Глава 3

Дискретни нормирания на функционално поле на една променлива.

1. Функционално поле на една променлива

Определение 3.1. *Разширението $F \supset k$ е функционално поле, ако F има поне един трансцендентен над k елемент x.*
Ако $F \supset k$ е функционално поле, то k се нарича поле от константи на F.

Определение 3.2. *Подполе E на поле F е алгебрично затворено в F, ако всеки алгебричен над E елемент $x \in F$ принадлежи на E.*

Лема 3.3. *Нека $F \supset k$ е функционално поле, k_1 е обединението на алгебричните над k елементи на F. Тогава*
(i) k_1 е алгебрично затворено в F подполе на F, т.е. всеки елемент $x \in F \setminus k_1$ е трансцендентен над k_1;
(ii) $F \supset k_1$ е функционално поле.

Доказателство: Твърдим, че всеки трансцендентен над k елемент $x \in F$ е трансцендентен и над k_1. При допускане на противното съществуват $c_0, \dots c_n \in k_1$, така че $\sum_{i=0}^{n} c_i x^i = 0$. В резултат, x е алгебричен над $k(c_0, \dots, c_n)$ и

$$[k(c_0, \dots, c_n, x) : k(c_0, \dots, c_n)] < \infty.$$

Разширението $k(c_0, \dots, c_n) \supseteq k$ се поражда от краен брой алгебрични над k елементи c_i, така че $k(c_0, \dots, c_n) \supseteq k$ е крайно и

$$[k(c_0, \dots, c_n, x) : k] = [k(c_0, \dots, c_n, x) : k(c_0, \dots, c_n)][k(c_0, \dots, c_n) : k] < \infty.$$

Съгласно $k \subset k(x) \subseteq k(c_o, \dots, c_n, x)$ имаме

$$[k(x) : k] \leq [k(c_0, \dots, c_n, x) : k] < \infty$$

и x е алгебрично над k, противно на избора на x. Това доказва, че всеки трансцендентен над k елемент $x \in F$ е трансцендентен над k_1. Условията (i) и (ii) са непосредствени следствия от това твърдение, Q.E.D.

Определение 3.4. *Ако полето от константи k на функционално поле $F \supset k$ е алгебрично затворено в F, ще казваме, че k е пълно поле от константи.*

Преобладаваща част от разглежданите функционални полета $F \supset k$ ще са с пълни полета от константи k.

Определение 3.5. *Функционално поле на една променлива е разширение $F \supset k$, което съдържа трансцендентен над k елемент $x \in F$, така че $F \supseteq k(x)$ е крайно разширение.*

Пример 3.6. *Ако x е трансцендентно над поле k, то полето*

$$k(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; f(x), g(x) \in k[x], \quad g(x) \not\equiv 0 \right\}$$

на рационалните функции на x с коефициенти от k е функционално поле на една променлива с поле от константи k.

Задача 3.7. *Нека k е произволно поле от константи, $F_0 = k(x)$ е чисто трансцендентно разширение на k от степен 1, $F_1 = F_0[y]/\langle y^2 - x^3 + x\rangle$ е фактор-пръстенът на $F_0[y] = \left\{ \sum\limits_{i=0}^{m} c_i y \ \mid \ c_i \in F_0 \right\}$ по главния идеал*

$$\langle y^2 - x^3 + x\rangle = \{(y^2 - x^3 + x)g(y) \ \mid \ g(y) \in F_0[y]\},$$

породен от $y^2 - x^3 + x$. Да се докаже, че F_1 е функционално поле на една променлива.

Упътване: Достатъчно е да проверите, че полиномът $y^2 - x^3 + x \in F_0[y]$ е неразложим над F_0. Тогава F_1 е поле, съдържащо F_0 и разширението

$$F_1 = \{a + by \ \mid \ a, b \in F_0\} \supset F_0$$

е от степен 2. Допускането $y^2 - x^3 + x = (y - \alpha)(y - \beta)$ за $\alpha, \beta \in F_0$ води до $\beta = -\alpha$ и $x^3 - x = \alpha^2$, което е противоречие.

Задача 3.8. *В пръстена $k[x, y]$ на полиномите на трансцендентните над k променливи x, y разглеждаме главния идеал $I = \langle x^3 - x - y^2\rangle$, породен от $x^3 - x - y^2 \in k[x, y]$. Да се докаже, че:*
(i) фактор-пръстенът $D = k[x, y]/I$ е област на цялост;
(ii) полето от частни $F(D)$ на D е изоморфно на функционалното поле на една променлива $F_1 = F_0[y]/\langle y^2 - x^3 + x\rangle$, $F_0 = k(x)$ от задача 3.7.

Упътване: (i) Достатъчно е да докажете, че идеалът $I = \langle x^3 - x - y^2\rangle \triangleleft k[x, y]$ е прост или полиномът $x^3 - x - y^2 \in k[x, y]$ е неразложим над k. Допуснете, че $y^2 - x^3 + x = f_1(x, y)f_2(x, y)$ за полиноми $f_1(x, y), f_2(x, y) \in k[x, y]$ и разгледайте $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ като полиноми на y от степен ≤ 2 с коефициенти от $k[x]$.
(ii) Да отбележим, че $k[x, y]$ е подпръстен на $F_0[y] = k(x)[y]$. Идеалът

$$J = \{(y^2 - x^3 + x)g(y) \ \mid \ g(y) \in F_0(y)\}$$

на $F_0[y]$, породен от $y^2 - x^3 + x$ съдържа I и $I = J \cap k[x, y]$. Композицията на тъждественото влагане $\varphi_0 : k[x, y] \to F_0[y]$ и естествения хомоморфизъм $\pi : F_0[y] \to F_0[y]/\langle y^2 - x^3 + x\rangle = F_1$ е хомоморфизъм на пръстени

$$\varphi_1 = \pi\varphi_0 : k[x, y] \longrightarrow F_1$$

с ядро $\ker(\varphi_1) = I$. По този начин получаваме влагане $\varphi_2 : D = k[x, y]/I \to F_1$, което се продължава до влагане на полето от частни $\varphi : F(D) \to F_1$. За всеки елемент $z = a + by \in F_1$, $a, b \in F_0 = k(x)$ съществуват полиноми $f_j(x), g_j(x) \in k[x]$, $1 \leq j \leq 2$, така че

$$z = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}y + J = \frac{\varphi_2(f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x)y + I)}{\varphi_2(g_1(x)g_2(x) + I)}.$$

Следователно z принадлежи на полето от частни $F(\varphi_2(D)) = \varphi(F(D))$ на $\varphi_2(D)$ и $\varphi(F(D)) = F_1$.

2. Дискретно нормиране на функционално поле на една променлива

Определение 3.9. *Нека $F \supset k$ е функционално поле на една променлива. Нормиране на F е изображение*

$$\nu : F \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

така че:
(i) $\nu(x) = \infty$ тогава и само тогава, когато $x = 0$;
(ii) $\nu(\alpha) = 0$ за всяко $\alpha \in k^*$;
(iii) $\nu(F^*) \neq \{0\}$;

(iv) $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ *за* $\forall x, y \in F$*;*
(v) $\nu(x + y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$ *(неравенство на триъгълника).*

Свойство (iv) означава, че $\nu : (F^*, .) \to (\mathbb{R}, +)$ е хомоморфизъм на мултипликативната група на F в адитивната група на полето на реалните числа.

Лема 3.10. *(*Следствия от аксиомите за нормиране*) Ако* $\nu : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *е нормиране на функционално поле* $F \supset k$ *на една променлива, то*
(i) $\nu\left(\frac{x}{y}\right) = \nu(x) - \nu(y)$ *за* $\forall x, y \in F$*,* $y \neq 0$*;*
(ii) $\nu(-x) = \nu(x)$ *за* $\forall x \in F$*;*
(iii) за $\nu(x) \neq \nu(y)$ *е изпълнено неравенството на триъгълника с равенство* $\nu(x + y) = \min(\nu(x), \nu(y))$.

Доказателство: (i) Съгласно аксиома (iv) за нормиране,

$$\nu\left(\frac{x}{y}\right) + \nu(y) = \nu\left(\frac{x}{y}.y\right) = \nu(x).$$

(ii) От $-x = (-1)x$ с $-1 \in k^*$ следва, че

$$\nu(-x) = \nu((-1)x) = \nu(-1) + \nu(x) = 0 + \nu(x) = \nu(x).$$

(iii) С точност до пермутация на x с y можем да считаме, че $\nu(y) > \nu(x)$. Ако допуснем, че $\nu(x + y) > \min(\nu(x), \nu(y)) = \nu(x)$, то $x = (x + y) + (-y)$ дава

$$\nu(x) = \nu((x + y) + (-y)) \geq \min(\nu(x + y), \nu(-y)) = \min(\nu(x + y), \nu(y)) > \nu(x),$$

което е противоречие, доказващо неравенството на триъгълника с равенство, Q.E.D.

Определение 3.11. *Подгрупата* $(D, +)$ *на* $(\mathbb{R}, +)$ *е дискретна, ако няма гранична точка в* $\mathbb{R}$.

Определение 3.12. *Нормирането* $\nu : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *е дискретно, ако образът* $(\nu(F^*), +)$ *на мултипликативната група на полето* F *е дискретна подгрупа на* $(\mathbb{R}, +)$.

Лема 3.13. *Ненулевите дискретни подгрупи* $(D, +)$ *на* $(\mathbb{R}, +)$ *са от вида* $(d\mathbb{Z}, +)$ *за някакво реално положително* $d \in \mathbb{R}^{>0}$.

Доказателство: Нека $d \in \mathbb{R}^{>0}$ е минималното реално положително число, което принадлежи на $(D, +)$. Съществуването на такова число следва от дискретността на $(D, +)$, защото ако за всяко $r_n \in \mathbb{R}^{>0}$ съществува $0 < r_{n+1} < r_n$, то $0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на $(D, +)$ в $\mathbb{R}$. Твърдим, че всеки елемент на фактор-групата $(\mathbb{R}, +)/(d\mathbb{Z}, +)$ има единствен представител в $[0, d)$. Наистина, точките dz с $z \in \mathbb{Z}$ разбиват реалната права $\mathbb{R}$ на интервали $[dz, dz+d)$ с дължина d. Всяко реално число $r \in \mathbb{R}$ попада в единствен интервал $dz_r \leq r < d(z_r+1)$ и $r - dz_r \in [0, d)$ е единствената точка от $[0, d)$, която представя съседния клас $r - dz_r + d\mathbb{Z} = r + d\mathbb{Z}$.
Подгрупата $(D, +)$ на $(\mathbb{R}, +)$ съдържа $(d\mathbb{Z}, +)$, защото $d \in D$. Следователно за всеки съседен клас $\delta + d\mathbb{Z} \in (D, +)/(d\mathbb{Z}, +)$ съществува единствено число $\Delta \in [0, d)$ с $\Delta + d\mathbb{Z} = \delta + d\mathbb{Z}$. Съгласно избора на d като минималното реално положително число от D, имаме $[0, d) \cap D = \{0\}$, така че съществува единствен съседен клас на $(D, +)$ спрямо $(d\mathbb{Z}, +)$ и $(D, +) = (d\mathbb{Z}, +)$, Q.E.D.

3. Пръстен на дискретно нормиране

Дискретните нормирания се характеризират със съответните си пръстени.
Елементът t на комутативен пръстен с единица R е неразложим, ако $t \not\in R^*$ не е обратим в R и за всяко разлагане $t = t_1 t_2$ с $t_i \in R$ е в сила $t_1 \in R^*$ или $t_2 \in R^*$.

Определение 3.14. *Комутативната област R с единица се нарича пръстен на дискретно нормиране, ако съществува неразложим елемент $t \in R \setminus R^*$, така че всеки ненулев елемент z на R може да се представи във вида $z = ut^m$ за някое $u \in R^*$ и някое цяло $m \geq 0$.*
Елементът $t \in R$ се нарича локален параметър.

Локалният параметър на пръстен на дискретно нормиране не е единствен. Твърдим, че ако t е локален параметър на пръстен на дискретно нормиране R, то $s \in R$ е локален параметър на R тогава и само тогава, когато $s = u_o t$ за някое $u_o \in R^*$. Ако t е локален параметър на R и $s = u_o t$ за някое $u_o \in R^*$, то допускането за разложимост на s води до разложимост на t. От това, че всеки ненулев елемент $z \in R \setminus \{0\}$ е от вида $z = ut^m$ с $u \in R^*$, $m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ следва представянето $z = (uu_o^{-m})s^m$ с $uu_o^{-m} \in R^*$. Следователно s е локален параметър на R. Обратно, нека t и s са локални параметри на R. Тогава неразложимостта на $s \in R \setminus \{0\}$ изисква $s = u_o t$ за някое $u_o \in R^*$.
Ако R е пръстен на дискретно нормиране, то представянията $z = ut^m$ на всички $z \in R \setminus \{0\}$ са единствени. Наистина, да допуснем, че $ut^m = vt^n$ с $u, v \in R^*$, $m, n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ и $m \neq n$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $m > n$ и да представим $t^{m-n} = u^{-1}v$. Тогава $t^{m-n} \in R^* \cap \langle t \rangle$ и $\langle t \rangle = R$, противно на допускането $t \notin R^*$.

Определение 3.15. *Комутативният пръстен с единица R е локален, ако има единствен максимален идеал.*

Определение 3.16. *Комутативният пръстен с единица R е локален, ако има единствен максимален идеал.*

Твърдение-Определение 3.17. *Ако $\nu : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е нормиране на функционално поле на една променлива над k, то множеството*

$$\mathcal{O}_\nu = \{x \in F \mid \nu(x) \geq 0\}$$

е локална област с максимален идеал

$$\mathfrak{M}_\nu = \{x \in F \mid \nu(x) > 0\}$$

и поле от частни F.
Ако нормирането $\nu : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е дискретно, то $\mathcal{O}_\nu$ е пръстен на дискретно нормиране и произволен локален параметър t на $\mathcal{O}_\nu$ поражда максималния идеал $\mathfrak{M}_\nu$.

Доказателство: Подмножеството $\mathcal{O}_\nu$ е подпръстен на F, защото за произволни $x, y \in \mathcal{O}_\nu$ е в сила

$$\nu(x - y) \geq \min(\nu(x), \nu(-y)) = \min(\nu(x), \nu(y)) \geq 0,$$

$$\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y) \geq 0.$$

В качеството си на подпръстен на полето F, пръсетнът $\mathcal{O}_\nu$ е област. Подмножеството $\mathfrak{M}_\nu$ на $\mathcal{O}_\nu$ е идеал съгласно

$$\nu(x - y) \geq \min(\nu(x), \nu(y)) > 0 \quad \text{за} \quad \forall x, y \in \mathfrak{M}_\nu,$$

$$\nu(xz) = \nu(x) + \nu(z) \geq \nu(x) > 0 \quad \text{за} \quad \forall x \in \mathfrak{M}_\nu, \ \ \forall z \in F.$$

Твърдим, че мултипликативната група

$$\mathcal{O}_\nu^* = \{x \in F \mid \nu(x) = 0\}.$$

За целта забелязваме, че за $\forall x \in F^*$ равенството $1 = xx^{-1}$ води до

$$0 = \nu(1) = \nu(x.x^{-1}) = \nu(x) + \nu(x^{-1}),$$

откъдето $\nu(x^{-1}) = -\nu(x)$. Ако $x \in \mathcal{O}_\nu^*$, то $x^{-1} \in \mathcal{O}_\nu$ и $0 \geq -\nu(x) = \nu(x^{-1}) \geq 0$, откъдето $\nu(x^{-1}) = \nu(x) = 0$. Обратно, от $\nu(x) = 0$ следва $\nu(x^{-1}) = 0$, така че $x^{-1} \in \mathcal{O}_\nu$ и $x \in \mathcal{O}_\nu^*$.

Достатъчно е да проверим, че всеки собствен идеал $J \triangleleft \mathcal{O}_\nu$, $J \neq \mathcal{O}_\nu$ се съдържа в $\mathfrak{M}_\nu$, за да твърдим, че $\mathcal{O}_\nu$ е локален пръстен с максимален идеал $\mathfrak{M}_\nu$. Ако допуснем, че $J \triangleleft \mathcal{O}_\nu$, $J \neq \mathcal{O}_\nu$ и съществува $x \in J \setminus \mathfrak{M}_\nu$, то $\nu(x) = 0$. Следователно $x \in \mathcal{O}_\nu^*$ и $x^{-1} \in \mathcal{O}_\nu$. В резултат, $1_F = xx^{-1} \in J$ съгласно $x \in J$, $x^{-1} \in \mathcal{O}_\nu$ и $J = \mathcal{O}_\nu$, противно на предположението $J \neq \mathcal{O}_\nu$. Противоречието доказва, че всеки собствен идеал на $\mathcal{O}_\nu$ се съдържа в $\mathfrak{M}_\nu$ и $\mathcal{O}_\nu$ е локален пръстен с максимален идеал $\mathfrak{M}_\nu$.

Тъждественото влагане на $\mathcal{O}_\nu$ в F се продължава до тъждествено влагане на полето от частни $F(\mathcal{O}_\nu)$ на $\mathcal{O}_\nu$ в F. Всеки елемент $z \in F^*$ с $\nu(z) \geq 0$ пронадлежи на $\mathcal{O}_\nu$, а оттам и на $F(\mathcal{O}_\nu)$. Ако $z \in F^*$ има $\nu(z) < 0$, то $\nu(z^{-1}) = -\nu(z) > 0$ и $y = \frac{1}{z} \in \mathfrak{M}_\nu \subset \mathcal{O}_\nu$. В резултат, $z = \frac{1}{y} \in F(\mathcal{O}_\nu)$ и $F = F(\mathcal{O}_\nu)$. Това доказва, че F е полето от частни на $\mathcal{O}_\nu$.

Ако $\nu : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е дискретно нормиране, то образът $\nu(F^*)$ на мултипликативната група F^* на F е ненулева дискретна подгрупа $(d\mathbb{Z}, +)$ на $(\mathbb{R}, +)$ за някое $d \in \mathbb{R}^{>0}$. Избираме някое $t \in F^*$, чийто образ $\nu(t) = d$ поражда $(d\mathbb{Z}, +)$. Ще докажем, че t е локален параметър на $\mathcal{O}_\nu$. Произволен ненулев елемент $z \in \mathcal{O}_\nu$ има норма $\nu(z) = dm$ за някое цяло $m \geq 0$. Тогава $u = zt^{-m} \neq 0$ с $\nu(u) = 0$ е от мултипликативната група $\mathcal{O}_\nu^*$ и $z = ut^m$ е търсеното представяне. Ако $xy \in \langle t \rangle$ за $x = ut^m, y = vt^n \in \mathcal{O}_\nu$ с $u, v \in \mathcal{O}_\nu^*$, $m, n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, то $m + n \geq 1$. В резултат, $m \geq 1$ или $n \geq 1$ и $x \in \langle t \rangle$ или $y \in \langle t \rangle$. Това доказва, че $\mathcal{O}_\nu$ е пръстен на дискретно нормиране с локален параметър t.

Остава да проверим, че произволен локален параметър t на $\mathcal{O}_\nu$ поражда максималния идеал $\mathfrak{M}_\nu$. От $\nu(t) = d > 0$ следва, че $t \in \mathfrak{M}_\nu$ и $\langle t \rangle \subseteq \mathfrak{M}_\nu$. За обратното включване $\mathfrak{M}_\nu \subseteq \langle t \rangle$ е достатъчно да отбележим, че всеки елемент $z \in \mathfrak{M}_\nu \setminus \{0\}$ е от вида $z = ut^n$ за някои $u \in \mathcal{O}_\nu^*$, $n \in \mathbb{N}$, защото $\mathcal{O}_\nu^* \cap \mathfrak{M}_\nu = \emptyset$. Това доказва, че $\mathfrak{M}_\nu = \langle t \rangle$, Q.E.D.

Твърдение 3.18. *Нека $F \supset k$ е функционално поле на една променлива, а $R \subset F$ е пръстен на дискретно нормиране с поле от частни F, съдържащ полето от константи k като подпръстен. Тогава съществува дискретно нормиране $\nu : F \to \cup \{\infty\}$ на F, чийто пръстен $\mathcal{O}_\nu = R$ съвпада с R.*

Доказателство: Нека t е локален параметър на R. Произволен елемент $z \in F^*$ е от вида $z = \frac{r_1}{r_2}$ за подходящи $r_1, r_2 \in R$. Ако $r_1 = ut^m$, $r_2 = vt^n$ с $u, v \in R^*$, $m, n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, то определяме

$$\nu\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \nu((uv^{-1})t^{m-n}) = m - n.$$

Полагаме $\nu(0) = \infty$ и получаваме изображение

$$\nu : F \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

Образът $(\nu(F^*), +) = (\mathbb{Z}, +)$ на мултипликативната група F^* на F под действие на ν съвпада с дискретната подгрупа $(\mathbb{Z}, +)$ на $(\mathbb{R}, +)$. Достатъчно е да проверим аксиомите за нормиране, за да твърдим, че ν е дискретно нормиране на F. Полето от константи $k \subset R$ се състои от обратими в R елементи, така че $\nu(\alpha) = 0$ за всяко $\alpha \in k^*$. Непосредствено се пресмята, че

$$\nu((ut^m)(vt^n)) = \nu(uvt^{m+n}) = m + n = \nu(ut^m) + \nu(vt^n) \quad \text{за} \quad u, v \in R^*, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ако $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ и $u, v \in R^*$, то

$$\nu(ut^m + vt^n) = \nu(t^m(u + vt^{n-m})) = \nu(t^m) + \nu(u + vt^{n-m}) \geq m =$$
$$= \min(m, n) = \min(\nu(ut^m), \nu(vt^n)),$$

защото $u + vt^{n-m} \in R$ за $n - m \geq 0$. Това доказва, че $\nu : F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ е дискретно нормиране на F. Да отбележим, че образът $\nu(t) = 1$ на локалния параметър t на R поражда $\nu(F^*) = \mathbb{Z}$.

Всеки ненулев елемент $z \in R \setminus \{0\}$ е от вида $z = ut^m$ за някои $u \in R^*$, $m \geq 0$, така че $\nu(z) = m \geq 0$ и $z \in \mathcal{O}_\nu = \{x \in F \mid \nu(x) \geq 0\}$. Това доказва, че R е подпръстен на $\mathcal{O}_\nu$. Обратно, ако $x = \frac{r_1}{r_2} \in \mathcal{O}_\nu$ с $r_1 = ut^m$, $r_2 = vt^n$, $u, v \in R^*$, $m, n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, то $\nu(x) = m - n \geq 0$ и $x = (uv^{-1})t^{m-n} \in R$, съгласно $uv^{-1} \in R^*$, $t^{m-n} \in R$. Оттук следва, че $\mathcal{O}_\nu \subseteq R$ и $\mathcal{O}_\nu = R$, Q.E.D.

За да изучим пръстените на дискретно нормиране R с поле от частни F, ще въведем още няколко понятия

Определение 3.19. *Комутативният пръстен с единица R е ньотеров, ако всеки идеал I в R е крайно породен,*

$$I = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i \mid r_i \in R \right\}.$$

Преди да въведем размерност на Krull на комутативен пръстен с единица R, да напомним, че супремумът на подмножество $S \subseteq \mathbb{Z}^{\geq 0}$ е минималното $\sigma \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ с $\sigma \geq s$ за всяко $s \in S$. Нека подмножеството S е ограничено, т.е. съществува горна граница $N \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ на S, така че $N \geq s$ за всеки елемент $s \in S$. Множеството на целите горни граници на S е ограничено отдолу от 0 и има минимален елемент $\sigma \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, който е супремумът на S. Ако S не е ограничено или за всяко $N \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ съществува $s_N \in S$ с $s_n > N$, то супремумът $\sigma = \infty$.

Определение 3.20. *Височината на прост идеал $\mathfrak{p}$ в комутативен пръстен с единица R е супремумът на неотрицателните цели числа n, за които съществува редица от $n+1$ различни прости идеали $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ на R.*

Определение 3.21. *Размерността на Krull на комутативен пръстен с единица R е супремумът на височините на простите идеали в R.*

Твърдение 3.22. *Всеки пръстен на дискретно нормиране R е ньотерова локална област с размерност на Krull 1.*

Доказателство: Достатъчно е да установим, че всеки ненулев собствен идеал I на R е от вида $I = \langle t^n \rangle$ за локален параметър t на R и някое естествено число n. Тогава $\langle t \rangle$ е единственият ненулев прост идеал в R. Височината на $\langle t \rangle$ е 1, защото $\langle t \rangle$ съдържа нулевия идеал $\langle 0 \rangle = \{0\}$, който е прост в областта R. Всеки собствен идеал на R се съдържа в идеала $\langle t \rangle$, така че R е локален пръстен с единствен максимален идеал $\langle t \rangle$.

Произволен идеал $\{0\} \neq I \neq R$ има празно сечение $I \cap R^* = \emptyset$ с мултипликативната група R^* на R, така че $\forall z \in I$ е от вида $z = ut^m$ за някои $m \in \mathbb{N}$, $u \in R^*$. Нека n е минималното естествено число, за което съществува елемент $u_o t^n \in I$ с $u_o \in R^*$. Понеже $u_o^{-1} \in R$, оттук следва, че $t^n \in I$ и идеалът $\langle t^n \rangle$, породен от t^n се съдържа в идеала I. Произволен ненулев елемент $z \in I \setminus \{0\}$ има вида $z = ut^m = (ut^{m-n})t^n$ за някое $m \geq n$ и принадлежи на $\langle t^n \rangle$. Оттук $I \subseteq \langle t^n \rangle$ и $I = \langle t^n \rangle$, Q.E.D.

4. Еквивалентност на нормирания

Определение 3.23. *Нормиранията $\nu_1 : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и $\nu_2 : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ на функционално поле F на една променлива са еквивалентни, ако съществува реална константа $c > 0$, така че $\nu_2(x) = c\nu_1(x)$ за $\forall x \in F^*$.*

Непосредствено се проверява, че еквивалентността на нормирания е релация на еквивалентност. По-точно, всяко нормиране $\nu : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е еквивалентно на себе си. Ако $\nu_2 = c\nu_1$ е еквивалентно на ν_1, то $\nu_1 = c^{-1}\nu_2$ е еквивалентно на ν_2. Ако $\nu_2 = c\nu_1$ и $\nu_3 = d\nu_2$ за $c, d \in \mathbb{R}^{>0}$, то $\nu_3 = (cd)\nu_1$ с $cd \in \mathbb{R}^{>0}$.
Ако нормирането $\nu_2 = c\nu_1$ с $c \in \mathbb{R}^{>0}$ е еквивалентно на нормирането ν_1, то пръстените $\mathcal{O}_{\nu_1} \equiv \mathcal{O}_{\nu_2}$ на тези нормирания съвпадат, както и максималните им идеали $\mathfrak{M}_{\nu_1} \equiv \mathfrak{M}_{\nu_2}$. Това дава възможност да определим пръстена $\mathcal{O}_{[\nu]}$ на класа (на еквивалентност) на нормиране ν като пръстена $\mathcal{O}_\nu$ на ν. Максималният идеал $\mathfrak{M}_{[\nu]} = \mathfrak{M}_\nu$.
Еквивалентни дискретни нормирания ν_1 и $\nu_2 = c\nu_1$, $c \in \mathbb{R}^{>0}$ имат едни и същи локални параметри, защото от $\nu_1(F^*) = \nu_1(t)\mathbb{Z}$ следва $\nu_2(F^*) = c\nu_1(F^*) = c\nu_1(t)\mathbb{Z} = \nu_2(t)\mathbb{Z}$.

Определение 3.24. *Всеки клас на еквивалентност на дискретно нормиране $\nu : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ съдържа единствен представител ν_o с $\nu_o(F^*) = \mathbb{Z}$, който се нарича нормализиран.*

Задача 3.25. *Да се докаже, че дискретните нормирания ν_1, ν_2, ν_3 от задача 3.33 са две по две нееквивалентни.*

Нека $\nu : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е нормиране на функционално поле F на една променлива, а $r \in (0, 1)$ е произволно реално число от интервала $(0, 1)$. Тогава изображението

$$| \ |_\nu = r^\nu : F \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$x \mapsto |x|_\nu = r^{\nu(x)}$$

изпълнява свойствата:
(i) $|x|_\nu \geq 0$ за $\forall x \in F$ с $|x|_\nu = 0$ тогава и само тогава, когато $x = 0$;
(ii) $|xy|_\nu = |x|_\nu |y|_\nu$ за $\forall x, y \in F$;
(iii) (не-архимедово неравенство на триъгълника:) $|x + y|_\nu \leq \max(|x|_\nu, |y|_\nu)$ за $\forall x, y \in F$.
Ще казваме, че $| \ |_\nu$ е норма, индуцирана от нормирането ν. Да отбележим, че не-архимедовото неравенство на триъгълника $|x + y|_\nu \leq \max(|x|_\nu, |y|_\nu)$ е по-силно от обичайното неравенство на триъгълника $|x + y|_\nu \leq |x|_\nu + |y|_\nu$.
Нормата $| \ |_\nu : F \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ задава метрика

$$\rho_\nu : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$\rho_\nu(x, y) = |x - y|_\nu = r^{\nu(x-y)}$$

върху полето F със свойствата:
(i) $\rho_\nu(x, y) \geq 0$ с равенство $\rho_\nu(x, y) = 0$ тогава и само тогава, когато $x = y$;
(ii) $\rho_\nu(x, y) = \rho_\nu(y, x)$ за $\forall x, y \in F$;
(iii) (не-евклидово неравенство на триъгълника) $\rho_\nu(x, z) \leq \max(\rho_\nu(x, y), \rho_\nu(y, z))$ за $\forall x, y, z \in F$.
Редицата $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset F$ клони към $f \in F$ относно ρ_ν, ако $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_\nu(f_n, f) = 0$. Записваме $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Определение 3.26. *Нормиранията $\nu_1 : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и $\nu_2 : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ задават една и съща топология върху F, ако редица $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset F$ е сходяща относно ρ_{ν_1} тогава и само тогава, когато е сходяща относно ρ_{ν_2}.*

Твърдение 3.27. *Нормиранията $\nu_1 : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и $\nu_2 : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ са еквивалентни тогава и само тогава, когато задават една и съща топология върху F.*

Доказателство: Ако нормирането $\nu_2 = c\nu_1$ е еквивалентно на нормирането ν_1, $c \in \mathbb{R}^{>0}$, то

$$\rho_{\nu_2}(x, y) = r^{\nu_2(x-y)} = \left[r^{\nu_1(x-y)} \right]^c = \rho_{\nu_1}(x, y)^c.$$

Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{\nu_2}(f_n, f) = \lim\limits_{n\to\infty} [\rho_{\nu_1}(f_n, f)]^c = 0$ тогава и само тогава, когато $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{\nu_1}(f_n, f) = 0$. Това доказва, че еквивалентни нормирания индуцират една и съща топология върху F.
Да предположим, че нормиранията $\nu_1 : F \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ и $\nu_2 : F \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ задават една и съща топология върху F. Точка $x \in F$ принадлежи на единичното кълбо $\mathbb{B}_{\nu_1} = \{x \in F \ \mid \ |x|_{\nu_1} < 1\}$ тогава и само тогава, когато редицата $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ клони към 0 спрямо ν_1. По-точно, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{\nu_1}(x^n, 0) = \lim\limits_{n\to\infty} |x^n|_{\nu_1} = \lim\limits_{n\to\infty} |x|_{\nu_1}^n = 0$ е еквивалентно на $|x|_{\nu_1} < 1$. Следователно отворените единични кълба $\mathbb{B}_{\nu_1} \equiv \mathbb{B}_{\nu_2}$ съвпадат. Нека $\overline{\mathbb{B}_{\nu_1}} = \{x \in F \ \mid \ |x|_{\nu_1} \leq 1\}$ е затвореното единично кълбо в F с център 0. Допълнението $F \setminus \overline{\mathbb{B}_{\nu_1}} = \{x \in F \ \mid \ |x|_{\nu_2} > 1\}$ се състои от онези $x \in F$, за които редицата $\left\{\frac{1}{x}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ клони към 0. Наистина, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{\nu_1}\left(\frac{1}{x^n}, 0\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{x^n}\right|_{\nu_1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{|x|_{\nu_1}^n} = 0$ е в сила точно когато $|x|_{\nu_1} > 1$. Оттук следва съвпадението $F \setminus \overline{\mathbb{B}_{\nu_1}} \equiv F \setminus \overline{\mathbb{B}_{\nu_2}}$ на допълненията на затворените кълба и съвпадението $\overline{\mathbb{B}_{\nu_1}} \equiv \overline{\mathbb{B}_{\nu_1}}$ на затворените кълба. Вземайки предвид, че пръстените на нормиране

$$\mathcal{O}_{\nu_j} = \{x \in F \ \mid \ \nu_j(x) \geq 0\} = \overline{\mathbb{B}_{\nu_j}}$$

са затворените кълба, а максималните им идеали

$$\mathfrak{M}_{\nu_j} = \{x \in F \ \mid \ \nu_j(x) > 0\} = \mathbb{B}_{\nu_j}$$

са отворените кълба, стигаме до извода, че $\mathcal{O}_{\nu_1} \equiv \mathcal{O}_{\nu_2}$ и $\mathfrak{M}_{\nu_1} \equiv \mathfrak{M}_{\nu_2}$. Всъщност, $\mathfrak{M}_{\nu_1} \equiv \mathfrak{M}_{\nu_2}$ е директно следствие от $\mathcal{O}_{\nu_1} \equiv \mathcal{O}_{\nu_2}$ съгласно локалността на пръстените $\mathcal{O}_{\nu_j}$. Терминът пръстен произхожда от пръстените на нормиране $\mathcal{O}_{\nu}$ на F, които се отъждестяват със затворените кълба в F.
Избираме произволно $x_o \in \mathfrak{M}_{\nu_1} \equiv \mathfrak{M}_{\nu_2}$. Тогава $\nu_1(x_o) > 0$, $\nu_2(x_o) > 0$ и

$$c := \frac{\nu_2(x_o)}{\nu_1(x_o)} \in \mathbb{R}^{>0}$$

е положително реално число. Трябва да докажем, че

$$\frac{\nu_2(x)}{\nu_1(x)} = c \quad \text{за} \quad \forall x \in F \quad \text{с} \quad \nu_1(x) \neq 0,$$

за да получим, че нормирането $\nu_2 = c\nu_1$ е еквивалентно на ν_1. Тук използваме, че $\nu_1(x) = 0$ точно когато $|x|_{\nu_1} = 1$ и $x \in \partial\mathbb{B}_{\nu_1} = \overline{\mathbb{B}_{\nu_1}} \setminus \mathbb{B}_{\nu_1}$ е от границата на затвореното кълбо $\overline{\mathbb{B}_{\nu_1}}$. От $\overline{\mathbb{B}_{\nu_1}} \equiv \overline{\mathbb{B}_{\nu_2}}$ и $\mathbb{B}_{\nu_1} \equiv \mathbb{B}_{\nu_1}$ следва $\partial\mathbb{B}_{\nu_1} \equiv \partial\mathbb{B}_{\nu_2}$. Следователно $\nu_1(x) = 0$ тогава и само тогава, когато $\nu_2(x) = 0$, така че равенството $\nu_2(x) = c\nu_1(x)$ е изпълнено и при $\nu_1(x) = 0$.
Разглеждаме

$$\frac{\nu_1(x)}{\nu_1(x_o)} \in \mathbb{R},$$

и избираме редици $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{Z}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ с

$$\forall \frac{a_n}{b_n} > \frac{\nu_1(x)}{\nu_1(x_o)} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\nu_1(x)}{\nu_1(x_o)}.$$

Тогава $a_n \nu_1(x_o) > b_n \nu_1(x)$, откъдето $\nu_1(x_o^{a_n}) > \nu_1(x^{b_n})$ и $\nu_1\left(\frac{x_o^{a_n}}{x^{b_n}}\right) > 0$. В резултат, $\frac{x_o^{a_n}}{x^{b_n}} \in \mathfrak{M}_{\nu_1} \equiv \mathfrak{M}_{\nu_2}$ и $\nu_2\left(\frac{x_o^{a_n}}{x^{b_n}}\right) > 0$, $a_n \nu_2(x_o) > b_n \nu_2(x)$,

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{\nu_2(x)}{\nu_2(x_o)}.$$

Аналогично, нека редиците $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{Z}$, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ изпълняват условията

$$\forall \frac{c_n}{d_n} < \frac{\nu_1(x)}{\nu_1(x_o)} \text{ и } \quad \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = \frac{\nu_1(x)}{\nu_1(x_o)}.$$

Тогава $c_n \nu_1(x_o) < d_n \nu_1(x)$, откъдето $\nu_1\left(\frac{x^{d_n}}{x_o^{c_n}}\right) > 0$, което е равносилно на $\frac{x^{d_n}}{x_o^{c_n}} \in \mathfrak{M}_{\nu_1} \equiv \mathfrak{M}_{\nu_2}$. В резултат, $\nu_2\left(\frac{x^{d_n}}{x_o^{c_n}}\right) > 0$ и

$$\frac{c_n}{d_n} < \frac{\nu_2(x)}{\nu_2(x_o)}.$$

След граничен преход $n \to \infty$ върху неравенствата

$$\frac{c_n}{d_n}\nu_2(x_o) < \nu_2(x) < \frac{a_n}{b_n}\nu_2(x_o)$$

имаме $\frac{\nu_2(x)}{\nu_2(x_o)} = \frac{\nu_1(x)}{\nu_1(x_o)}$. Следователно $\frac{\nu_2(x)}{\nu_1(x)} = \frac{\nu_2(x_o)}{\nu_1(x_o)} = c \in \mathbb{R}^{>0}$ и нормирането $\nu_2 = c\nu_1$ е еквивалентно на нормирането ν_1, Q.E.D.

5. Автоморфизми и нормирания на функционално поле на една променлива

Следващата лема изследва взаимодействието между автоморфизми и нормирания на функционално поле F на една променлива.

Лема 3.28. *Нека $F \supset k$ е функционално поле на една променлива, $\varphi \in Gal(F/k)$, а $\nu : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е нормиране на F с пръстен $\mathcal{O}_\nu = \{x \in F \mid \nu(x) \geq 0\}$. Тогава композицията $\nu\varphi : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е нормиране на F с пръстен $\mathcal{O}_{\nu\varphi} = \varphi^{-1}\mathcal{O}_\nu$. Ако ν е дискретно нормиране с локален параметър t, то $\nu\varphi$ е дискретно нормиране с локален параметър $\varphi^{-1}(t)$.*

Доказателство: Да отбележим, че $\nu\varphi(z) = \infty$ точно когато $\varphi(z) = 0$, което е еквивалентно на $z = 0$ за изоморфизма на пръстени $\varphi : F \to F$. Освен това, $\nu\varphi(F^*) = \nu(F^*) \neq \{0\}$. Непосредствено се проверява, че $\nu\varphi(k^*) = \nu(k^*) = 0$. За произволни $x, y \in F$ имаме

$$\nu\varphi(xy) = \nu(\varphi(x)\varphi(y)) = \nu\varphi(x) + \nu\varphi(y) \quad \text{и}$$
$$\nu\varphi(x+y) = \nu(\varphi(x) + \varphi(y)) \geq \min(\nu\varphi(x), \nu\varphi(y)).$$

Следователно $\nu\varphi : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ изпълнява условията (i) - (v) от Определение 3.9 и е нормиране на F. Въз основа на взаимната еднозначност на $\varphi : F \to F$, пръстенът

$$\mathcal{O}_{\nu\varphi} = \{x \in F \mid \nu\varphi(x) \geq 0\} = \{\varphi^{-1}(y) \mid y \in F, \ \nu(y) \geq 0\} = \varphi^{-1}\mathcal{O}_\nu$$

на нормирането $\nu\varphi$ е праобразът $\varphi^{-1}\mathcal{O}_\nu$ на $\mathcal{O}_\nu$ под действие на φ.
Ако $\nu : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е дискретно нормиране с локален параметър t, то пръстенът

$$\mathcal{O}_\nu = \{ut^m \mid u \in \mathcal{O}_\nu^*, \ m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\} \cup \{0\}.$$

Да напомним, че мултипликативната група

$$\mathcal{O}_\nu^* = \{x \in F \mid \nu(x) = 0\}.$$

Следователно $u \in \mathcal{O}_\nu^*$ тогава и само тогава, когато $\varphi^{-1}(u) \in \mathcal{O}_{\nu\varphi}^*$. В резултат,

$$\mathcal{O}_{\nu\varphi} = \varphi^{-1}\mathcal{O}_\nu = \{\varphi^{-1}(u)\varphi^{-1}(t)^m \mid u \in \mathcal{O}_\nu^*, \ m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\} \cup \{0\}.$$

Ако $\varphi^{-1}(t) = t_1 t_2$ се разлага в произведение на $t_1, t_2 \in \mathcal{O}_{\nu\varphi} \setminus \mathcal{O}^*_{\nu\varphi} = \varphi^{-1}(\mathcal{O}_\nu) \setminus \varphi^{-1}(\mathcal{O}^*_\nu)$, то $t = \varphi(t_1)\varphi(t_2)$ с $\varphi(t_1), \varphi(t_2) \in \mathcal{O}_\nu \setminus \mathcal{O}^*_\nu$ противоречи на неразложимостта на $t \in \mathcal{O}_\nu$ и доказва ,че $\varphi^{-1}(t)$ е локален параметър на $\mathcal{O}_\nu$,Q.E.D.

6. Нормиранията на чисто трансцендентното разширение $k(x)$ на k

Пример 3.29. *Нека $F = k(x)$ е чисто трансцендентно разширение на поле k чрез елемент x. Произволен неразложим над k полином $p(x) \in k[x]$ определя дискретно нормиране*

$$\nu_p : k(x) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$
$$\nu_p \left(p(x)^m \frac{f(x)}{g(x)} \right) := m$$

за полиноми $f(x), g(x) \in k[x] \setminus \{0\}$, взаимно прости с $p(x)$ и $\nu_p(0) = \infty$. Полиномът $p(x)$ е локален параметър на дискретното нормиране ν_p.
Изображението

$$\nu_\infty : k(x) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$
$$\nu_\infty \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \deg(g) - \deg(f) \quad \text{за} \quad \forall f(x), g(x) \in k[x], \quad g(x) \not\equiv 0$$

е дискретно нормиране на $k(x)$, отговарящо на безкрайната точка. Рационалната функция $\frac{1}{x} \in k(x)$ е локален параметър на ν_∞.

Да напомним, че всеки полином $f(x) \in k[x] \setminus k$ с коефицинети от поле k се разлага в произведение $f(x) = p_1(x)^{m_1} \dots p_k(x)^{m_k}$ от неразложими над k множители $p_i(x) \in k[x]$, които са определени с точност до мултипликативна константа от k^*. Следователно всяка рационална функция $\frac{f(x)}{g(x)} \in k(x)$ с $f(x), g(x) \in k[x]$, $g(x) \not\equiv 0$ се представя като произведение $p_1(x)^{a_1} \dots p_k(x)^{a_k}$ на цели степени $a_i \in \mathbb{Z}$ на неразложими над k полиноми $p_i(x) \in k[x]$, определени с точност до мултипликативна константа от k^*. Множеството

$$R_p = \left\{ p(x)^m \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \quad f(x), g(x) \in k[x] \text{ взаимно прости с } p(x) \right\} \cup \{0\}$$

е подпръстен на $k(x)$, защото

$$p(x)^{m_1} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} - p(x)^{m_2} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{p(x)^{m_1} f_1(x) g_2(x) - p(x)^{m_2} g_1(x) f(x)}{g_1(x) g_2(x)} \quad \text{и}$$
$$\left[p(x)^{m_1} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \right] \left[p(x)^{m_2} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \right] = \frac{p(x)^{m_1+m_2} f_1(x) f_2(x)}{g_1(x) g_2(x)}$$

със знаменатели $g_1(x) g_2(x) \in k[x]$, които не се делят на $p(x)$. От определението на R_p следва, че R_p е пръстен на дискретно нормиране с локален параметър $p(x) \in k[x]$. За целта е достатъчно да проверим, че $p(x)$ е неразложим елемент на R_p. Наистина, ако

$$p(x) = \left[p(x)^m \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \right] \left[p(x)^n \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \right]$$

за $m \geq n \geq 0$ и взаимно прости с $p(x)$ полиноми $f_i(x), g_i(x) \in k[x]$, то $m = 1$, $n = 0$ и $p(x)^n \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \in R^*_p$. Пръстенът R_p съдържа полето от константи k и има поле от частни $k(x)$.
Изображението

$$\varphi : k(x) \longrightarrow k(x),$$
$$\varphi \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \text{за} \quad \forall f(x), g(x) \in k[x], \quad g(x) \not\equiv 0,$$

което съпоставя на x реципрочния елемент $\frac{1}{x} \in k(x)$ е автоморфизъм на $k(x)$, действащ тъждествено върху k, защото заместването $x \mapsto \frac{1}{x}$ комутира със събирането, умножението и делението на полиноми. От $\varphi^2 = \mathrm{Id}_{k(x)}$ следва, че φ е обратим и $\varphi^{-1} = \varphi$. Съгласно Лема 3.28, композицията $\nu_\infty = \nu_x \varphi : k(x) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е дискретно нормиране на $k(x)$ с локален параметър $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{x}$. В явен вид,

$$\nu_x \varphi \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \nu_x \varphi \left(\frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} \right) = \nu_x \left(\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x}^n}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x}^m} \right) =$$

$$= \nu_x \left(\frac{x^m (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)}{x^n (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_m)} \right) = m - n,$$

съгласно $LC(f) = a_n \geq 0$ и $LC(g) = b_m$ за старшите коефициенти на $f(x), g(x) k[x]$. За различни неразложими над k полиноми $p(x), q(x) \in k[x]$, нормиранията ν_p, ν_q, ν_∞ са две по две нееквивалентни, защото

$$\nu_p(p(x)) = 1 > 0, \quad \nu_q(p(x)) = 0, \quad \nu_\infty(p(x)) = -\deg(p(x)) < 0.$$

Теорема 5. *Всяко нормиране на чисто трансцендентно разширение $k(x) \supset k$ е еквивалентно на нормиране ν_p, отговарящо на неразложим над k полином $p(x) \in k[x]$ или на нормирането ν_∞.*
В частност, всички нормирания на $k(x)$ са дискретни.

Доказателство: Нека $\nu : k(x) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е нормиране на чисто трансцендентното разширение $k(x)$ на k с x.
Ако $\nu(x) \geq 0$, то $k[x] \subseteq \mathcal{O}_\nu$, защото $x \in \mathcal{O}_\nu$ и $k \subset \mathcal{O}_{nu}$ за пръстена $\mathcal{O}_\nu$ на нормирането ν. Твърдим, че $J := \mathfrak{M}_\nu \cap k[x]$ е собствен прост идеал на $k[x]$. По-точно, допускането $J = k[x]$ води до $1_k \in J \subset \mathfrak{M}_\nu$, което противоречи на $\nu(1_k) = 0$. Фактор-пръстенът

$$k[x]/J = k[x]/(k[x] \cap \mathfrak{M}_\nu) \simeq (k[x] + \mathfrak{M}_\nu)/\mathfrak{M}_\nu$$

няма делители на нулата, защото е подпръстен на полето $\mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu$. С други думи, $J \triangleleft k[x]$ е прост идеал в $k[x]$. Всеки идеал в $k[x]$ е главен, така че съществува полином $p(x) \in k[x]$, пораждащ $J = \langle p(x) \rangle$. Съгласно простотата на идеала J, полиномът $p(x)$ е неразложим над k. Ако $f(x) \in k[x]$ не се дели на $p(x)$, то $f(x) \notin \langle p(x) \rangle = J = k[x] \cap \mathfrak{M}_\nu$, откъдето $f(x) \notin \mathfrak{M}_\nu$ и $\nu(f(x)) = 0$ съгласно $f(x) \in k[x] \subseteq \mathcal{O}_\nu$. Представяме произволна рационална функция във вида $\rho(x) = p(x)^m \frac{f(x)}{g(x)}$ чрез полиноми $f(x), g(x) \in k[x]$, неделящи се на $p(x)$. В резултат, $\nu(\rho(x)) = m\nu(p(x))$. От друга страна, дискретното нормиране $\nu_p : k[x] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, отговарящо на неразложимия над k полином $p(x) \in k[x]$ има стойност $\nu_p(\rho(x)) = m$, така че нормирането $\nu = \nu(p(x))\nu_p$ е еквивалентно на ν_p в качеството си на пропорционално с константа $\nu(p(x)) > 0$.
Ако $\nu(x) < 0$, то $\nu(x^{-1}) > 0$. Композирайки с автоморфизма

$$\varphi : k(x) \longrightarrow k(x),$$

$$\varphi \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \text{за} \quad f(x), g(x) \in k[x], \quad g(x) \not\equiv 0,$$

получаваме нормиране $\nu\varphi : k(x) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ с $\nu\varphi(x) = \nu(x^{-1}) > 0$. Съгласно направените разглеждания, съществува неразложим над k полином $p(x) \in k[x]$, така че $c = \nu(p(x)) > 0$ и $\nu\varphi = c\nu_p$. От $c\nu_p(x) = \nu\varphi(x) > 0$ следва, че $p(x)$ дели x. Следователно $p(x) = x$ и $\nu = \nu\varphi^2 = (\nu\varphi)\varphi = c\nu_x\varphi = c\nu_\infty$, Q.E.D.

Определение 3.30. *Нека $\nu : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е нормиране на функционално поле на една променлива,*

$$\mathcal{O}_\nu = \{x \in F \mid \nu(x) \geq 0\}$$

е пръстенът на ν*, а*

$$\mathfrak{M}_\nu = \{x \in F \quad | \quad \nu(x) > 0\}$$

е максималният идеал на $\mathcal{O}_\nu$*. Фактор-пръстенът* $\mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu$ *се нарича поле от остатъци на* ν*.*

Ако ν_1 и $\nu_2 = c\nu_1$ с $c \in \mathbb{R}^{>0}$ са еквивалентни нормирания на F, то $\mathcal{O}_{\nu_1} \equiv \mathcal{O}_{\nu_2}$, $\mathfrak{M}_{\nu_1} = \mathfrak{M}_{\nu_2}$, откъдето $\mathcal{O}_{\nu_1}/\mathfrak{M}_{\nu_1} \equiv \mathcal{O}_{\nu_2}/\mathfrak{M}_{\nu_2}$.
Следващото твърдение описва полетата от остатъци на всички нормирания на $k(x)$.

Твърдение 3.31. *Нека* $k(x) \supset k$ *е чисто трансцендентно разширение от степен 1. Полето от остатъци на нормирането* ν_p*, отговарящо на неразложим над* k *полином* $p(x) \in k[x]$ *е*

$$\mathcal{O}_{\nu_p}/\mathfrak{M}_{\nu_p} \simeq k[x]/\langle p(x)\rangle.$$

Полето от остатъци на нормирането ν_∞*, съответстващо на безкрайната точка* ∞ *е*

$$\mathcal{O}_{\nu_\infty}/\mathfrak{M}_{\nu_\infty} \simeq k.$$

Доказателсто: Да напомним, че пръстенът

$$\mathcal{O}_{\nu_p} = \left\{ p(x)^m \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, \quad f(x), g(x) \in k[x] \quad \text{взаимно прости с} \quad p(x) \right\}.$$

За произволен корен α на $p(x)$ в подходящо разширение на k, разглеждаме остойностяващото изображение

$$\mathcal{E}_\alpha : \mathcal{O}_{\nu_p} \longrightarrow k(\alpha) = k[\alpha],$$

$$\mathcal{E}_\alpha \left(p(x)^m \frac{f(x)}{g(x)} \right) = p(\alpha)^m \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{за } m \in \mathbb{N}; \\ \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} & \text{за } m = 0. \end{cases}$$

Непосредствено се проверява, че $\mathcal{E}_\alpha$ е хомоморфизъм на пръстени с ядро $\ker(\mathcal{E}_\alpha) = \mathfrak{M}_{\nu_p}$ и образ $\mathrm{im}(\mathcal{E}_\alpha) = k(\alpha)$. По теоремата за хомоморфизмите на пръстени, полето от остатъци

$$\mathcal{O}_{\nu_p}/\mathfrak{M}_{\nu_p} \simeq k(\alpha) = k[\alpha].$$

От друга страна, остойностяващото изображение

$$\mathcal{E}'_\alpha : k[x] \longrightarrow k[\alpha] = k(\alpha),$$

$$\mathcal{E}'_\alpha(h(x)) = h(\alpha)$$

върху полиномите на x с коефициенти от k е хомоморфизъм на пръстени с ядро $\ker(\mathcal{E}'_\alpha) = I(\alpha) = \langle p(x)\rangle$ и образ $\mathrm{im}(\mathcal{E}'_\alpha) = k[\alpha] = k(\alpha)$, защото неразложимият над k полином $p(x) \in k[x]$ е минималният полином на корена α на $p(x)$ (виж Твърдение 1.13(i)). Следователно

$$k[x]/\langle p(x)\rangle \simeq k[\alpha] = k(\alpha) \quad \text{и}$$

$$k[x]/\langle p(x)\rangle \simeq \mathcal{O}_{\nu_p}/\mathfrak{M}_{\nu_p}.$$

Нека $\varphi \in Gal(k(x)/k)$ с $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Съгласно Лема 3.28, пръстенът $\mathcal{O}_{\nu_\infty} = \mathcal{O}_{\nu_x\varphi} = \varphi^{-1}\mathcal{O}_{\nu_x}$. Максималният идеал на $\mathcal{O}_{\nu_\infty}$ е $\mathfrak{M}_{\nu_\infty} = \mathfrak{M}_{\nu_x\varphi} = \varphi^{-1}\mathfrak{M}_{\nu_x}$. В резултат, полето от остатъци

$$\mathcal{O}_{\nu_\infty}/\mathfrak{M}_{\nu_\infty} = \varphi^{-1}\left(\mathcal{O}_{\nu_x}/\mathfrak{M}_{\nu_x}\right) \simeq \mathcal{O}_{\nu_x}/\mathfrak{M}_{\nu_x} \simeq k[x]/\langle x\rangle \simeq k,$$

Q.E.D.

7. Дискретност на нормиранията на функционално поле на една променлива

Теорема 6. *Всяко нормиране ν на функционално поле F на една променлива е дискретно.*

Доказателство: Нека $x \in F$ е трансцендентен над k елемент, така че разширението $F \supseteq k(x)$ е от крайна степен. За ограничението $\xi := \nu|_{k(x)}$ на ν върху чисто трансцендентното разширение $k(x) \supset k$ твърдим, че

$$[\nu(F^*) : \xi(k(x)^*)] \leq [F : k(x)] < \infty. \tag{3.1}$$

Тогава $\xi(k(x)^*) \neq \{0\}$ и ξ е нормиране на $k(x)$. Тук използваме, че подгрупата $(\nu(F^*), +)$ на $(\mathbb{R}, +)$ е безкрайна, защото за произволно $y \in F^*$ с $\nu(y) \neq 0$ и произволни $n \in \mathbb{N}$ имаме безбройно много различни реални числа $n\nu(y) \in \nu(F^*)$. Съгласно Теорема 5, нормирането $\xi : k(x) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е дискретно и $\xi(k(x)^*) = c\mathbb{Z}$ за някое $c \in \mathbb{R}^{>0}$. Ако $[\nu(F^*) : \xi(k(x)^*)] = n$, то $n\nu(F^*) \subseteq \xi(k(x)^*) \subseteq \nu(F^*)$ и

$$c\mathbb{Z} = \xi(k(x)^*) \subseteq \nu(F^*) \subseteq \frac{1}{n}\xi(k(x)^*) = \frac{c}{n}\mathbb{Z}.$$

Фактор-групата $\left(\frac{c}{n}\mathbb{Z}, +\right)/(c\mathbb{Z}, +) = \{c\mathbb{Z}, \frac{c}{n} + c\mathbb{Z}, \ldots, \frac{c}{n}(n-1) + c\mathbb{Z}\}$ е от ред n, така че от $[\nu(F^*) : c\mathbb{Z}] = \left[\frac{c}{n}\mathbb{Z} : c\mathbb{Z}\right]$ и $c\mathbb{Z} \subseteq \nu(F^*) \subseteq \frac{c}{n}\mathbb{Z}$ следва $\nu(F^*) = \frac{c}{n}\mathbb{Z}$ и нормирането $\nu : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е дискретно.
Оценката (3.1) следва от това, че произволни представители $\nu(z_1), \ldots, \nu(z_m)$ на различни съседни класове на $(\nu(F^*), +)$ относно $(\xi(k(x)^*, +)$ са образи на линейно независими над $k(x)$ елементи $z_1, \ldots z_m$. При допускане на противното, нека

$$\sum_{i=1}^{l} c_i z_i = 0 \quad \text{с} \quad c_i \in k(x)^*$$

за някое естествено $l \leq m$ и подходяща пермутация на $z_1, \ldots, z_m$. За произволни различни i и j твърдим, че $\nu(c_i z_i) \neq \nu(c_j z_j)$. В противен случай, от $\nu(c_i) + \nu(z_i) = \nu(c_j) + \nu(z_j)$ получаваме $\nu(z_i) - \nu(z_j) = \nu(c_j) - \nu(c_i) \in \xi(k(x)^*)$, противно на предположението $\nu(z_i) + \xi(k(x)^*) \neq \nu(z_j) + \xi(k(x)^*)$. Но за различни $\nu(c_i z_i)$, $1 \leq i \leq l$, неравенството на триъгълника с равенство дава

$$\infty = \nu(0) = \nu\left(\sum_{i=1}^{l} c_i z_i\right) = \min(\xi(c_i) + \nu(z_i) \ \mid \ 1 \leq i \leq l) \neq \infty,$$

съгласно $c_i \neq 0$, $z_i \neq 0$. Противоречието доказва линейната независимост на $z_1, \ldots z_m$ над $k(x)$ и (3.1), Q.E.D.

Задача 3.32. *Нека $\mathbb{F}_3[x, y]$ е пръстенът на полиномите на две трансцендентни над $\mathbb{F}_3$ променливи x, y, $I = (y^2 - x^3 + x)\mathbb{F}_3[x, y]$ е главният идеал на $\mathbb{F}_3[x, y]$, породен от $y^2 - x^3 + x \in \mathbb{F}_3[x, y]$, а $D = \mathbb{F}_3[x, y]/I$ е областта на цялост с поле от частни $F(D) = F_1 = F_0[y]/(y^2 - x^3 + x)F_0[y]$, където $F_0 = \mathbb{F}_3(x)$ е чисто трансцендентно разширение на $\mathbb{F}_3$. Тогава всяко нормализирано дискретно нормиране $\nu : F_1 \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ се ограничава до дискретно нормиране $\nu : F_0 = \mathbb{F}_3(x) \to d\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ с $\nu|_{\mathbb{F}_3(x)} = d\nu_{p(x)}$ или $d\nu_\infty$ за някое $d \in \mathbb{N}$ и неразложим над $\mathbb{F}_3$ полином $p(x) \in \mathbb{F}_3[x]$. Да се докаже, че:*
(i) ако $\nu|_{\mathbb{F}_3(x)} = d\nu_{p(x)}$ за неразложим над $\mathbb{F}_3$ полином $p(x) \in \mathbb{F}_3[x]$, различен от x, $x - 1$ и $x + 1$, то $p(x)$ е локален параметър на ν;
(ii) ако $p(x) = x$, $x - 1$ или $x + 1$, то $\nu(\mathbb{F}_3(x)^*)$ се състои от четни цели числа.

Упътване: (i) Ако $\nu|_{\mathbb{F}_3(x)} = d\nu_{p(x)}$ за неразложим над $\mathbb{F}_3$ полином $p(x)$, различен от x, $x-1$ и $x+1$, то $p(x)$ и x^3-x са взаимно прости и

$$2\nu(y) = \nu(y^2) = \nu(x^3-x) = 0.$$

Оттук $\nu(y) = 0$ или $y \in \mathcal{O}_{nu}^*$ и $\mathbb{Z} = \nu(F_1^*) = \nu(F_0^*)$. Следователно $d = 1$ и $p(x)$ е локален параметър на $\nu(x)$.
(ii) За $p(x) = x$, $x-1$ или $x+1$ имаме

$$\nu_{p(x)}(x^3-x) = \nu_{p(x)}(x) + \nu_{p(x)}(x-1) + \nu_{p(x)}(x+1) = \nu_{p(x)}p(x) = 1.$$

Следователно

$$2\nu(y) = \nu(y^2) = \nu(x^3-x) = d\nu_{p(x)}(x^3-x) = d$$

с $\nu(y) \in \nu(F_1^*) = \mathbb{Z}$. В резултат, d е четно естествено число и $\nu(\mathbb{F}_3(x)^*)$ се състои от четни числа.

Задача 3.33. *В означенията от Задача 3.32 нека*

$$z_1 = x^2 + x, \quad z_2 = y, \quad z_3 = \frac{1}{x-2} + xy \in F_1,$$

а ν_1, ν_2, ν_3 са дискретни нормирания на F_1 с локални параметри

$$t_1 = x - 2 \quad \text{и } t_3 = x^2 + 1.$$

Да се намерят $\nu_i(z_j)$ за всички $1 \leq i, j \leq 3$. Съществува ли дискретно нормиране на F_1 с локален параметър x^2-1?

Упътване: Ако t е локален параметър на дискретно нормиране ν на функционално поле F на една променлива и $z \in F$, то $\nu(z) = m$ точно когато $\frac{z}{t^m} \in F$ има крайна ненулева стойност $\frac{z}{t^m}|_{t=0} \neq 0, \infty$ за $t = 0$.

Теорема 7. *Ако ν е дискретно нормиране на функционално поле F на една променлива, то полето на остатъците $\mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu$ е крайно разширение на k.*

Доказателство: Нека $x \in F$ е трансцендентен над k елемент с $[F : k(x)] < \infty$, а $\xi = \nu|_{k(x)}$ е ограничението на ν върху $k(x)$. По определение, $\mathcal{O}_\xi$ е подпърстен на $\mathcal{O}_\nu$. Хомоморфизмът на пръстени $\varphi : \mathcal{O}_\xi \to \mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu$, $\varphi(y) = y + \mathfrak{M}_\nu$ има ядро $\ker\varphi = \mathcal{O}_\xi \cap \mathfrak{M}_\nu$, което съдържа максималния идеал $\mathfrak{M}_\xi$ на $\mathcal{O}_\xi$. Следователно φ се пропуска през естествения епиморфизъм $\pi : \mathcal{O}_\xi \to \mathcal{O}_\xi/\mathfrak{M}_\xi$ и съществува комутативна диаграма от хомоморфизми на пръстени

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_\xi \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu \\
\mathcal{O}_\xi/\mathfrak{M}_\xi \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}.$$

Хомоморфизмът ψ на полето от остатъци $\mathcal{O}_\xi/\mathfrak{M}_\xi$ на ξ в полето от остатъци $\mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu$ на ν е влагане, т.е. има $\ker\psi = 0$, защото действа тъждествено върху подполето k на $\mathcal{O}_\xi/\mathfrak{M}_\xi$ и на $\mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu$. Достатъчно е да проверим, че

$$[\mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu : \mathcal{O}_\xi/\mathfrak{M}_\xi] \leq [F : k(x)] < \infty, \tag{3.2}$$

защото $\mathcal{O}_\xi/\mathfrak{M}_\xi \supset k$ е крайно разширение съгласно Твърдение 3.31. За установяване на верността на (3.2) ще докажем, че ако $z_1 + \mathfrak{M}_\nu, \ldots, z_m + \mathfrak{M}_\nu$ са линейно независими над полето от остатъци $\mathcal{O}_\xi/\mathfrak{M}_\xi$ на ξ, то $z_1, \ldots z_m \in F$ са линейно независими над $k(x)$. Да допуснем противното, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} c_i z_i = 0 \quad \text{с} \quad c_i \in k(x)^*. \tag{3.3}$$

След евентуална пермутация на $c_1, \ldots, c_m$ имаме

$$\xi(c_1) = \min(\xi(c_j) \ \mid \ 1 \leq j \leq m).$$

Умножаваме почленно (3.3) с $c_1^{-1} \in k(x)$ и получаваме

$$z_1 + \sum_{i=2}^{m} (c_i c_1^{-1}) z_i = 0.$$

По модул $\mathfrak{M}_\nu$ имаме

$$(z_1 + \mathfrak{M}_\nu) + \sum_{i=2}^{m} (c_i c_1^{-1} + \mathfrak{M}_\xi)(z_i + \mathfrak{M}_\nu) = 0.$$

От $\xi(c_i c_1^{-1}) = \xi(c_i) - \xi(c_1) \geq 0$ следва $c_i c_1^{-1} \in \mathcal{O}_\xi$, така че $c_i c_1^{-1} + \mathfrak{M}_\xi \in \mathcal{O}_\xi/\mathfrak{M}_\xi$ и $z_1 + \mathfrak{M}_\nu, \ldots, z_m + \mathfrak{M}_\nu$ са линейно зависими над $\mathcal{O}_\xi/\mathfrak{M}_\xi$. Противоречието доказва (3.2), Q.E.D.

Определение 3.34. *Степента $[\mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu : k] = n$ се нарича степен на нормирането ν или на класа (на еквивалентност) на ν.*

Класовете дискретни нормирания от степен 1 се наричат рационални.

Пример 3.35. *Ако $k(x)$ е чисто трансцендентно разширение на k, а $p(x) \in k[x] \setminus k$ е неразложим над k полином, то*

$$\deg(\nu_p) = \left[\mathcal{O}_{\nu_p}/\mathfrak{M}_{\nu_p} : k\right] = [k[x]/\langle p(x)\rangle : k] = \deg(p(x)).$$

Нормирането ν_∞, отговарящо на безкрайната точка ∞ е рационално, защото $\deg(\nu_\infty) = [k : k] = 1$. Рационалните нормирания на $k(x)$ са ν_∞ и ν_{x-a} за $\forall a \in k$.

Ако $k = \mathbb{F}_q$ е поле с q елемента, то чисто трансцендентното разширение $\mathbb{F}_q(x)$ на $\mathbb{F}_q$ има $q+1$ рационални класа от дискретни нормирания.

Задача 3.36. *Нека $F_0 = \mathbb{F}_3(x)$ е чисто трансцендентно разширение на $\mathbb{F}_3$ от степен 1, $F_1 = F_0(\overline{y}) = F_0[\overline{y}] = F_0[y]/\langle y^2 - x^3 + x\rangle \supset F_0$ е разширението на F_0 чрез корен $\overline{y}$ на полинома $y^2 - x^3 + x \in F_0[y]$. Да се намерят полетата от остатъци $\mathcal{O}_{\nu_j}/\mathfrak{M}_{\nu_j}$ на дискретните нормирания ν_j с локални параметри $t_1 = x - 2$, $t_2 = x^2 + 1$, както и степените $\left[\mathcal{O}_{\nu_j}/\mathfrak{M}_{\nu_j} : \mathbb{F}_3\right]$ на ν_j.*

8. Апроксимационна теорема

Лема 3.37. (Нестрога отделимост на два класа дискретни нормирания:) *Нека F е функционално поле на една променлива с поле от константи k, а ν_1 и ν_2 са нееквивалентни дискретни нормирания на F. Тогава съществува елемент $w \in F$ с $\nu_1(w) > 0$ и $\nu_2(w) \leq 0$.*

Доказателство: Без ограничение на общността, ν_1 и ν_2 са нормализирани дискретни нормирания, $\nu_1(F^*) = \nu_2(F^*) = \mathbb{Z}$.
Избираме $u \in F$ с $\nu_2(u) = 0$. Ако $\nu_1(u) \neq 0$, то $\nu_1(u) > 0$ или $\nu_1(u^{-1}) > 0$ и $w = u$, съответно, $w = u^{-1}$ изпълняват условията на лемата.
Оттук нататък ще предполагаме, че ако $\nu_2(u) = 0$, то $\nu_1(u) = 0$ за $\forall u \in F$. Ако t е локален параметър на ν_2, то за $\forall z \in F^*$ с $\nu_2(z) = m$ имаме елемент $u = zt^{-m}$ с $\nu_2(u) = 0$. Тогава $0 = \nu_1(zt^{-m}) = \nu_1(z) - m\nu_1(t)$ или $\nu_1(z) = m\nu_1(t) = \nu_2(z)\nu_1(t)$. Ако $\nu_1(t) = 0$, то $\nu_1(z) = 0$ за $\forall z \in F^*$, противно на предположението $\nu_1(F^*) \neq \{0\}$ от определението за нормиране ν_1. Ако $c = \nu_1(t) > 0$, то нормиранията $\nu_1 = c\nu_2$ и ν_2 са еквивалентни, противно на допускането. Следователно $\nu_1(t) < 0$ и $w = t^{-1}$ изпълнява условията $\nu_1(w) > 0$, $\nu_2(w) = -1 < 0$, Q.E.D.

Следствие 3.38. (Строга отделимост на две нормирания:) *Нека F е функционално поле на една променлива с поле от константи k, а ν_1 и ν_2 са нееквивалентни дискретни нормирания на F. Тогава съществува $w \in F$ с $\nu_1(w) > 0$ и $\nu_2(w) < 0$.*

Доказателство: Съгласно Лема 3.37, съществуват $w_1, w_2 \in F$ с $\nu_1(w_1) > 0$, $\nu_2(w_1) \leq 0$ и $\nu_1(w_2) \leq 0$, $\nu_2(w_2) > 0$. Тогава $w = w_1 w_2^{-1}$ изпълнява неравенствата $\nu_1(w) = \nu_1(w_1) - \nu_1(w_2) > 0$ и $\nu_2(w) = \nu_2(w_1) - \nu_2(w_2) < 0$, Q.E.D.

Лема 3.39. (Строга отделимост на n класа дискретни нормирания:) *Нека F е функционално поле на една променлива с поле от константи k, а $\nu_1, \dots, \nu_n$ са две по две нееквивалентни дискретни нормирания на F. Тогава съществува елемент $w \in F$ с $\nu_1(w) > 0$, $\nu_i(w) < 0$ за $\forall 2 \leq i \leq n$.*

Доказателство: С индукция по n, случаят $n = 2$ е доказан. По индукционно предположение съществува елемент $w_1 \in F$ с $\nu_1(w_1) > 0$, $\nu_i(w_1) < 0$ за всички $2 \leq i \leq n-1$. Съгласно случая $n = 2$ съществува елемент $w_2 \in F$ с $\nu_1(w_2) > 0$, $\nu_n(w_2) < 0$. Образуваме елемента $w = w_1 + w_2^r$ за такова естествено r, че $\nu_i(w_1) \neq r\nu_i(w_2)$ за всички $1 \leq i \leq n$. За съществуването на r е достатъчно при $\nu_i(w_2) = 0$ да имаме $\nu_i(w_1) \neq 0$. Това условие е изпълнено съгласно $\nu_1(w_2) > 0$, $\nu_i(w_1) < 0$ за $\forall 2 \leq i \leq n-1$ и $\nu_n(w_2) < 0$. Неравенството на триъгълника с равенство дава

$$\nu_i(w) = \nu_i(w_1 + w_2^r) = \min(\nu_i(w_1), r\nu_i(w_2)).$$

Съгласно $\nu_1(w_1) > 0$ и $\nu_1(w_2) > 0$ имаме $\nu_1(w) > 0$. От $\nu_i(w_1) < 0$ за всички $2 \leq i \leq n-1$ следва, че $\nu_2(w) < 0, \dots, \nu_{n-1}(w) < 0$. От $\nu_n(w_2) < 0$ и $r \in \mathbb{N}$ получаваме, че $\nu_n(w) < 0$, Q.E.D.

Теорема 8. (Апроксимационна теорема:) *Нека F е функционално поле на една променлива с поле от константи k, $w_1, \dots, w_n \in F$ са елементи на F, $\nu_1, \dots, \nu_n$ са две по две нееквивалентни дискретни нормирания на F, а $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ са цели числа. Тогава съществува елемент $z \in F$, така че $\nu_i(z - w_i) = m_i$ за $\forall 1 \leq i \leq n$.*

Доказателство: Слаб вариант - частен случай: Твърдим, че за елементите $w_1 = 1, w_2 = 0, \dots, w_n = 0$ съществува $x \in F$ с $\nu_1(x-1) > m_1$, $\nu_i(x) > m_i$ за $\forall 2 \leq i \leq n$. Съгласно Лемата за строга отделимост на n нееквивалентни нормирания, можем да изберем $w \in F$ с $\nu_1(w) > 0$, $\nu_i(w) < 0$ за $\forall 2 \leq i \leq n$. Търсим естествено число s, така че $x = \frac{1}{1+w^s}$ да изпълнява формулираните условия. По неравенството на триъгълника с равенство,

$$\nu_1(x-1) = \nu_1\left(\frac{-w^s}{1+w^s}\right) = s\nu_1(w) - \min(0, s\nu_1(w)) = s\nu_1(w) > m_1,$$

при условие, че $s > \frac{m_1}{\nu_1(w)}$. За $2 \leq i \leq n$ неравенствата

$$\nu_i(x) = -\min(0, s\nu_i(w)) = s[-\nu_i(w)] > m_i$$

са изпълнени за $s > \frac{m_i}{[-\nu_i(w)]}$. По този начин, за всяко естествено

$$s > \max\left(\frac{m_1}{\nu_1(w)}, \quad \frac{m_i}{[-\nu_i(w)]} \quad \Big| \quad 2 \leq i \leq n\right)$$

получаваме елемент $x = \frac{1}{1+w^s}$ с $\nu_1(x-1) > m_1$ и $\nu_i(x) > m_i$ за $\forall 2 \leq i \leq n$.
Слаб вариант - общ случай: За произволни елементи $w_1 \dots, w_n \in F$, произволни цели числа $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ и две по две нееквивалентни дискретни нормирания $\nu_1, \dots, \nu_n$ съществува $y \in F$ с $\nu_i(y - w_i) > m_i$ за $\forall 1 \leq i \leq n$. Избираме такова $b \in \mathbb{Z}$, че $\nu_i(w_j) \geq b$ за $\forall 1 \leq i, j \leq n$. Полагаме $d_i = m_i - b$. а $\forall 1 \leq i \leq n$ прилагаме частния случай на слабия вариант към елментите

$w_1 = 0, \ldots, w_{i-1} = 0, w_i = 1, w_{i+1} = 0, \ldots, w_n = 0$ и получаваме $x_i \in F$ с $\nu_i(x_i - 1) > d_i$, $\nu_j(x_i) > d_j$ за $\forall j \neq i$. Избираме $y = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i$ и пресмятаме, че

$$\nu_i(y - w_i) = \nu_i \left(w_i(x_i - 1) + \sum_{j \neq i} w_j x_j \right) \geq$$

$$\geq \min(\nu_i(w_i) + \nu_i(x_i - 1), \nu_i(w_j) + \nu_i(x_j) \ \mid \ j \neq i) > m_i \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Силен вариант - общ случай: Нека $u_i \in F$ с $\nu_i(u_i) = m_i$. Прилагаме общия случай на слабия вариант към $w_i + u_i$ и получаваме съществуването на $z \in F$ с $\nu_i(z - (w_i + u_i)) > m_i$ за $\forall 1 \leq i \leq n$. По неравенството на триъгълника с равенство,

$$\nu_i(z - w_i) = \nu_i((z - w_i - u_i) + u_i) = \min(\nu_i(z - w_i - u_i), \nu_i(u_i)) = m_i,$$

Q.E.D.

Задача 3.40. *Нека $\mathbb{F}_3(x)$ е чисто трансцендентното разширение на $\mathbb{F}_3$ от степен 1, $\nu_x : \mathbb{F}_3(x) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ е нормализираното дискретно нормиране с локален параметър $t_1 = x$, $\nu_{x-2} : \mathbb{F}_3(x) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ е нормализираното дискретно нормиране с локален параметър $t_2 = x - 2$.*

$$v_1 = \frac{x}{x-2}, \quad v_2 = \frac{x-2}{x}, \quad x_1 = \frac{1}{1+v_1^4}, \quad x_2 = \frac{1}{1+v_2^4}, \quad z = (x^3+x+1)x_1 + x^2 x_2.$$

Да се докаже, че:

$$\textit{(i)} \quad \nu_x(x_1 - 1) > 3, \quad \nu_{x-2}(x_1) > 2, \quad \nu_x(x_2) > 3, \quad \nu_{x-2}(x_2 - 1) > 2;$$

$$\textit{(ii)} \quad \nu_x(z - (x^3 + x + 1)) > 3, \quad \nu_{x-2}(z - x^2) > 2;$$

$$\textit{(iii)} \quad \nu_x(z - (x + 1)) = 3, \quad \nu_{x-2}(z - (x - 1)) = 2.$$

С други думи, $z \in \mathbb{F}_3(x)$ изпълнява Апроксимационната теорема за $w_1 = x+1$, $w_2 = x - 1$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$.

Упътване: (i) Вземете предвид, че $\nu_x(v_1) = 1$, $\nu_{x-2}(v_1) = -1$, $\nu_x(v_2) = -1$, $\nu_{x-2}(v_2) = 1$;
(iii) Представете $z-(x+1) = [z-(x^3+x+1)]+x^3$, $z-(x-1) = (z-x^2)+(x^2-x+1)$ и използвайте, че $(x-2)^2 = x^2 - x + 1$ над $\mathbb{F}_3$.

9. Лоранов ред относно локален параметър

Елементът $z \in F$ с $\nu_i(z - w_i) = m_i$ за $\forall 1 \leq i \leq m$ от Апроксимационната теорема е такъв, че разлаганията му в степенни редове относно локални параметри t_i на ν_i съвпадат със съответните разлагания на $w_i \in F$, включително до събираемите от степени $m_i - 1$ относно t_i.

Твърдение 3.41. *Нека F е функционално поле на една променлива с поле от константи k, а t е локален параметър на (класа на) нормирането ν. Тогава всеки елемент $z \in F$ се развива в Лоранов ред*

$$z = \sum_{j=r}^{\infty} a_j t^j \quad \textit{с} \quad r = \nu(z)$$

и коефициенти $a_j \in \overline{k}$ от алгебричната обвивка $\overline{k}$ на k, $a_r \neq 0$.

Доказателство: Полето от остатъци $\mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu$ е крайно разширение на k. Следователно $\mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu \supset k$ е алгебрично разширение и можем да считаме, че $\mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu$ се съдържа в алгебричната обвивка $\overline{k}$ на k.
Ако $\nu(z) = r$, то $\nu(zt^{-r}) = 0$, така че $zt^{-r} \in \mathcal{O}_\nu^*$. Да означим

$$a_r := zt^{-r} + \mathfrak{M}_\nu \in (\mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu)^* \subset \overline{k}^*.$$

Разликата $zt^{-r} - a_r \in \mathfrak{M}_\nu = \langle t \rangle$, откъдето $\nu(z - a_r t^r) \geq r + 1$ и елементът $zt^{-r-1} - a_r t^{-1} \in \mathcal{O}_\nu$ е регулярен. Избираме

$$a_{r+1} := zt^{-r-1} - a_r t^{-1} + \mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu \subset \overline{k}.$$

Сега $zt^{-r-1} - a_r t^{-1} - a_{r+1} \in \mathfrak{M}_\nu = \langle t \rangle$, така че

$$\nu(z - a_r t^r - a_{r+1} t^{r+1}) \geq r + 2.$$

С индукция по $m \geq r$, нека $\nu\left(z - \sum\limits_{j=r}^{m} a_j t^j\right) \geq m + 1$. Тогава

$$zt^{-m-1} - \sum_{j=r}^{m} a_j t^{j-m-1} \in \mathcal{O}_\nu$$

и избираме

$$a_{m+1} = zt^{-m-1} - \sum_{j=r}^{m} a_j t^{j-m-1} + \mathfrak{M}_\nu \in \mathcal{O}_\nu/\mathfrak{M}_\nu \subset \overline{k}.$$

Разликата $zt^{-m-1} - \sum\limits_{j=r}^{m} a_j t^{j-m-1} - a_{m+1} \in \mathfrak{M}_\nu = \langle t \rangle$, откъдето

$$\nu\left(a - \sum_{j=r}^{m+1} a_j t^j\right) \geq m + 2.$$

Продължавайки по същия начин получаваме разлагане $z = \sum\limits_{j=r}^{\infty} a_j t^j$ на $z \in F$ в степенен ред на локалния параметър t на ν, Q.E.D.
Нека $w_i = \sum\limits_{j=r_i}^{\infty} b_{ij} t_i^j$ са развитията на $w_i \in F$ в степенни редове относно локалните параметри t_i на ν. Ако $z \in F$ изпълнява условията $\nu_i(z - w_i) = m_i$ от Апроксимационната теорема, то развитията $z = \sum\limits_{j=s_i}^{\infty} a_{ij} t_i^j$ на z в степенни редове относно локалните параметри t_i на ν_i съвпадат с развитията на w_i, включително до събираемите от степен $m_i - 1$, т.е. $r_i = s_i$ и $b_{ij} = a_{ij}$ за $\forall r_i \leq j \leq m_i - 1$.

Задача 3.42. *Нека $\mathbb{F}_3(x)$ е чисто трансцендентно разширение на $\mathbb{F}_3$ от степен 1, а $\nu_x : \mathbb{F}_3(x) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ е нормализираното дискретно нормиране с локален параметър $t = x$. Да се намерят първите три члена на Лорановите редове на*

$$\frac{1}{x-2}, \quad \frac{x^2}{x-2}, \quad \frac{1}{x^2 - 2x} \in F_1$$

относно локалния параметър x.