} \in I$ или $G^{[n]} \in I$. Противоречието доказва твърдението, Q.E.D.

Проективните алгебрични множества $Z_h(S)$ изпълняват аналогични свойства с формулираните в Лема 4.15. Въз основа на това стигаме до извода, че афинните алгебрични множества $\{Z(S)\}_{S \subseteq \bar{k}[x_0, \dots, x_n]} \subseteq \bar{k}^n$ и проективните алгебрични множества $\{Z_h(S)\}_{S \subseteq \bar{k}[x_0, \dots, x_n]} \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$ образуват фамилии от затворени подмножества, съответно на афинното пространство $\bar{k}^n$ или на проективното пространство $\mathbb{P}^n(\bar{k})$. По-точно, празното подмножество $\emptyset = Z(\bar{k}[x_1, \dots, x_n])$, съответно $\emptyset = Z_h(\bar{k}[x_0, \dots, x_n])$, както и афинното пространство $\bar{k}^n = Z(0)$ и проективното пространство $\mathbb{P}^n(\bar{k})$ са алгебрични множества. Произволно сечение $\cap_{i \in I} Z(S_i) = Z(\cup_{i \in I} S_i)$, съответно $\cap_{i \in I} Z_h(S_i) = Z_h(\cup_{i \in I} S_i)$ на алгебрични множества е алгебрично множество. Крайни обединения на алгебрични множества $Z(S_1) \cup \dots \cup Z(S_k) = Z(S_1 \dots S_k)$, съответно, $Z_h(S_1) \cup \dots \cup Z_h(S_k) = Z_h(S_1 \dots S_k)$ са алгебрични множества. Още повече, ако $Z(S_i)/k$ са определени над k , то $\cap_{i \in I} Z(S_i)$ и $Z(S_1) \cup \dots \cup Z(S_k)$ са определени над k .

Да напомним стандартното покритие $\mathbb{P}^n(\bar{k}) = \cup_{i=1}^n U_i$ с афинни подмножества

$$U_i = \{x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid x_i \neq 0\}$$

и взаимно еднозначните изображения

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \bar{k}^n,$$

$$\varphi_i([x_0 : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Твърдим, че φ_i са хомеоморфизми. Ясно е, че φ_i е взаимно еднозначно изображение. Остава да проверим непрекъснатостта на φ_i и φ_i^{-1} . По определение, едно изображение е непрекъснато, ако праобразите на отворените множества са отворени. Еквивалентно, праобразите на затворените множества трябва да са затворени. В разглеждания случай трябва да докажем, че образите на затворените множества под действие на φ и φ_i^{-1} са затворени. Наистина, за произволно проективно алгебрично множество $Z_h(S) \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$, произволен хомогенен полином $f \in S$ от степен $\deg(f) = d$ и произволно $0 \leq i \leq n$ точките $a \in Z_h(S) \cap U_i$ изпълняват равенството

$$0 = a_i^{-d} f(a_0, \dots, a_n) = f\left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, 1, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right).$$

С други думи, ако

$$f_i = x_i^{-d} f(x_0, \dots, x_n) = f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

е i -така дехомогенизация на f , то

$$\varphi_i(Z_h(S)) \cap U_i = Z(f_i \mid \text{всеки хомогенен } f \in S).$$

Обратно, за произволно афинно алгебрично множество $Z(S)$, произволен полином $g(x_1, \dots, x_n) \in S \subseteq \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ от обща степен $\deg(g) = d$ и произволно $0 \leq i \leq n$, определяме i -тата хомогенизация на g като хомогенния полином

$$g^{(i)} = x_i^d g\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

от степен d . Тогава

$$\varphi_i^{-1}(Z(S)) = Z_h(g^{(i)} \mid g \in S) \cap U_i.$$

Това доказва, че $\varphi_i : U_i \rightarrow \bar{k}^n$ са хомеоморфизми.

Да отбележим също, че допълненията

$$H_i = \mathbb{P}^n(\bar{k}) \setminus U_i = \{x \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid x_i = 0\} \simeq \mathbb{P}^{n-1}(\bar{k})$$

са проективни хиперравнини. Затова $\bar{k}^n \simeq U_i$ може да се разглежда като Зариски отворено подмножество на $\mathbb{P}^n(\bar{k})$.

ПРИМЕР 5.19. *Зариски затворените подмножества на проективната права $\mathbb{P}^1(\bar{k})$ са $\emptyset$, $\mathbb{P}^1(\bar{k})$ и крайните подмножества*

Произволно Зариски затворено подмножество $Z \subseteq \mathbb{P}^1(\bar{k})$ се разлага в непресичащо се обединение

$$Z = (Z \cap U_0) \cup (Z \setminus U_0)$$

относно стандартното афинно отворено подмножество

$$U_0 = \{x = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\bar{k}) \mid x_0 \neq 0\}.$$

Допълнението $H_0 = \mathbb{P}^1(\bar{k}) \setminus U_0 = \{[0 : 1]\}$ се състои от единствена точка, така че $Z \setminus U_0 = Z \cap H_0 \subseteq H_0$ се състои от 0 или 1 точки. Сечението $Z \cap U_0$ е Зариски затворено подмножество на $U_0 \simeq \bar{k}$. Съгласно доказаното, $Z \cap U_0$ е $\emptyset$, крайно множество или $Z \cap U_0 = U_0$. Ако $Z \cap U_0$ е най-много крайно множество,

то Z е най-много крайно множество като обединение на $Z \cap U_0$ с $Z \cap H_0$. Да предположим, че $Z \cap U_0 = U_0$ или $U_0 \subseteq Z$. Тогава разлагаме

$$Z = (Z \cap U_1) \cup (Z \setminus U_1)$$

относно стандартното афинно отворено подмножество

$$U_1 = \{x = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\bar{k}) \mid x_1 \neq 0\}.$$

Ако $Z \cap U_1$ е празно или крайно множество, то Z е празно или крайно множество като обединение на $Z \cap U_1$ с $Z \setminus U_1 = Z \cap H_1 \subseteq H_1 = \{[1 : 0]\}$. Ако $Z \cap U_1 = U_1$, то $U_1 \subseteq Z$, откъдето $\mathbb{P}^1(\bar{k}) = U_0 \cup U_1 \subseteq Z$ и $Z = \mathbb{P}^1(\bar{k})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.20. *Непразното топологично пространство V е неприводимо, ако всяко разлагане $V = Z_1 \cup Z_2$ като обединение на затворени подмножества $Z_i \subseteq V$ е с $V = Z_1$ или $V = Z_2$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.21. *Афинните (съответно, проективните) алгебрични множества, които са неприводими относно топологията на Зариски се наричат афинни (проективни) алгебрични многообразия.*

ЛЕМА 5.22. *Афинно алгебрично множество $Z(S) \subseteq \bar{k}^n$ (съответно, проективно алгебрично множество $Z_h(S) \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$) е афинно (проективно) алгебрично многообразие тогава и само тогава, когато идеалът $I(Z(S)) \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ (съответно, хомогенният идеал $I_h(Z_h(S)) \triangleleft \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$) е прост.*

Доказателство: Да допуснем, че $V = Z(S) \subseteq \bar{k}^n$ е афинно алгебрично многообразие, чийто идеал $I(V) \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ не е прост. Тогава съществуват полиноми $f(x_1, \dots, x_n), g(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \setminus I(V)$ с $fg \in I(V)$. Твърдим, че $Z(f) \not\supseteq ZI(V) = V$ и $Z(g) \not\supseteq ZI(V) = V$, защото предположението $Z(f) \supseteq V$ води до $f|_V = 0$, откъдето $f \in I(V)$, противно на избора на $f \notin I(V)$. От друга страна, $Z(fg) \supseteq ZI(V) = V$, съгласно Лема 4.15 (iii). Прилагаме Лема 4.15 (vi) и получаваме

$$V = Z(fg) \cap V = (Z(f) \cup Z(g)) \cap V = (Z(f) \cap V) \cup (Z(g) \cap V).$$

Подмножествата $Z(f) \cap V$ и $Z(g) \cap V$ на V са затворени и различни от V съгласно $V \not\subseteq Z(f)$, $V \not\subseteq Z(g)$. Това противоречи на неприводимостта на V и доказва простотата на идеала на неприводимо афинно алгебрично множество. Обратно, нека $V = Z(S) \subseteq \bar{k}^n$ е афинно алгебрично множество с прост идеал $I(V) \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ и $V = Z_1 \cup Z_2$ за затворени $Z_i \subsetneq V$. Тогава

$$I(V) = I(Z_1 \cup Z_2) = I(Z_1) \cap I(Z_2)$$

съгласно Лема 4.15 (v) и $I(Z_i) \supsetneq I(V)$ за $1 \leq i \leq 2$. По-точно, от $Z_i \subseteq V$ следва $I(Z_i) \supseteq I(V)$ и предположението $I(Z_i) = I(V)$ води до $Z_i = ZI(Z_i) = ZI(V) = V$, което противоречи на допускането за приводимост на V . Избираме полиноми $f_i \in I(Z_i) \setminus I(V)$ и забелязваме, че $f_1 f_2 \in I(Z_i) \cap I(Z_2) = I(V)$. Това противоречи на простотата на идеала $I(V)$ и доказва неприводимостта на афинните алгебрични множества $V = Z(S)$ с прост идеал $I(V)$.

ЗАДАЧА 5.23. *Да се докаже, че проективното алгебрично множество $V = Z_h(S)$ е неприводимо тогава и само тогава, когато хомогенният му идеал $I_h(Z_h(S)) \triangleleft \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$ е прост.*

Решението на задачата довършва доказателството на Лема 5.22.

От простотата на нулевия идеал в полиномиален пръстен $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ или съответно, в $\bar{k}[x_0, \dots, x_n]$ следва следното

СЛЕДСТВИЕ 5.24. *Афинното пространство $\bar{k}^n$ и проективното пространство $\mathbb{P}^n(\bar{k})$ са неприводими.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.25. Околност U на точка x от топологично пространство X е такова подмножество $U \subset X$, което съдържа x заедно с някое отворено подмножество $U_\alpha \in \mathcal{U}$, $x \in U_\alpha \subseteq U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.26. Топологията $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ върху X се нарича Хаусдорфова, ако произволни различни точки $x, y \in X$ имат непресичащи се околности $W_x \cap W_y = \emptyset$.

ТВЪРДЕНИЕ 5.27. Топологията на Зариски върху неприводимо алгебрично множество V не е Хаусдорфова.

Доказателство: Твърдим, че произволни непразни Зариски отворени подмножества $W_1, W_2 \subseteq V$ имат непразно сечение $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. В противен случай, можем да представим $V = (V \setminus W_1) \cup (V \setminus W_2)$ като обединение на собствени Зариски затворени подмножества $V \setminus W_j$, което противоречи на неприводимостта на V . Произволни околности $W(p), W(q)$ на различни точки $p, q \in V$ имат непразно сечение $W(p) \cap W(q) \neq \emptyset$, така че топологията на Зариски върху V не е Хаусдорфова, Q.E.D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.28. Топологията $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ се нарича нютерова, ако всяка ненамаляваща редица от отворени подмножества

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq U_{n+1} \subseteq \dots$$

се стабилизира след краен брой стъпки, $U_m = U_{m+1} = \dots$ за някое $m \in \mathbb{N}$.

ТВЪРДЕНИЕ 5.29. Топологията на Зариски върху афинно или проективно многообразие над алгебрично затворено поле F е нютерова.

Доказателство: Нека

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_{n-1} \subseteq U_n \subseteq \dots$$

е ненамаляваща редица от Зариски отворени подмножества. Допълненията им $Z_n := X - U_n$ образуват нарастваща редица от Зариски затворени подмножества

$$Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq Z_{n+1} \supseteq \dots$$

Съответните идеали

$$I(Z_1) \subseteq I(Z_2) \subseteq \dots \subseteq I(Z_n) \subseteq I(Z_{n+1}) \subseteq \dots$$

на тези алгебрични множества се нареждат в ненамаляваща редица. Обединението $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I(Z_n)$ е идеал в полиномиалния пръстен и по Теоремата на Хилберт за базиса I има краен брой пораждащи $f_1, \dots, f_m$. Ако $n_i \in \mathbb{N}$ са минималните естествени числа, за които $f_i \in I(Z_{n_i})$, а $n = \max(n_1, \dots, n_m)$, то $f_1, \dots, f_m \in I(Z_n)$, така че $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ се съдържа, а оттам и съвпада с $I(Z_n)$. В резултат, редицата от идеали $I(Z_n) = I(Z_{n+1}) = \dots$ се стабилизира след краен брой стъпки. Съгласно $Z_i = ZI(Z_i)$ за $\forall i \in \mathbb{N}$, съответната редица от Зариски затворени подмножества $Z_n = Z_{n+1} = \dots$ се стабилизира след краен брой стъпки и редицата от Зариски затворените им допълнения $U_n = U_{n+1} = \dots$ се стабилизира след краен брой стъпки, Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 5.30. Ако $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е нютерова топология върху X , то всяко отворено покритие на X има крайно подпокритие.

Доказателство: Да допуснем обратното. Тогава съществува отворено покритие $X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$, от което не може да се избере крайно подпокритие. Конструираме редица $\{U_{\gamma_i}\}_{i=1}^n$, $\gamma_i \in \Gamma$, започвайки с произволно U_{γ_1} . На всяка стъпка твърдим, че за вече избраните $U_{\gamma_1}, \dots, U_{\gamma_n}$ съществува

$$U_{\gamma_{n+1}} \not\subseteq U_{\gamma_1} \cup \dots \cup U_{\gamma_n}$$

с $\gamma_{n+1} \in \Gamma$. В противен случай $\cup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma = \cup_{i=1}^n U_{\gamma_i}$. Наличието на безкрайна строго растяща редица

$$U_{\gamma_1} \subset (\cup_{i=1}^2 U_{\gamma_i}) \subset \dots \subset (\cup_{i=1}^n U_{\gamma_i}) \subset (\cup_{i=1}^{n+1} U_{\gamma_i}) \subset \dots$$

от отворени подмножества на X противоречи на нютеровостта на $\mathcal{U}$, Q.E.D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.31. Хаусдорфовото топологично пространство X се нарича компактно, ако всяко негово отворено покритие $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ има крайно подпокритие $X = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$.

От Твърдение 5.30 получаваме непосредствено следното

СЛЕДСТВИЕ 5.32. Ако $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е нютерова Хаусдорфова топология върху X , то X е компактно топологично пространство.

За да дадем пример за компактно топологично пространство, чиято топология не е нютерова, да напомним, че метричната топология върху евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$ има за отворени подмножества всевъзможните обединения на отворени кълба

$$B(x, \varepsilon) := \left\{ z \mid \text{dist}(x, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i - x_i|^2} < \varepsilon \right\}$$

с центрове $x \in \mathbb{R}^n$ и реални положителни радиуси ε .

ПРИМЕР 5.33. Относно метричната топология върху $\mathbb{R}^n$, затвореното кълбо $\overline{B(\delta, 1)} \subset \mathbb{R}^n$ е компактно топологично пространство, чиято топология не е нютерова.

Доказателство: Компактността на $\overline{B(\delta, 1)}$ следва от това, че всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n \in \overline{B(\delta, 1)}$ има точка на съгъстяване, т.е. $\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty$ има сходяща подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ с $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in \overline{B(\delta, 1)}$. Наличието на безкрайна строго растяща редица

$$B\left(\delta, 1 - \frac{1}{2}\right) \subset B\left(\delta, 1 - \frac{1}{3}\right) \subset \dots \subset B\left(\delta, 1 - \frac{1}{n}\right) \subset B\left(\delta, 1 - \frac{1}{n+1}\right) \subset \dots$$

от отворени подмножества на $\overline{B(\delta, 1)}$ доказва, че метричната топология върху затвореното единично кълбо не е нютерова, Q.E.D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.34. Афинното (проективното) алгебрично множество V/k , определено над полето k се нарича абсолютно неприводимо, ако е алгебрично многообразие.

Съгласно Лема 5.22, алгебричното множество V/k , определено над k е абсолютно неприводимо тогава и само тогава, когато идеалът $I(V) \triangleleft \bar{k}[X] := \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ или, съответно, хомогеният идеал $I_h(V) \triangleleft \bar{k}[X] := \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$ е прост. Ако $I(V)_k$ е идеалът на V в $k[X] = k[x_1, \dots, x_n]$ или хомогеният идеал на V в $k[X] = k[x_0, \dots, x_n]$, от фактор-пръстенът

$$k[X]/I(V)_k = k[X]/(I(V) \cap k[X]) \simeq (k[X] + I(V))/I(V)$$

е подпръстен на $\bar{k}[X]/I(V)$. Затова, ако $I(V) \triangleleft \bar{k}[X]$ е прост идеал, то $I(V)_k = I(V) \cap k[X]$ е прост идеал. Съществуват приводими алгебрични множества V/k , определени над k , които имат прости идеали $I(V)_k$.

ЗАДАЧА 5.35. Да се докаже, че афинното алгебрично множество

$$V = Z(x^2 + y^2) \subset \overline{\mathbb{F}_3}^2$$

е приводимо, въпреки, че идеалът му $I_{\mathbb{F}_3}(V) = (x^2 + y^2)\mathbb{F}_3[x, y]$ над $\mathbb{F}_3$ е прост.

Упътване: Разложете $x^2 + y^2 \in \mathbb{F}_3[x, y] \subset \overline{\mathbb{F}_3}[x, y]$ над $\overline{\mathbb{F}_3}$ като намерите полиноми $f_j(x, y) \in \mathbb{F}_9[x, y]$ с

$$x^2 + y^2 = f_1(x, y)f_2(x, y). \quad (5.2)$$

Степента на $x^2 + y^2$ спрямо y е 2, така че търсим

$$f_j(x, y) = a_j(x)y + b_j(x) \in \mathbb{F}_9[x][y]$$

за подходящи полиноми $a_j(x), b_j(x) \in \mathbb{F}_9[x]$. Сравняването на коефициентите на $y^2, y, 1$ в (5.2) дава $a_j \in \overline{\mathbb{F}_3}^*$ и $b_j(x) = \alpha_j x \in \overline{\mathbb{F}_3}[x]$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $a_1 = a_2 = 1$, така че $\alpha_2 = \alpha_1^{-1} = -\alpha_1 \in \overline{\mathbb{F}_3}^*$. Докажете, че уравнението $\alpha_1^2 = -1$ няма решение в $\mathbb{F}_3$ и има решение в $\mathbb{F}_9$. Следователно идеалът $I(V)_{\mathbb{F}_3} \triangleleft \mathbb{F}_3[x, y]$ е прост, а $I(V)_{\mathbb{F}_9} \triangleleft \mathbb{F}_9[x, y]$ не е прост.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.36. *Проективната обвивка $\overline{W}$ на подмножество $W \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ е сечението $\overline{W} = \cap_{F \supseteq W} F$ на всички Зариски затворени подмножества $F \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$, съдържащи W .*

ТВЪРДЕНИЕ 5.37. (i) *Ако $W \subseteq \overline{k}^n \simeq U_i \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ е афинно многообразие, то проективната обвивка $\overline{W} \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$ е проективно многообразие.*

(ii) *Ако афинното многообразие W/k е определено над полето k , то проективната обвивка $\overline{W}/k$ е определена над k .*

(iii) *Ако $V \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$ е проективно алгебрично многообразие,*

$$U_i = \{x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\overline{k}) \mid x_i \neq 0\}$$

е стандартно афинно отворено подмножество на $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ и сечението $V \cap U_i \neq \emptyset$ не е празно, то $V \cap U_i \subseteq U_i \simeq \overline{k}^n$ е афинно алгебрично многообразие.

(iv) *Ако V/k е проективно алгебрично многообразие, определено над k и пресичащо стандартното афинно отворено подмножество U_i на $\mathbb{P}^n(\overline{k})$, то $V \cap U_i \subseteq U_i \simeq \overline{k}^n$ е афинно алгебрично многообразие, определено над k .*

Доказателство: (i) Трябва да проверим неприводимостта на проективната обвивка $\overline{W} \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$ относно топологията на Зариски върху $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Да допуснем, че $\overline{W} = Z_1 \cup Z_2$ за Зариски затворени подмножества $Z_j \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$. Тогава

$$W = (Z_1 \cap U_i) \cup (Z_2 \cap U_i)$$

за Зариски затворените подмножества $Z_j \cap U_i$ на $U_i \simeq \overline{k}^n$. Съгласно неприводимостта на $W \subseteq U_i \simeq \overline{k}^n$ имаме $W = Z_1 \cap U_i$ или $W \subset Z_1$. Следователно проективните обвивки $\overline{W} \subseteq \overline{Z_1} = Z_1$ и $\overline{W} = Z_1$ доказва неприводимостта на $\overline{W}$.

(ii) Ако W/k е определено над полето k , то за всеки полином

$$f(t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n) \in k[t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n]$$

от идеала на W , i -тата хомогенизация

$$x_i^{\deg(f)} f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

е хомогенен полином от $k[x_0, \dots, x_n]$ и $\overline{W}/k$ е проективно алгебрично многообразие, определено над k .

(iii) Ще докажем, че ако $V \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ е неприводимо проективно алгебрично множество, а $U \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ е Зариски отворено подмножество с непразно сечение $V \cap U \neq \emptyset$, то сечението $V \cap U$ е неприводимо, Зариски гъсто, Зариски отворено подмножество на V . Разглеждаме разлагането

$$V = (V \cap U) \cup (V \setminus U)$$

и неговата Зариски затворена обвивка

$$V = \overline{V} = \overline{(V \cap U)} \cup (V \setminus U),$$

вземайки предвид, че $V \setminus U$ е Зариски затворено. Съгласно неприводимостта на V , оттук следва $\overline{V \cap U} = V$ или $V = V \setminus U$. Но условието $V = V \setminus U$ е еквивалентно на $V \cap U = \emptyset$, така че $V = \overline{V \cap U}$ и $V \cap U$ е Зариски гъсто във V . Да представим $V \cap U = Z_1 \cup Z_2$ като обединение на относително затворени $Z_j \subseteq V \cap U$. По определение, $Z_j = V_j \cap U$ за Зариски затворени подмножества $V_j \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$. Затворената обвивка

$$V = \overline{V \cap U} = \overline{(V_1 \cap U)} \cup \overline{(V_2 \cap U)} = V_1 \cup V_2,$$

така че $V \equiv V_j$ за $j = 1$ или $j = 2$, съгласно неприводимостта на проективното затворено множество $V \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$. Оттук $Z_j = V_j \cap U = V \cap U$ и $V \cap U$ е неприводимо Зариски отворено подмножество на V .

(iv) Ако V/k е определено над k , то всеки хомогенен полином $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ от идеала на V дава помино $x_i^{-\deg(f)} f(x_0, \dots, x_n) = f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$ от идеала на $V \cap U_i$ над k , Q.E.D.

ЗАДАЧА 5.38. Да се намери проективната обвивка $\overline{W}$ на афинното многообразие

$$W = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{F}_5}^2 \mid y^2 = x^3 + x\} \subset \overline{\mathbb{F}_5}^2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.39. Размерността на неприводимо топологично пространство X е супремума на неотрицателните цели n , за които съществува строго растяща редица

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n = X$$

от различни неприводими затворени подмножества на X .

Ако $X = \cup_i X_i$ е приводимо топологично пространство с неприводими компоненти X_i с размерности $d_i = \dim X_i$, то размерността на X е супремумът d на неотрицателните цели d_i

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.40. Размерността на афинно или проективно алгебрично множество X е размерността на X относно топологията на Зариски.

Например, $\overline{k}$ и $\mathbb{P}^1(\overline{k})$ са с размерност 1, защото непразните неприводими алгебрични подмножества на $\overline{k}$ и $\mathbb{P}^1(\overline{k})$ са точките и $\overline{k}$, съответно, $\mathbb{P}^1(\overline{k})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.41. Ако $V \subset \overline{k}^n$ е афинно алгебрично множество с идеал $I(V) \triangleleft \overline{k}[x_1, \dots, x_n]$, то фактор-пръстенът

$$\overline{k}[V] = \overline{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$$

се нарича афинен координатен пръстен на V .

Ако $V/k \subset \overline{k}^n$ е афинно алгебрично множество, определено над k , то фактор-пръстенът

$$k[V] = k[x_1, \dots, x_n]/I_k(V) \quad \text{с} \quad I(V)_k = I(V) \cap k[x_1, \dots, x_n]$$

се нарича афинен координатен пръстен на V над k .

Афинното алгебрично множество V е афинно многообразие тогава и само тогава, когато афинният координатен пръстен $\overline{k}[V]$ е област на цялост. Ако афинното алгебрично множество V/k , определено над k е абсолютно неприводимо, то $\overline{k}[V]$ и $k[V]$ са области на цялост. Може $k[V]$ да е област на цялост, а $\overline{k}[V]$ да има делители на нулата.

ТВЪРДЕНИЕ 5.42. Размерността на афинно алгебрично многообразие V е равна на размерността на Krull на афинния координатен пръстен $\overline{k}[V]$ на V .

Доказателство: Непразните неприводими алгебрични подмножества на V отговарят на собствените прости идеали $\mathfrak{p}$ на $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$, съдържащи $I(V)$. По-точно, ако Z е непразно, Зариски затворено, неприводимо подмножество на V , то идеалът $I(Z)$ е прост и съдържа $I(V)$. Обратно, всеки прост идеал $\mathfrak{p} \supseteq I(V)$ на $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ отговаря на неприводимо подмножество $Z(\mathfrak{p}) \subseteq V$, защото $I(Z(\mathfrak{p})) = r(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

Простите идеали $\mathfrak{p} \supset I(V)$ на $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$, съдържащи $I(V)$ са във взаимно еднозначно съответствие с простите идеали $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}/I(V)$ на $\bar{k}[V]$. По-точно, ако $\mathfrak{p}$ е прост идеал в $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ и $(f + I(V))(g + I(V)) = fg + I(V) \in \mathfrak{p}/I(V)$, то $fg \in \mathfrak{p}$, откъдето $f \in \mathfrak{p}$ или $g \in \mathfrak{p}$. С други думи, $f + I(V) \in \mathfrak{p}/I(V)$ или $g + I(V) \in \mathfrak{p}/I(V)$. Обратно, ако $\mathfrak{q}$ е прост идеал в $\bar{k}[V]$, то пълният праобраз $\mathfrak{p}$ на $\mathfrak{q}$ в $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ е идеал. Ако $fg \in \mathfrak{p}$, то $fg + I(V) \in \mathfrak{q}$, откъдето $f + I(V) \in \mathfrak{q}$ или $g + I(V) \in \mathfrak{q}$ и $f \in \mathfrak{p}$ или $g \in \mathfrak{p}$, Q.E.D.

ЗАДАЧА 5.43. Да се докаже, че афинното алгебрично множество

$$V = \{x = (x_1, \dots, x_4) \in \overline{\mathbb{F}_q}^4 \mid (x_1 + x_2 - x_3 + x_4)(x_1 + x_2 + x_3 - x_4) = 0\}$$

е с размерност 3.

Упътване: Нека

$$Z_3(1) = \{x = (x_1, \dots, x_4) \in \overline{\mathbb{F}_q}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\},$$

$$Z_3(2) = \{x = (x_1, \dots, x_4) \in \overline{\mathbb{F}_q}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}, \quad \text{и}$$

$$Z_2(i) = \{x \in Z_3(i) \mid x_3 = 0\}, \quad Z_1(i) = \{x \in Z_2(i) \mid x_2 = 0\},$$

$$Z_0(i) = \{x \in Z_1(i) \mid x_1 = 0\}, \quad \text{за } 1 \leq i \leq 2.$$

Тогава $V = Z_3(1) \cup Z_3(2)$. Проверете, че

$$\emptyset \neq Z_0(i) \subsetneq Z_1(i) \subsetneq Z_2(i) \subsetneq Z_3(i) \quad \text{за } i = 1, 2$$

са неуплътняеми редици от неприводими алгебрични множества, като намерите афинните координатни пръстени $\overline{\mathbb{F}_q}[Z_j(i)]$ за $\forall 0 \leq j \leq 3, \forall 1 \leq i \leq 2$.

ТВЪРДЕНИЕ 5.44. Афинният координатен пръстен $\bar{k}[V]$ на афинно алгебрично множество V е крайномерен над полето $\bar{k}$ тогава и само тогава, когато $V = \{p_1, \dots, p_r\}$ е крайно множество.

Доказателство: Ако $V = \{p_1, \dots, p_r\}$ е крайно множество от точки $p_i = (p_{i1}, \dots, p_{in}) \in \bar{k}^n$, образуваме полиномите

$$g_j(x_j) = \prod_{i=1}^r (x_j - p_{ij}),$$

чиито корени са j -тите координати на точките от V . Тогава $g_1(x_1), \dots, g_n(x_n) \in I(V)$, $\deg(g_j) = r$, така че за всяко $m_j \geq r + 1$ е в сила

$$x_j^{m_j} + I(V) \in l_{\bar{k}}(1 + I(V), x_j + I(V), \dots, x_j^{r-1} + I(V)).$$

Следователно

$$\bar{k}[V] = l_{\bar{k}}(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} + I(V) \mid 0 \leq i_j \leq r - 1, \quad 1 \leq j \leq n)$$

е крайномерно линейно пространство над $\bar{k}$.

Нека $\dim_{\bar{k}} \bar{k}[V] = d$. Избираме крайно подмножество $V_0 = \{p_1, \dots, p_r\}$ на V . Полагаме $V_i = V_0 \setminus \{p_i\}$ за $\forall 1 \leq i \leq r$ и забелязваме, че $I(V_i) \supsetneq I(V_0)$, защото $I(V_i) = I(V_0)$ води до $V_i = ZI(V_i) = ZI(V_0) = V_0$. Избираме полиноми $f_i \in I(V_i) \setminus I(V_0)$ за $\forall 1 \leq i \leq r$. Твърдим, че $f_1 + I(V), \dots, f_r + I(V) \in \bar{k}[V]$ са линейно

независими над $\bar{k}$. В противен случай, за някое $i \in \{1, \dots, r\}$ съществуват $\lambda_s \in \bar{k}$ за $\forall s \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i\}$, така че

$$f_i + I(V) = \sum_{s \neq i} \lambda_s (f_s + I(V)).$$

Дясната страна на това равенство се анулира в p_i , защото $p_i \in V_s$ за $\forall s \neq i$ и $f_s + I(V) \subset I(V_s)$ съгласно $V_s \subset V_0 \subseteq V$. Лявата страна $f_i + I(V)$ не се анулира в p_i , защото всеки полином от $I(V)$ се анулира в $p_i \in V$, а $f_i \in I(V_i) \setminus I(V_0)$ не се анулира в p_i . Противоречието доказва линейната независимост на елементите $f_1 + I(V), \dots, f_r + I(V) \in \bar{k}[V]$ над $\bar{k}$, така че

$$\dim_{\bar{k}} \bar{k}[V] = d \geq r$$

и V има най-много $d = \dim_{\bar{k}} \bar{k}[V]$ елемента, Q.E.D.